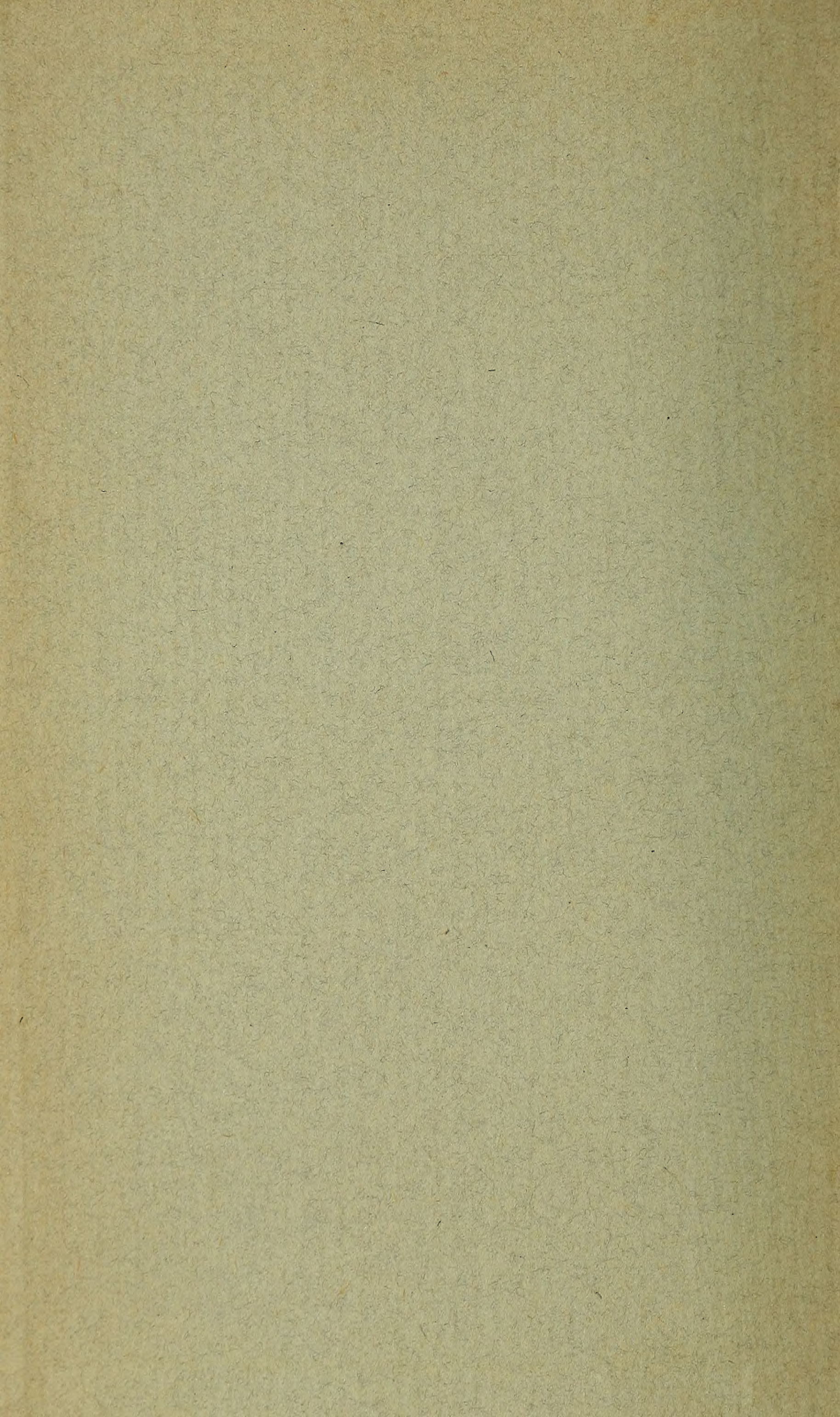
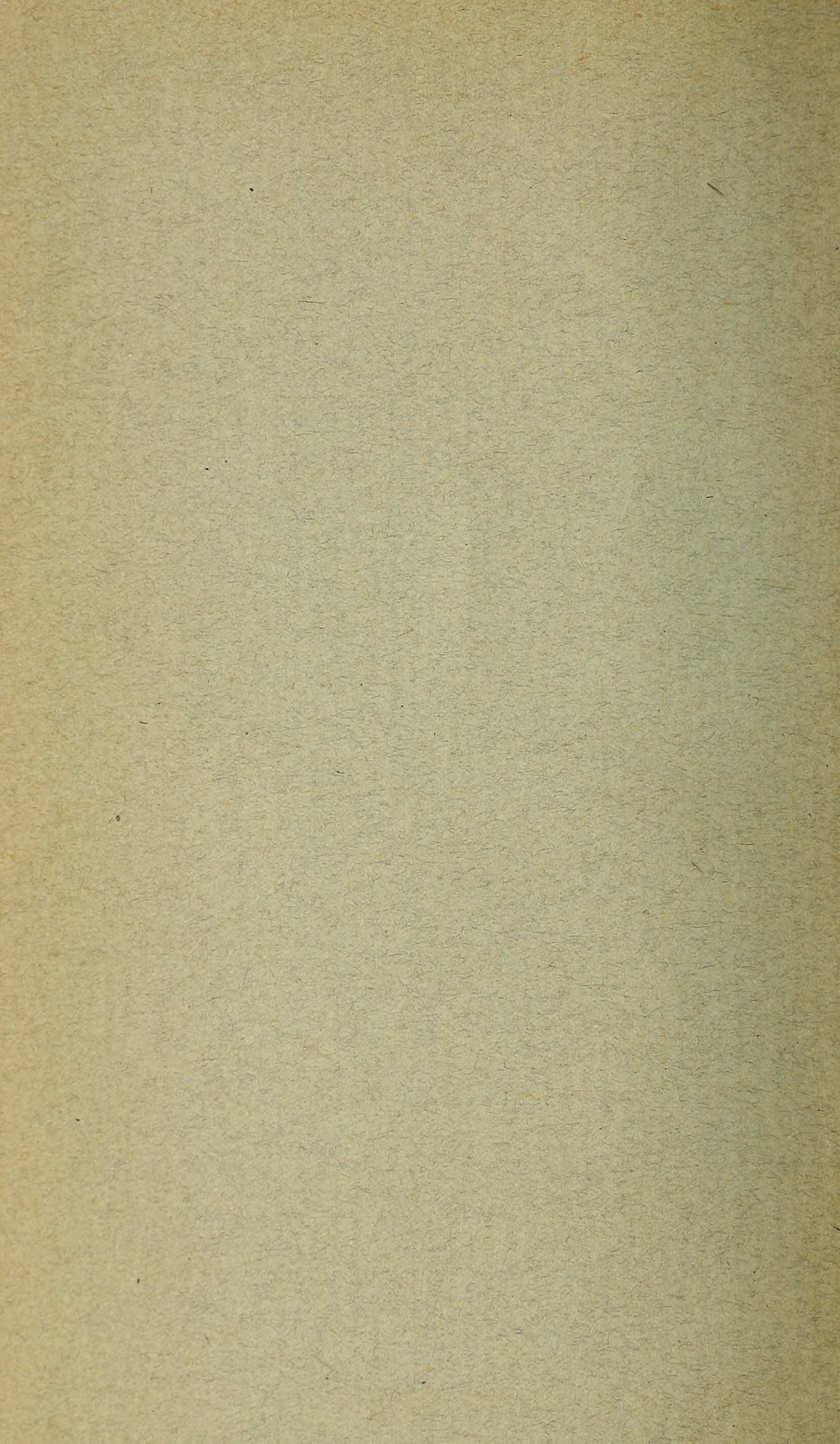






ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS
FÖRHANDLINGAR.

FEMTIONDEFEMTE ÅRGÅNGEN.

1898.

STOCKHOLM, 1898, 1899.
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER.

INNEHÅLL.

Utförliga uppsatser äro betecknade med en asterisk.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 1.

Onsdagen den 12 Januari.

INNEHÅLL.

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot Direktorn för Tekniska Institutet i Milano FRANCESCO BRIOSCHI med döden afgått.

Berättelser om resor, som med understöd af Akademien blifvit under sistlidne år inom landet utförda med ändamål att undersöka dess naturförhållanden, hade afgifvits af:

Fil. Licentiat T. E. AHLFVENGREN, som idkat växtfysiognomiska studier i Jemtland och Lappland,

Studeranden J. G. ANDERSSON, som vid Kosteröarne och Kristinebergs zoologiska station studerat Bohusläns Ostracoder,

Filos. Kandidat J. ARVIDSSON, som äfvenledes vid Kosteröarne och Kristineberg undersökt vissa grupper af polychæta maskar,

Filos. Doktor O. BORGE, som undersökt algfloran i norra delen af Bottniska viken,

Docent A. HENNIG, som i sydvestra Skåne undersökt skrifkritans fauna,

Filos. Kandidat O. Rosenberg, som vid Sveriges vestkust anställt fysiologiska undersökningar öfver Halofyter, och

Docent H. Wallengren, som vid Kristineberg idkat fortsatta studier öfver de ciliata infusorierna samt Gullmarens Sipunculider.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens skrifter:

i Handlingarne: 1:o) »Étude sur diverses méthodes servantes à calculer la moyenne diurne de la température à l'aide des observations faites aux heures adoptées dans les stations météorologiques suédoises», af Professor R. Rubenson; 2:o) »La pression atmosphérique moyenne en Suède 1860—1895», af Amanuens Dr H. E. Hamberg; 3:o) »Ueber den Einfluss des Mondes auf die Polarlichter und Gewitter», af Dr N. Ekholm och Professor S. Arrhenius; 4:o) »Ueber die nahezu 26-tägige Periode der Polarlichter und Gewitter», af desamma;

i Bihanget till Handlingarne: »Studien über die Membranschleime der Pflanzen. II. Vergleichende Anatomie der Samenschale der Cistaceen», af Fil. Kandidat O. Rosenberg;

i Öfversigten: 1:o) Untersuchungen des astrophotographischen Messapparats und Gitters der Sternwarte in Stockholm, af Fil. Dr K. G. Olsson; 2:o) »Om individbildningen hos slägtet Mentha», af Studeranden T. Westergren.

Friherre Nordenskiöld dels förevisade prof på mineralet Fenakit, som för en tid sedan påträffats i ett fältspatsbrott vid Kragerö i Norge och redogjorde för detta minerals upptäcktshistoria, samt dels meddelade ett af H. Exc. Utrikes Ministern honom delgifvet bref från svensk-norske Konsuln i San Francisco om en i början af sistlidne Augusti månad i granskapet af Quesnel Lake i British Columbia i luften sedd ballong, som misstänkts vara Andrée's ballong.

Herr Wittrock redogjorde för ofvannämnda af Docenten Wallengren, Doktor Borge och Kandidat Rosenberg afgifna reseberättelser.

Herr THÉEL refererade reseberättelserna af Kandidat ARVIDSSON, Studeranden ANDERSSON och Docenten WALLENGREN.

Herr TÖRNEBOHM meddelade innehållet af Docenten HENNIGS ofvannämnda reseberättelse.

Herr SIDENBLADH öfverlemnade å författarens vägnar ett nyligen af Akademiens utländske ledamot Professor E. LEVASSEUR utgifvet större arbete, »L'Ouvrier américain», samt redogjorde i korthet för detsammas tillkomst och innehåll.

Genom anställda val kallade Akademien till inländsk ledamot Professorn i Kemi och Farmaci vid Karolinska Med.-Kir. Institutet Grefve KARL AXEL HAMPUS MÖRNER, samt till utländsk ledamot Professorn i Fysiologi vid universitetet i Heidelberg WILLY KÜHNE.

Den *Edlundska* belöningen tillerkändes Filos. Doktorn W. CARLHEIM-GYLLENSKÖLD för en af honom författad och i »Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms Observatorium» offentliggjord afhandling: »Sur la forme analytique de l'attraction magnétique de la terre, exprimée en fonction de temps».

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Ecklesiastik Departementet.*
Meddelanden från svenska riksarkivet. 21. 1897. 8:o.
JÆGER, H., Illustreret norsk Literaturhistorie. H. 1—39. Kra 1893. 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 2 häften. 4:o.
— *Svenska akademien.*
Handlingar ifrån år 1886. D. 11 (1896). 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1897: N:r 11. 8:o.
Skara. *Högre allmänna läroverket.*
SCHÖTT, H., Skara läroverks naturhistoriska museum. Historik och katalog. 1896. 4:o.
Upsala. *Universitets-biblioteket.*
LANGE, G., Mapa de la provincia de Catamarca. 1893. 4 bl. fol.
— *Meteorologiska institutionen.*
HILDEBRANDSSON, H. H., Meteorologiska institutionen. 1897. 4:o.

Aachen. *Meteorologische Station 1. Ordnung.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahrg. 2 (1896). 4:o.
Adelaide. *Observatory.*
Meteorological observations. Year 1894. Fol.
Angers. *Société d'études scientifiques.*
Bulletin. N. S. Année 25 (1895)—26 (1896). 8:o.
Austin. *Texas academy of science.*
Transactions. Vol. 2: N:o 1 (1897). 8:o.
Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 50 (1896). 8:o.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
Circulars. Vol. 17: N:o 132—133. 4:o.
Batavia. *Magnetical and meteorological observatory.*
Observations. Vol. 19 (1896). 4:o.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. 18 (1896). 8:o.
Berlin. *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen in den Jahren 1892—94. 4:o.
Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen i. J. 1894. 4:o.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung. 1893: H. 3; 1896: 2; 1897: 1. 4:o.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam. 1894: H. 2; 1895: 2. 4:o.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam i. J. 1895. 4:o.
Bericht über die Thätigkeit i. J. 1896. 8:o.
— *K. Preussische geologische Landesanstalt und Bergakademie.*
Jahrbuch. Bd 15 (1894). 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. 1896: Abth. 1—3. — Namenregister, Bd 21—43. H. 1. 1897. 8:o.
— *Forstlich-meteorologische Stationen.*
Beobachtungs-Ergebnisse. Jahrg. 22 (1896). 8:o.
Jahresbericht. Jahrg. 22 (1896). 8:o.
— *K. Botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. N:o 11. 1897. 8:o.
Bern. *Hydrometrische Abtheilung des eidgenöss. Oberbauinspektorates.*
Tabellarische Zusammenstellung der Haupt-Ergebnisse der schweizerischen hydrometrischen Beobachtungen. Jahr 1890. Fol.
Graphische Darstellung der schweizerischen hydrometrischen Beobachtungen. Jahr 1896. Fol.
Besançon. *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Procès-verbaux et mémoires. Année 1896. 8:o.

(Forts. å sid. 32.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 1.
Stockholm.

Untersuchung des astrophotographischen Messapparats und Gitters der Sternwarte in Stockholm.

Von K. G. Olsson.

(Mitgetheilt den 12 Januar 1898 durch D. G. Lindhagen.)

Beschreibung des Messapparats.

Der Apparat für Messung photographischer Platten der Sternwarte in Stockholm [1]) ist für die Messung rechtwinkliger Coordinaten construirt. Er besteht aus drei Haupttheilen. Der untere Theil ist die y-Schraube und der damit verbundene Schlitten, auf dem die zwei oberen Theile gleiten; der mittlere Theil ist die x-Schraube mit dem zugehörigen Schlitten, auf dem der obere Theil gleitet; der obere Theil endlich ist der Tisch, worauf die Platten fest gemacht werden. Es folgt hieraus, dass bei der Bewegung der y-Schraube die zwei oberen Systeme ihre gegenseitige Stellung nicht ändern, und dass bei der Drehung der x-Schraube nur das obere System sich fortbewegt. Jeder Schraube gehört eine in halbe Millimeter getheilte, feste Scale und ein beweglicher Index, zur groben Ablesung. Ausserdem ist jede Schraube mit einer Trommel versehen, woran die feinere Ablesung gemacht wird. Diese Trommeln sind in 200 Theile getheilt; jedes solche Intervall entspricht also $\frac{1}{400}$ mm. Die Einstellungen geschehen mittelst eines Microscopes, welches von einem dem untersten, schweren Fussgestelle fest verbundenen Stative getragen wird.

---

[1]) Von Herrn P. M. Sörensen in Stockholm angefertigt.

Als Längenmaass wird das Millimeter der y-Schraube angenommen. Die Messungen wurden bei einer mittleren Temperatur von 15° C. ausgeführt.

Sowohl die Schlitten wie die Platte wurden mit Hülfe eines kleinen Niveau's horizontal eingestellt; von einem Neigungsfehler kann man folglich immer absehen.

§ 1. Theorie des Messapparats.

Nennt man M (Fig. 1) den Punkt, wo die optische Axe des Microscops die Platte trifft, wenn die Indices auf die Striche $x = 80$; $y = 100$ der Scalen eingestellt sind, so beschreibt dieser Punkt, wenn man jede der Schrauben für sich in Bewegung setzt, zwei Curven in der xy-Ebene, welche in Folge der Nivellirung mit der Ebene der Platte hinlänglich genau zusammen-

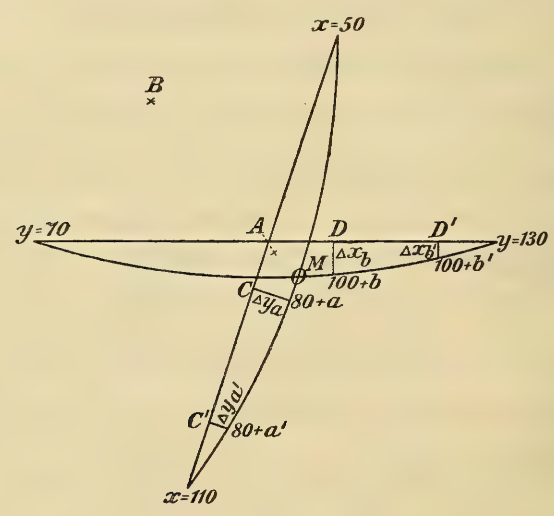


Fig. 1.

fällt. Man kann folglich die zwei Schrauben zu zwei mathematischen Linien reducirt denken, welche in der xy-Ebene liegen und sich in dem Punkte M schneiden. Die y-Axe ist die gerade Linie, welche die zwei Punkte $y = 70$ und $y = 130$ verbindet, und als Origo wird der Mittelpunkt dieser Linie angenommen. Die wahre x-Axe ist die gegen diese Linie senkrechte. Die Coordinaten x und y werden im Sinne der Scalentheilung positiv

gerechnet. Verbindet man ferner die zwei Punkte $x = 50$ und $x = 110$ der x-Curve mittelst einer geraden Linie, so wird als der Winkel zwischen den beiden Schrauben der Winkel $90° + \psi_0$ bezeichnet, welchen die positiven Richtungen dieser beiden geraden Linien mit einander bilden. Dieser Winkel ψ_0 und die Ordinaten Δx_b und Δy_a der y- und x-Schraubencurven sind die drei Arten von Instrumentfehlern, welche zu bestimmen sind.

Die vorliegende Aufgabe besteht nun darin, *die wahren Coordinatenunterschiede, auf die oben definirten Coordinatenaxen bezogen, zwischen zwei Punkten A und B, in der Lage der Platte, wo A in die optische Axe eingestellt worden ist, zu finden.*

Seien zuerst $x = 80 + a$; $y = 100 + b$ die Ablesungen, wenn A in die optische Axe einfällt. Betrachten wir dann den Weg, welchen der Punkt B durchläuft, wenn dieser Punkt durch die Bewegung des oberen Theiles des Messapparats von $80 + a$ bis $80 + a'$, dann durch die Bewegung des y-Index von $100 + b$ bis $100 + b'$ zum Zusammenfallen mit dem Punkte M gebracht worden ist. Wir können nun annehmen, dass die Bahn des Punktes B theils von Parallelbewegungen, theils von Rotationen um die Punkte $80 + a'$ und $80 + b'$ zusammengesetzt ist. Diese Curve (Fig. 2) besteht folglich aus vier verschiedenen Theilen:

BB', der Curve, welche der Parallelbewegung der Platte von $80 + a$ bis $80 + a'$ entspricht;

$B'B''$, der Rotation der Platte um den Punkt $80 + a'$ (der hierbei beschriebene Winkel ist dem Winkel zwischen den Tangenten der x-Curve in den Punkten $80 + a$ und $80 + a'$ gleich);

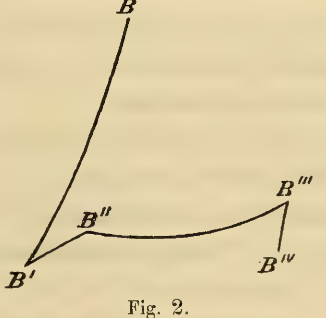


Fig. 2.

$B''B'''$, der Curve der Parallelbewegung von $100 + b$ bis $100 + b'$;

$B'''B^{IV}$, der Rotationscurve um den Punkt $y = 100 + b'$.

Setzen wir nun voraus, dass alle Ablesungen schon von fortschreitenden und periodischen Schraubenfehlern befreit sowie auf das angenommene Längenmaass, das Millimeter der y-Schraube, reducirt worden sind, so ist

$$BB' = a' - a\,. \tag{1}$$

Nennt man ferner α den Winkel, welchen $B'B''$ mit der positiven Richtung der y-Axe bildet, so sind, wenn hier $\psi = 0$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \\ \cos\alpha &= \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Man findet dann:

$$B'B'' = \varDelta v \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2} \tag{3}$$

wo $\varDelta v$ der Winkel zwischen den Tangenten der x-Curve in $80 + a$ und $80 + a'$ ist, positiv genommen, wenn er in retrograder Richtung während der Bewegung von $80 + a$ bis $80 + a'$ beschrieben worden ist.

Ferner ist:

$$B''B''' = b' - b \tag{4}$$

und

$$B'''B^{IV} = b'\varDelta w \tag{5}$$

wenn man $\varDelta w$ den Winkel nennt, welchen die Tangente der y-Curve während der Bewegung von $80 + b$ bis $80 + b'$ in directer Richtung beschreibt.

Um nun die Coordinatenunterschiede $x_A - x_B$ und $y_A - y_B$ der Punkte A und B in der Lage der Platte, wo A in die optische Axe eingestellt worden ist, zu finden, soll man die Curve $B \ldots B^{IV}$ auf die Coordinatenaxen projiciiren.

Hierbei ist

die Projection von BB' = der Projection von $a' - a$

= der Proj. der gebrochenen Linie

$80 + a,\ CC',\ 80 + a'$

und

die Proj. von $B''B''' =$ der Proj. von $b' - b$

$=$ der Proj. von $100 + b, DD', 100 + b'$.

Nennt man nun $[b]$ und $[a]$ die projiciirten Ablesungen, d. h. die Längen der Projectionen der Bogen b und a auf die entsprechenden geraden Linien, welche die Punkte $x = 50$, $x = 110$ und die Punkte $y = 70$, $y = 130$ verbinden, nennt man ferner ψ_b den Winkel zwischen diesen Linien für die Einstellung $y = 100 + b$, so findet man für die gesuchten Coordinatenunterschiede die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x_A - x_B &= \{[a'] - [a]\} \cos \psi_b - b' \varDelta v + b' \varDelta w + \varDelta x_{b'} - \varDelta x_b \\ y_A - y_B &= [b'] - [b] - (a' - a) \sin \psi_b + a' \varDelta v + \varDelta y_{a'} - \varDelta y_a \,. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

In dem Gliede $(a' - a) \sin \psi_b$ sind a' statt $[a']$ und a statt $[a]$ gesetzt, was mit Rücksicht auf die Kleinheit des Gliedes erlaubt ist.

Da in die Gleichungen (6) die Winkel $\varDelta v$ und $\varDelta w$ zwischen den Tangenten der x- und y-Curven eingehen und folglich die Kenntniss der Derivirten von $\varDelta x$ und $\varDelta y$ in Bezug auf a und b erforderlich ist, so ist es nöthig, zwischen diesen Fehlern und den Grössen a, b eine Relation aufzustellen. Ich nehme an:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta x_b &= a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \ldots \\ \varDelta y_a &= a'_0 + a'_1 a + a'_2 a^2 + a'_3 a^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Da ich für die Bestimmung der Instrumentfehler 7 Punkte der Linien des Gitters gemessen habe, wäre es nöthig gewesen 7 Glieder der obigen Reihen mitzunehmen, um eine vollständige Uebereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen zu gewinnen. Ich habe jedoch nur die zweite Potenz von a und b berücksichtigt, da ich nur den centralen Theil des Gitters untersucht habe. Der Parabelbogen, welchen man in dieser Weise erhält, wenn man auch in den Gleichungen (7) die erlaubte Voraussetzung $[a] = a$; $[b] = b$ macht, unterscheidet sich von einem Kreisbogen nur um kleine Grössen der dritten Ordnung. Man hat nämlich:

für $b = \pm 30$ halbm.m.:

$$\varDelta x_{+30} = a_0 + 30a_1 + 900a_2 = 0$$

$$\varDelta x_{-30} = a_0 - 30a_1 + 900a_2 = 0$$

folglich:

$$a_1 = 0\,;\; a_2 = -\tfrac{1}{900}\,a_0\,;\; a_0 = \varDelta x_0 \qquad (8)$$

Für einen Kreisbogen hat man:

$$\varDelta x_b = \varDelta x_0 - \frac{b^2}{2R'} \qquad (9)$$

wenn R' der Krümmungsradius der y-Schraube ist, und in derselben Weise:

$$\varDelta y_a = \varDelta y_0 - \frac{a^2}{2R} \qquad (10)$$

wenn R der Krümmungsradius der x-Schraube ist. Man ersieht also hieraus, dass die allgemeine Hypothese zweiten Grades zum Kreise führt.

Man hat nun für die reducirten Ablesungen die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}[a] &= a - \tfrac{1}{6}\frac{a^3}{R^2}\\ [b] &= b - \tfrac{1}{6}\frac{b^3}{R'^2}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

und für die Winkel $\varDelta v$ und $\varDelta w$:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta v &= \frac{a'-a}{R}\\ \varDelta w &= \frac{b'-b}{R'}\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

In Folge hiervon gehen die Gleichungen (6) in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned}&x_A - x_B =\\ &= \{[a'] - [a]\}\cos\psi_b + b'\left[\frac{b'-b}{R'} - \frac{a'-a}{R}\right] + \varDelta x_{b'} - \varDelta x_b\\ &y_A - y_B =\\ &= [b'] - [b] - (a'-a)\sin\psi_b + \frac{a'(a'-a)}{R} + \varDelta y_{a'} - \varDelta y_a\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Die Fig. 3 bezeichnet den centralen Theil des Gitters [1]) in der Lage, welche ich im folgenden als die Lage 1 bezeichnet habe. Die Coordinaten in Bezug auf ein in der Platte festes Coordinatensystem werden ξ und η genannt und werden mit zunehmenden Indices der A- und B-Linien des Gitters positiv gerechnet. Die Fehler der Schnittpunkte, d. h. die Abstände zwischen den wirklichen und idealen Schnittpunkten, werden $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ genannt und werden in derselben Richtung wie die Coordinaten selbst positiv gerechnet.

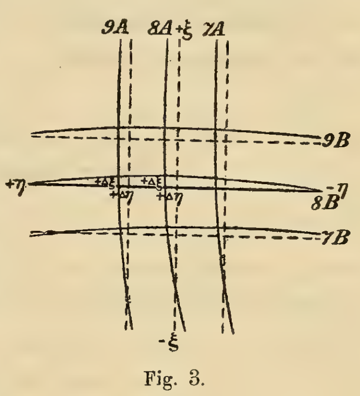


Fig. 3.

Die Richtung der Coordinaten und Fehler des Gitters sind also den entsprechenden des Messapparats entgegengesetzt. Bei der Bewegung der Schrauben treffen immer gleichnamige Punkte zusammen. Nennt man α den Winkel, welchen die negative η-Axe mit der positiven y-Axe macht, positiv, wenn er von der $-\eta$-Axe in directer Richtung um die $+y$-Axe beschrieben worden ist (Fig. 1 und 3), und bedeuten A und B zwei Punkte des Gitters, so werden auch:

$$\left.\begin{aligned} x_A - x_B &= nN - 2nN\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - mN\sin\alpha + \Delta\xi_B - \Delta\xi_A \\ y_A - y_B &= nN\sin\alpha + mN - 2mN\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \Delta\eta_B - \Delta\eta_A \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

wo n und m zwei positive oder negative ganze Zahlen und N den idealen Abstand zweier angrenzenden Punkte des Gitters, in den Halbmillimetern der y-Schraube ausgedrückt, bedeuten. Die Zahlen n werden längs der A-Linien, die Zahlen m längs der B-Linien gerechnet. Für z. B. den Punkt $7B \times 11A$ ist also $n = -1$; $m = +3$. Die Fehler werden $\Delta\xi_{n.m}$ und $\Delta\eta_{n.m}$ genannt; mit $\Delta\xi_{-1.+3}$ und $\Delta\eta_{-1.+3}$ werden also die Fehler des Punktes $7B \times 11A$ bezeichnet. Ich habe $\Delta\xi_{0.\pm 3} = 0$; $\Delta\eta_{0.\pm 3} = 0$ gesetzt, folglich die η-Axe durch die Punkte $8B \times 5A$

[1]) Das Gitter ist von Herrn P. GAUTIER in Paris.

und $8B \times 11A$ gelegt und als Origo den Mittelpunkt der Verbindungslinie dieser Punkte genommen.

Durch die Combination der Formeln (13) und (14) werden im folgenden Paragraphen die Formeln für die Bestimmung der Fehler hergeleitet werden.

§ 2. Formeln für die Bestimmung der Fehler des Messapparats und Gitters.

Die Messungen, welche für die Fehlerbestimmungen erforderlich waren, wurden auf Platten ausgeführt, auf die das Gitter copirt worden war, und jede solche Platte wurde in drei verschiedenen Lagen ausgemessen. Die erste Lage ist durch die Fig. 3 definirt; die Gelatineschicht ist hier nach oben gerichtet und bei der Drehung der Schrauben fallen immer entsprechende Punkte des Gitters und der x- und y-Scalen auf einander. Bei den Lagen 2 und 3 ist die Gelatineschicht nach unten gerichtet; die Lage 2 ist durch die Drehung der Platte um einen Winkel von 180° um die Linie $8B$, die Lage 3 durch die Drehung von 180° um die Linie $8A$ entstanden. In der Lage 2 ist die Ordnung der B-Linien, in der Lage 3 diejenige der A-Linien umgekehrt.

In der Lage 1 werden die Ablesungen an der x-Scale $a'_{10n\,.\,10m}$, an der y-Scale $b'_{10n\,.\,10m}$, die Ablesungen des Centrums a und b, der Winkel zwischen den $-\eta$- und $+y$-Axen α genannt; in der Lage 2 die entsprechenden Grössen $a''_{10n\,.\,10m}$, $b''_{10n\,.\,10m}$, a_2, b_2, α_2; in der Lage 3 ... $c'_{10n\,.\,10m}$, $d'_{10n\,.\,10m}$, c, d, α_3. Mit a'_{10m} wird die Ablesung der x-Scale in einem der Linie $8B$ zuhörenden Punkte, und mit b'_{10n} die Ablesung der y-Scale in einem Punkte der Linie $8A$ verstanden. Die Platte war immer so gut orientirt, und die Instrumentfehler wurden so klein befunden, dass

$$2(a'-a)\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\,,\quad \frac{bb'}{R'}\,,\quad \frac{ab'}{R}\,,\quad 2nN\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\,,\quad \frac{aa'}{R}\,,\quad 2mN\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

gleich Null gesetzt werden konnten.

Man erhält nun aus (13) und (14)

Linie 8B.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Lage 1:} && a'_{10m} - a + \frac{b'^2}{R'} + \Delta x_{10m} - \Delta x_0 = \\
& && = - mN \sin\alpha + \Delta\xi_{0.m} - \Delta\xi_{0.0} \\
&\text{Lage 2:} && a''_{10m'} - a_2 + \frac{b''^2}{R'} + \Delta x_{10m'} - \Delta x_0 = \\
& && = - m'N \sin\alpha_2 - \Delta\xi_{0.m'} + \Delta\xi_{0.0}
\end{aligned}\right\} (15)$$

Der Kürze wegen sind hier b' und b'' statt $b'_{0.10m}$ und $b''_{0.10m'}$ geschrieben.

Setzt man nun $m = m'$ und also hinlänglich genau: $\frac{b'^2}{R'} = \frac{b''^2}{R'}$, so werden:

$$\left.\begin{aligned}
&a'_{10m} - a + a''_{10m} - a_2 + 2\left(\frac{b'^2}{R'} + \Delta x_{10m} - \Delta x_0\right) = \\
&\qquad = - mN(\sin\alpha + \sin\alpha_2)
\end{aligned}\right\} (16)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&a'_{10m} - a - a''_{10m} + a_2 = \\
&= - mN(\sin\alpha - \sin\alpha_2) + 2\Delta\xi_{0.m} - 2\Delta\xi_{0.0}
\end{aligned}\right\} (17)$$

Setzt man der Reihe nach $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ und combinirt die so erhaltenen Specialgleichungen, führt man ferner die Abkürzungen ein:

$$C_r = a'_r + a''_r; \; C_0 = a + a_2 \qquad \text{(I)}$$

und

$$R_r = a'_r - a - a''_r + a_2; \; Q = N(\sin\alpha - \sin\alpha_2); \qquad \text{(II)}$$

so erhält man das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{R'} &= \tfrac{1}{200000}[C_{+20} + C_{-20} - (C_{+30} + C_{-30})] \\
&= \tfrac{1}{120000}[C_{+10} + C_{-10} - (C_{+20} + C_{-20})] \\
&= \tfrac{1}{40000}[2C_0 - (C_{+10} + C_{-10})]
\end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

wo R' in halben Millimetern, C_r in Theilen der Schraubentrommel ausgedrückt sind.

Ferner ist nach (9):

$$\Delta x_0 = \frac{450}{R'}; \; \Delta x_{10} = \Delta x_0 - \frac{50}{R'}; \; \Delta x_{20} = \Delta x_0 - \frac{200}{R'}; \; \Delta x_{30} = 0. \quad \text{(IV)}$$

Aus (17) ergiebt sich dann:

$$Q = \tfrac{1}{6}(R_{-30} - R_{+30}) \tag{V}$$

und für die Fehler der Linie $8B$ des Gitters:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta\xi_{0\,.\,0} &= -\tfrac{1}{4}(R_{+30} + R_{-30})\\
\varDelta\xi_{0\,.\,2} &= \varDelta\xi_{0\,.\,0} + \tfrac{1}{2}(R_{+20} + 2Q)\\
\varDelta\xi_{0\,.\,1} &= \varDelta\xi_{0\,.\,0} + \tfrac{1}{2}(R_{+10} + Q)\\
\varDelta\xi_{0\,.\,-1} &= \varDelta\xi_{0\,.\,0} + \tfrac{1}{2}(R_{-10} - Q)\\
\varDelta\xi_{0\,.\,-2} &= \varDelta\xi_{0\,.\,0} + \tfrac{1}{2}(R_{-20} - 2Q)\\
\varDelta\xi_{0\,.\,\pm 3} &= 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{VI}$$

Die Fehler $\varDelta\xi$ werden hierbei in Theile der y-Schraubentrommel ausgedrückt.

Aus (13) und (14) erhält man ferner für die

Linie $8A$.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Lage 1:}\\
&b'_{10n} - b - (a'_{10n\,.\,0} - a)\sin\psi_0 + \frac{a'^2}{R} + \varDelta y_{10n} - \varDelta y_0 =\\
&\qquad = nN\sin\alpha + \varDelta\eta_{n\,.\,0} - \varDelta\eta_{0\,.\,0}\\
&\text{Lage 3:}\\
&d'_{10n} - d - (c'_{10n\,.\,0} - c)\sin\psi_0 + \frac{c'^2}{R} + \varDelta y_{10n} - \varDelta y_0 =\\
&\qquad = nN\sin\alpha_3 - \varDelta\eta_{n\,.\,0} + \varDelta\eta_{0\,.\,0}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&b'_{10n} - b + d'_{10n} - d - 2(a' - a)\sin\psi_0 + \frac{2a'^2}{R} + 2(\varDelta y_{10n} - \varDelta y_0) =\\
&\qquad = nN(\sin\alpha + \sin\alpha_3)
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und

$$b'_{10n} - b - d'_{10n} + d = nN(\sin\alpha - \sin\alpha_3) + 2\varDelta\eta_{n\,.\,0} - 2\varDelta\eta_{0\,.\,0} \tag{20}$$

Berechnet man nun zuerst:

$$D_r = b'_r + d'_r;\ D_0 = b + d \tag{VII}$$

und

Linie 8B:

$$\left.\begin{aligned} N(\sin\alpha+\sin\alpha_3) &= \tfrac{1}{6}\{a'_{-30}+c'_{-30}-a'_{+30}-c'_{+30}\}\\ &= \tfrac{1}{4}\{a'_{-20}+c'_{-20}-a'_{+20}-c'_{+20}\}\\ &= \tfrac{1}{2}\{a'_{-10}+c'_{-10}-a'_{+10}-c'_{+10}\}\end{aligned}\right\}\quad\text{(VIII)}$$

so sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \tfrac{1}{200000}[D_{+20}+D_{-20}-(D_{+30}+D_{-30})]\\ &= \tfrac{1}{120000}[D_{+10}+D_{-10}-(D_{+20}+D_{-20})]\\ &= \tfrac{1}{40000}[2D_0-(D_{+10}+D_{-10})]\end{aligned}\right\}\quad\text{(IX)}$$

ferner:

$$\varDelta y_0=\frac{450}{R};\ \varDelta y_{10}=\varDelta y_0-\frac{50}{R};\ \varDelta y_{20}=\varDelta y_0-\frac{200}{R};\ \varDelta y_{30}=0\quad\text{(X)}$$

und:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\psi_0=\\ &=\tfrac{1}{8000}[D_{+30}-D_{-30}-(D_{+20}-D_{-20})-2N(\sin\alpha+\sin\alpha_3)]\\ &=\tfrac{1}{8000}[D_{+20}-D_{-20}-(D_{+10}-D_{-10})-2N(\sin\alpha+\sin\alpha_3)]\\ &=\tfrac{1}{8000}[D_{+10}-D_{-10}-2N(\sin\alpha+\sin\alpha_3)]\end{aligned}\right\}\quad\text{(XI)}$$

Man hat nun (da $\varDelta\eta_{0\,.\,\pm3}=0$):

Linie 8B, Lage 1:

$$\varDelta\eta_{0\,.\,0}=-\tfrac{1}{2}\{[b'_{0\,.\,+30}]+[b'_{0\,.\,-30}]-2b\}\quad\text{(XII)}$$

und setzt man dann:

Linie 8A:

$$L_r=b'_r-b-d'_r+d$$

Linie 8B:

$$P=N(\sin\alpha-\sin\alpha_3)=\tfrac{1}{6}(a'_{-30}-a'_{+30}+c'_{+30}-c'_{-30})\quad\text{(XIII)}$$

so ergeben sich:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\eta_{3\,.\,0} &= \varDelta\eta_{0\,.\,0}+\tfrac{1}{2}(L_{+30}-3P)\\ \varDelta\eta_{2\,.\,0} &= \varDelta\eta_{0\,.\,0}+\tfrac{1}{2}(L_{+20}-2P)\\ \varDelta\eta_{1\,.\,0} &= \varDelta\eta_{0\,.\,0}+\tfrac{1}{2}(L_{+10}-P)\\ \varDelta\eta_{-1\,.\,0} &= \varDelta\eta_{0\,.\,0}+\tfrac{1}{2}(L_{-10}+P)\\ \varDelta\eta_{-2\,.\,0} &= \varDelta\eta_{0\,.\,0}+\tfrac{1}{2}(L_{-20}+2P)\\ \varDelta\eta_{-3\,.\,0} &= \varDelta\eta_{0\,.\,0}+\tfrac{1}{2}(L_{-30}+3P)\end{aligned}\right\}\quad\text{(XIV)}$$

Man braucht auch:

$$\left.\begin{aligned} \textit{Linie 8B:} \quad N(\sin\alpha + \sin\alpha_2) &= \tfrac{1}{6}(C_{-30} - C_{+30}) \\ &= \tfrac{1}{4}(C_{-20} - C_{+20}) \\ &= \tfrac{1}{2}(C_{-10} - C_{+10}) \end{aligned}\right\} \quad \text{(XV)}$$

welche in Verbindung mit (V) den Winkel α giebt.

Hiermit sind die Formeln gegeben, welche zur Bestimmung der Fehler des Messapparats und derjenigen Fehler der Linien $8A$ und $8B$ des Gitters, welche gegen diese Linien senkrecht sind, dienen. Um die übrigen Fehler des Gitters zu bestimmen, berechnet man:

$$\textit{Linie 8B}, \text{ Lage 1:} \qquad N = \tfrac{1}{6}\{[b'_{0\,.\,+30}] - [b'_{0\,.\,-30}]\} \qquad \text{(XVI)}$$

und wendet dann die Formeln an:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{Längs einer A-Linie:} \\ &\Delta\xi_{n\,.\,m} = \Delta\xi_{0\,.\,m} + [a'_{10n\,.\,10m}] - [a'_{0\,.\,10m}] - \\ &- 2(a'_{10n\,.\,10m} - a'_{0\,.\,10m})\sin^2\tfrac{1}{2}\psi_0 - nN + 2nN\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{a'b'}{R} \\ &\textit{Längs einer B-Linie:} \\ &\Delta\eta_{n\,.\,m} = \Delta\eta_{n\,.\,0} + [b'_{10n\,.\,10m}] - [b'_{10n\,.\,0}] - \\ &- mN + 2mN\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \end{aligned}\right\} \text{(XVII)}$$

Im letzten Gliede der Gleichung für $\Delta\xi_{n\,.\,m}$ sind der Kürze wegen a' statt $a'_{10n\,.\,10m}$ und b' statt $b'_{10n\,.\,10m}$ geschrieben.

Den obigen Formeln gemäss ist es nun erforderlich zu kennen:

in der Lage 1 die Einstellungen $a'_{\pm r}$ und $b'_{0\,.\,10m}$ der Linie $8B$ mit sowohl der x- wie der y-Schraube, $a'_{10n\,.\,0}$ und $b'_{\pm r}$ der Linie $8A$ auch mit beiden Schrauben, $a'_{10n\,.\,10m}$ der A-Linien mit der x-Schraube und $b'_{10n\,.\,10m}$ der B-Linien mit der y-Schraube;

in der Lage 2 die Einstellungen $a''_{\pm r}$ der Linie $8B$ mit der x-Schraube;

in der Lage 3 die Einstellungen $c'_{\pm r}$ der Linie $8B$ mit der x-Schraube und die Einstellungen $d'_{\pm r}$ der Linie $8A$ mit der y-Schraube.

Die Formeln, welche zur Ausführung der numerischen Rechnung dienen, sind mit römischen Ziffern numerirt.

§ 3. Messungen und numerische Werthe.

a. *Untersuchung der Schrauben.*

Um die fortschreitenden und periodischen Fehler der Schrauben zu bestimmen habe ich zwei Glasscalen angewandt, von denen jede zwei parallele Striche hatte, die eine in einem Abstande von nahe vier Schraubenumdrehungen, die andere in einem Abstande von nahe $\frac{1}{4}$ einer Schraubenumdrehung. Der eine Strich der längeren Scala wurde auf jeden Halbmillimeterstrich der beiden zu den Schrauben gehörenden Scalen eingestellt und der entsprechende Abstand wurde fünf Mal gemessen. Ich erhielt in dieser Weise vier Reihen, von denen dann die mittleren Werthe berechnet wurden. Nennt man f_r die Correction wegen des fortschreitenden Fehlers, in Theilen der Schraubentrommeln ausgedrückt, welche der directen Ablesung beizufügen ist, so ergaben sich also:

Mittl. Werth	*Für die x-Schraube.*	Mittl. Werth	*Für die y-Schraube.*
von $f_{25} - f_{28}$ =	+ 0.59	von $f_{26} - f_{29}$ =	+ 1.10
29 — 32	+ 0.50	30 — 33	+ 0.85
33 — 36	+ 0.49	34 — 37	+ 0.84
37 — 40	+ 0.27	38 — 41	+ 0.70
41 — 44	+ 0.19	42 — 45	+ 0.99
45 — 48	+ 0.19	46 — 49	+ 0.85
49 — 52	0.00	50 — 53	+ 0.73
53 — 56	— 0.12	54 — 57	+ 0.55
57 — 60	— 0.16	58 — 61	+ 0.27
61 — 64	— 0.13	62 — 65	+ 0.15
65 — 68	— 0.14	66 — 69	+ 0.12
69 — 72	— 0.13	70 — 73	— 0.02
73 — 76	— 0.10	74 — 77	+ 0.04
77 — 80	— 0.09	78 — 81	— 0.05
81 — 84	— 0.09	82 — 85	— 0.12
85 — 88	— 0.06	86 — 89	— 0.20
89 — 92	— 0.17	90 — 93	— 0.27
93 — 96	— 0.10	94 — 97	— 0.17

Mittl. Werth	*Für die x-Schraube.*
von $f_{97} - f_{100}$ =	— 0.07
101 — 104	— 0.07
105 — 108	+ 0.05
109 — 112	0.00
113 — 116	— 0.07
117 — 120	— 0.20
121 — 124	— 0.24
125 — 128	— 0.32
129 — 132	— 0.52
133 — 136	— 0.66
137 — 140	— 0.75
141 — 144	— 0.75

Mittl. Werth	*Für die y-Schraube.*
von $f_{98} - f_{101}$ =	— 0.12
102 — 105	— 0.07
106 — 109	— 0.01
110 — 113	+ 0.12
114 — 117	+ 0.20
118 — 121	+ 0.13
122 — 125	+ 0.03
126 — 129	+ 0.07
130 — 133	— 0.07
134 — 137	— 0.12
138 — 141	— 0.06
142 — 145	— 0.16
146 — 149	— 0.20
150 — 153	— 0.35
154 — 157	— 0.39
158 — 161	— 0.56
162 — 165	— 0.57
166 — 169	— 0.66
170 — 173	— 0.72
174 — 177	— 0.85

Unter f_r verstehe ich die Correction für x oder $y = r$ Halbmm. der Scala. Mittelst der obigen Werthe der Fehler wurden Curven gezogen, aus welchen die endgültigen Fehler abgeleitet wurden, welche in den Tafeln I und II angegeben sind.

Die obigen Messungen gaben für den Abstand zwischen den Scalenstrichen:

in Theilen der x-Schraubentrommel: 797.764,
» » y- » : 797.472.

Mit Hülfe dieser Zahlen wurde die Tafel III berechnet, welche die Reductionen der x-Schraubenablesungen auf die y-Schraube giebt.

Die kürzere Glasscala wurde dazu angewandt, die periodischen Fehler der Schrauben zu bestimmen. Der eine Strich

wurde auf 8 symmetrische Stellen der Schraubentrommeln [1]) eingestellt und die entsprechenden Abstände wurden 5 Mal gemessen. Dieses wurde an 6 verschiedenen Stellen einer Jeden der x- und y-Schrauben ausgeführt. Mittelst der Formeln, welche für 8 symmetrische Punkte gelten:

$$
\begin{aligned}
8a_1 \sin \tfrac{1}{2}f &= \quad \Sigma(w' - w - f) \sin(u + \tfrac{1}{2}f) \\
8b_1 \sin \tfrac{1}{2}f &= - \Sigma(w' - w - f) \cos(u + \tfrac{1}{2}f) \\
8a_2 \sin f &= \quad \Sigma(w' - w - f) \sin(2u + f) \\
8b_2 \sin f &= - \Sigma(w' - w - f) \cos(2u + f)
\end{aligned}
$$

(vergl. BRÜNNOW: »Sphärische Astronomie» S. 445) wurden die numerischen Ausdrücke berechnet:

y-Schraube: $\varphi_r =$

$$= -0.062 + 0.037 \cos u + 0.100 \sin u + 0.025 \cos 2u + 0.014 \sin 2u$$

x-Schraube: $\varphi_r =$

$$= +0.478 - 0.492 \cos u - 0.206 \sin u + 0.014 \cos 2u - 0.014 \sin 2u$$

$$\left(u = \frac{r}{200} \cdot 360^\circ\right).$$

φ_r sind in Theilen der Trommeln ausgedrückt und sollen der directen Ablesung unmittelbar hinzugefügt werden; r ist die Ablesung der Trommel. Mittelst der obigen trigonometrischen Ausdrücke wurden die Tafeln IV und V berechnet.

b. *Bestimmung der Fehler des Messapparats.*

Dieser Bestimmung wegen wurde das Gitter auf 12 Platten copirt und diese Platten wurden nach der am Ende des § 2 angegebenen Methode ausgemessen. Ich erhielt das Resultat:

---

[1]) 0, 25, 50, 75, 100 ... 175 Theile der Trommel.

$\frac{1}{R'}$ (Formeln III).

Platte.	Aus $C_{\pm 20}$ und $C_{\pm 30}$.	$C_{\pm 10}$ und $C_{\pm 20}$.	C_0 und $C_{\pm 10}$.
1	— 0.00000 130	+ 0.0000 0413	— 0.0000 0450
2	+ 550	— 1217	+ 0300
3	— 440	+ 0200	— 0220
4	+ 765	— 1008	+ 3275
5	+ 170	— 0558	+ 1325
6	+ 185	— 0633	— 2950
7	— 080	— 0250	— 3600
8	+ 410	— 0625	— 5475
9	— 135	— 0633	— 0100
10	+ 230	— 0883	— 4900
11	— 220	— 0233	— 4325
12	+ 435	— 0175	— 8050
Mittl. Werth:	+ 0.00000 145	— 0.0000 0467	— 0.0000 2098

$\frac{1}{R}$ (Formeln IX).

Platte.	Aus $D_{\pm 20}$ und $D_{\pm 30}$.	$D_{\pm 10}$ und $D_{\pm 20}$.	D_0 und $D_{\pm 10}$.
1	+ 0.00000 460	+ 0.00000 120	+ 0.0000 4600
2	—	+ 075	+ 6625
3	— 325	— 775	+ 4950
4	— 190	+ 150	+ 1175
5	— 310	+ 775	— 1625
6	— 255	+ 192	— 0425
7	+ 255	+ 442	— 0775
8	+ 345	+ 517	— 1725
9	— 240	+ 175	+ 0525
10	+ 715	— 358	— 0150
11	— 130	— 925	+ 1675
12	+ 370	— 792	+ 2975
Mittl. Werth:	+ 0.00000 058	— 0.00000 034	+ 0.0000 1485

ψ_0 (Formeln XI).

Platte.	Aus $D_{\pm 20}$ und $D_{\pm 30}$.	$D_{\pm 10}$ und $D_{\pm 20}$.	$D_{\pm 10}$.
1	—1′ 29″	—2′ 23″	—2′ 37″
2	—	—	—2 51
3	—2 37	—1 2	—3 22
4	—2 23	—0 58	—3 6
5	—2 58	—1 38.5	—2 13.5
6	—2 17	—1 37	—2 5
7	—2 6	—2 26	—2 5
8	—2 35	—1 23	—2 5
9	—2 20	—2 4	—2 43
10	—1 47	—1 47	—2 15
11	—2 17	—2 2	—2 20
12	—2 3	—2 6	—2 15
Mittl. Werth:	—2′ 15″.6	—1′ 46″.0	—2′ 29″.8

Die Formeln (III) und (IX) zeigen, dass den obigen drei mittleren Werthen von $\frac{1}{R'}$ und $\frac{1}{R}$ die Gewichter 5, 3, 1 succ. beizulegen sind, den drei Werthen von ψ_0 dagegen dasselbe Gewicht. Mit Rücksicht darauf erhielt ich die folgenden, schliesslichen Werthe:

$$\frac{1}{R'} = -0.00000\,308\,; \quad \frac{1}{R} = +0.00000\,186\,; \quad \psi_0 = -2'\,10''.5$$

Mittelst der zwei ersten Werthe und mit Hülfe der Formeln (9), (10), (IV) und (X) wurden die Tafeln VI und VII berechnet, welche die Fehler $\varDelta x$ und $\varDelta y$, in Theilen der Schraubentrommeln ausgedrückt, geben, und mittelst des Werthes von ψ_0 die Tafel (VIII), welche die Grösse $(a' - a) \sin \psi_0$, auch in Theilen der Schraubentrommeln ausgedrückt, giebt. Es wird vorausgesetzt, dass die Platte so gut orientirt ist, dass $a \sin \psi_0$ vernachlässigt werden kann. In Folge der Kleinheit der Fehler

Δx und Δy kann man immer die projicirte Ablesung der directen gleich setzen und $\cos\psi_0 = 1$, wenigstens innerhalb der Grenzen dieser Messungen, eines centralen Quadrates von 6 Halbcm. Seite. Für die übrigen in den Gleichungen (13) vorkommenden Fehlerglieder sind die Tafeln IX, X und XI aufgestellt. Auch hier wird vorausgesetzt, dass die Platte so gut orientirt ist, dass $\frac{bb'}{R'}$, $\frac{ab'}{R}$ und $\frac{aa'}{R}$ vernachlässigt werden können.

c. *Bestimmung der Fehler des Gitters.*

Diese Bestimmung wurde mit Hülfe von 11 Platten ausgeführt (eine wurde ausgeschlossen). Als mittlere Werthe ergaben sich (in Theilen der Schraubentrommeln ausgedrückt):

Für die Linie 8B (Formeln VI):

$$\Delta\xi_{0\,.\,3} = 0\,;\ \Delta\xi_{0\,.\,2} = +0.10\,;\ \Delta\xi_{0\,.\,1} = +0.31\,;\ \Delta\xi_{0\,.\,0} = +0.59\,;$$
$$\Delta\xi_{0\,.\,-1} = +0.90\,;\ \Delta\xi_{0\,.\,-2} = -0.25\,;\ \Delta\xi_{0\,.\,-3} = 0\,.$$

Für die Linie 8A (Formeln XII und XIV):

$$\Delta\eta_{3\,.\,0} = +0.77\,;\ \Delta\eta_{2\,.\,0} = +0.51\,;\ \Delta\eta_{1\,.\,0} = -0.34\,;\ \Delta\eta_{0\,.\,0} = -0.40\,;$$
$$\Delta\eta_{-1\,.\,0} = -0.08\,;\ \Delta\eta_{-2\,.\,0} = -0.34\,;\ \Delta\eta_{-3\,.\,0} = -0.48\,.$$

Hiernach erhielt ich (Formel XVI):

$N = 2001.382$ Theilen der y-Schraubentrommel.

Nach den Formeln (XVII) fand ich ferner:

Für die Linie 5B:

	$m = +3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
$\Delta\eta_{-3\,.\,m} =$	-0.49	-0.30	-0.16	-0.48	-0.94	-0.91	-0.78

8B:

$\Delta\eta_{0\,.\,m} =$	0.00	-0.38	$+0.22$	-0.40	-0.25	-0.11	0.00

11B:

$\Delta\eta_{3\,.\,m} =$	$+0.35$	$+0.55$	$+0.86$	$+0.77$	$+0.45$	$+0.46$	$+0.62$

Für die Linie 5A:

	$n = +3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
$\Delta\xi_{n.-3} =$	+ 0.79	+ 0.40	+ 0.33	0.00	— 0.19	— 0.76	— 1.33

8A:

$\Delta\xi_{n.0} =$	+ 0.64	+ 0.22	+ 0.36	+ 0.59	— 0.58	— 0.50	— 1.67

11A:

$\Delta\xi_{n.+3} =$	— 0.14	+ 0.09	— 0.74	0.00	— 1.30	— 1.69	— 2.12

Die Linien, welche zwischen diesen liegen, habe ich nicht direct gemessen, sondern habe gesetzt (Formeln XVII):

Für die B-Linien:

$$w = b'_{10n.10m} - b'_{10n.0} - mN = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$$

Für die A-Linien:

$$v = a'_{10n.10m} - a'_{0.10m} - nN - \frac{a'b'}{R} = b_0 + b_1 m + b_2 m^2$$

und mittelst dieser die fehlenden w und v interpolirt. Die Coefficienten a und b wurden aus den obigen Linien bestimmt.

Ich fand

Für die B-Linien:

	$m = +3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
a_0	+ 0.40	+ 0.02	+ 0.62	0.00	+ 0.15	+ 0.29	+ 0.45
a_1	— 0.068	— 0.067	— 0.038	0.00	+ 0.023	+ 0.020	+ 0.025
a_2	— 0.068	— 0.004	— 0.046	0.00	— 0.060	— 0.073	— 0.075

Für die A-Linien:

	$n = +3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
b_0	+ 0.05	— 0.37	— 0.23	0.00	— 1.17	— 1.09	— 2.26
b_1	— 0.155	— 0.052	— 0.178	0.00	— 0.185	— 0.155	— 0.132
b_2	+ 0.031	+ 0.068	+ 0.003	0.00	+ 0.047	— 0.015	+ 0.059

Hieraus ergaben sich folgende interpolirte Werthe, mit den oben gefundenen zusammengestellt,

Für die B-Linien:

	$m=+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
$5B: \Delta\eta_{-3\,.\,m} =$	-0.49	-0.30	-0.16	-0.48	-0.94	-0.91	-0.78
$6B: \Delta\eta_{-2\,.\,m} =$	-0.07	-0.21	$+0.18$	-0.34	-0.48	-0.38	-0.24
$7B: \Delta\eta_{-1\,.\,m} =$	$+0.32$	0.00	$+0.53$	-0.08	-0.01	$+0.12$	$+0.27$
$8B: \Delta\eta_{0\,.\,m} =$	0.00	-0.38	$+0.22$	-0.40	-0.25	-0.11	0.00
$9B: \Delta\eta_{+1\,.\,m} =$	-0.08	-0.39	$+0.20$	-0.34	-0.23	-0.10	$+0.06$
$10B: \Delta\eta_{+2\,.\,m} =$	$+0.50$	$+0.38$	$+0.87$	$+0.51$	$+0.47$	$+0.55$	$+0.71$
$11B: \Delta\eta_{+3\,.\,m} =$	$+0.35$	$+0.55$	$+0.86$	$+0.77$	$+0.45$	$+0.46$	$+0.62$

Für die A-Linien:

	$n=+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
$5A: \Delta\xi_{n\,.\,-3} =$	$+0.79$	$+0.40$	$+0.33$	0.00	-0.19	-0.76	-1.33
$6A: \Delta\xi_{n\,.\,-2} =$	$+0.23$	-0.25	-0.11	-0.25	-0.86	-1.09	-2.01
$7A: \Delta\xi_{n\,.\,-1} =$	$+1.14$	$+0.65$	$+0.85$	$+0.90$	-0.04	-0.05	-1.17
$8A: \Delta\xi_{n\,.\,0} =$	$+0.64$	$+0.22$	$+0.36$	$+0.59$	-0.58	-0.50	-1.67
$9A: \Delta\xi_{n\,.\,+1} =$	$+0.24$	-0.04	-0.10	$+0.31$	-1.00	-0.95	-2.02
$10A: \Delta\xi_{n\,.\,+2} =$	-0.04	-0.10	-0.48	$+0.10$	-1.25	-1.36	-2.18
$11A: \Delta\xi_{n\,.\,+3} =$	-0.14	$+0.09$	-0.74	0.00	-1.30	-1.69	-2.12

Die bedeutenden Beträge der Coefficienten a_1 und a_2 sind der Richtigkeit der Hypothese von Herrn Prof. A. DONNER zuwider, dass die Krümmungen aller parallelen Linien des Gitters dieselben sind. Auch zeigen die gefundenen Werthe, dass, wenn man nach dem Vorschlage des Herrn H. JACOBY [1]) die Krümmungen der Linien mittelst Interpolationen aus den Krümmungen einer mittleren Linie und der Endlinien finden will, eine lineare Interpolation nicht zureichend ist. Es kann sogar in Frage gestellt werden, ob die obigen, mittelst parabolischer

[1]) Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft, 1895, 1 und 2 Heft, S. 107.

Interpolation gefundenen Fehler hinlänglich genau sind, und ob man nicht, um sicher zu gehen, auch dieselben mittelst directer Messung bestimmen muss.

§ 4. Tafeln der Fehler des Messapparats.

Seien A und B zwei Punkte der Platte, deren Coordinatendifferenzen, auf die x- und y-Axen bezogen, gesucht werden, so sind nach (13):

$$x_A - x_B = a' - a + \frac{b'(b' - b)}{R'} - \frac{b'(a' - a)}{R} + \varDelta x_B - \varDelta x_A$$

$$y_A - y_B = b' - b - (a' - a) \sin \psi_b + \frac{a'(a' - a)}{R} + \varDelta y_B - \varDelta y_A \,.$$

Wird nun angenommen, dass A das Centrum der Platte (der Punkt $8A \times 8B$) ist, und dass die Platte gut orientirt ist, so sind a und b kleine Grössen und man kann also $\frac{bb'}{R'}$, $\frac{ab'}{R}$, $a \sin \psi_b$, $\frac{aa'}{R}$ vernachlässigen. Man findet also:

$$x_A - x_B = a' - a + \frac{b'^2}{R'} - \frac{a'b'}{R} + \varDelta x_B - \varDelta x_0$$

$$y_A - y_B = b' - b - a' \sin \psi_0 + \frac{a'^2}{R} + \varDelta y_B - \varDelta y_0 \,.$$

Hier sind a, a', b, b' die von den Fehlern der Schrauben schon befreiten Ablesungen. Nennt man die directen Ablesungen α und β und bezeichnet man im folgenden mit der Nummer einer Tafel die in derselben angegebene Verbesserung, so sind:

$$a = \alpha + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{V}$$
$$b = \beta + \mathrm{I} + \mathrm{IV} \,.$$

Ferner sind:

$$x_A - x_B = a' - a + \mathrm{IX} - \mathrm{X} + \mathrm{VI}_B - \mathrm{VI}_0$$
$$y_A - y_B = b' - b - \mathrm{VIII} + \mathrm{XI} + \mathrm{VII}_B - \mathrm{VII}_0 \,.$$

Alle Verbesserungen sind in Theilen der Schraubentrommeln ($= \frac{1}{400}$ mm.) ausgedrückt.

Tafel I. *Fortschreitende Fehler der y-Schraube.*

f_{26} =	+ 0.93	f_{65} =	+ 0.16	f_{95} =	— 0.22	f_{125} =	+ 0.07	f_{155} =	— 0.41
27	0.93	66	0.13	96	0.21	126	0.06	156	0.43
⋮	⋮	67	0.10	97	0.19	127	0.04	157	0.46
38	0.93	68	+ 0.07	98	— 0.17	128	+ 0.03	158	— 0.48
39	0.92	69	0.05	99	0.16	129	+ 0.02	159	0.50
40	+ 0.92	70	0.03	100	0.14	130	0.00	160	0.52
41	+ 0.91	71	+ 0.02	101	— 0.13	131	— 0.02	161	— 0.54
42	0.89	72	+ 0.01	102	0.12	132	0.03	162	0.56
43	0.87	73	0.00	103	0.10	133	0.04	163	0.58
44	+ 0.86	74	— 0.01	104	— 0.07	134	— 0.06	164	— 0.60
45	0.85	75	0.02	105	0.05	135	0.07	165	0.62
46	0.84	76	0.02	106	— 0.02	136	0.08	166	0.64
47	+ 0.83	77	— 0.03	107	+ 0.02	137	— 0.10	167	— 0.65
48	0.80	78	0.04	108	0.05	138	0.12	168	0.67
49	0.78	79	0.05	109	0.07	139	0.13	169	0.69
50	+ 0.75	80	— 0.06	110	+ 0.10	140	— 0.14	170	— 0.71
51	0.72	81	0.07	111	0.13	141	0.15	171	0.73
52	0.69	82	0.09	112	0.15	142	0.16	172	0.75
53	+ 0.66	83	— 0.11	113	+ 0.16	143	— 0.17	173	— 0.77
54	0.63	84	0.13	114	0.17	144	0.18	174	0.78
55	0.60	85	0.15	115	0.17	145	0.20	175	0.80
56	+ 0.55	86	— 0.17	116	+ 0.17	146	— 0.23		
57	0.50	87	0.20	117	0.17	147	0.24		
58	0.45	88	0.22	118	0.17	148	0.26		
59	+ 0.40	89	— 0.23	119	+ 0.16	149	— 0.27		
60	0.35	90	0.24	120	0.15	150	0.29		
61	0.30	91	0.24	121	0.14	151	0.31		
62	+ 0.27	92	— 0.24	122	+ 0.13	152	— 0.34		
63	0.23	93	0.24	123	0.12	153	0.36		
64	0.19	94	0.23	124	0.10	154	0.38		

Tafel II. *Fortschreitende Fehler der x-Schraube.*

f_{25} =	+ 0.56	f_{49} =	+ 0.03	f_{73} =	— 0.12	f_{97} =	— 0.09	f_{121} =	— 0.23
26	0.56	50	0.00	74	0.11	98	0.08	122	0.26
27	0.56	51	— 0.02	75	0.10	99	0.07	123	0.28
28	+ 0.56	52	— 0.04	76	— 0.10	100	— 0.07	124	— 0.30
29	0.56	53	0.07	77	0.09	101	0.06	125	0.33
30	0.56	54	0.09	78	0.09	102	0.06	126	0.36
31	+ 0.54	55	— 0.12	79	— 0.09	103	— 0.06	127	— 0.38
32	0.52	56	0.13	80	0.09	104	0.05	128	0.41
33	0.49	57	0.14	81	0.09	105	0.04	129	0.44
34	+ 0.47	58	— 0.15	82	— 0.09	106	— 0.03	130	— 0.47
35	0.45	59	0.16	83	0.10	107	0.02	131	0.50
36	0.43	60	0.16	84	0.10	108	— 0.01	132	0.54
37	+ 0.39	61	— 0.16	85	— 0.10	109	0.00	133	— 0.57
38	0.36	62	0.16	86	0.10	110	0.00	134	0.60
39	0.34	63	0.16	87	0.10	111	— 0.01	135	0.64
40	+ 0.30	64	— 0.16	88	— 0.11	112	— 0.02	136	— 0.67
41	0.27	65	0.16	89	0.11	113	0.04	137	0.70
42	0.24	66	0.15	90	0.11	114	0.05	138	0.73
43	+ 0.20	67	— 0.15	91	— 0.11	115	— 0.07	139	— 0.75
44	0.17	68	0.14	92	0.11	116	0.10	140	0.76
45	0.14	69	0.14	93	0.11	117	0.12	141	0.77
46	+ 0.11	70	— 0.13	94	— 0.10	118	— 0.14	142	— 0.78
47	0.07	71	0.13	95	0.10	119	0.17	143	0.79
48	0.05	72	0.13	96	0.09	120	0.20	144	0.80

Tafel III. *Reduction der x-Schraube auf die y-Schraube.*

ψ_{40} =	+ 0.73	ψ_{58} =	— 0.59	ψ_{76} =	— 1.90	ψ_{94} =	— 3.22	ψ_{112} =	— 4.53
41	0.66	59	0.66	77	1.97	95	3.30	113	4.61
42	0.59	60	0.73	78	2.05	96	3.37	114	4.68
43	+ 0.51	61	— 0.80	79	— 2.12	97	— 3.44	115	— 4.76
44	0.44	62	0.87	80	2.20	98	3.52	116	4.83
45	0.36	63	0.95	81	2.27	99	3.59	117	4.90
46	+ 0.29	64	— 1.03	82	— 2.34	100	— 3.66	118	— 4.98
47	0.22	65	1.10	83	2.42	101	3.73	119	5.05
48	0.15	66	1.17	84	2.49	102	3.80	120	5.12
49	+ 0.07	67	— 1.25	85	— 2.57	103	— 3.88		
50	0.00	68	1.32	86	2.64	104	3.95		
51	— 0.07	69	1.39	87	2.71	105	4.03		
52	— 0.15	70	— 1.46	88	— 2.79	106	— 4.10		
53	0.22	71	1.53	89	2.86	107	4.17		
54	0.29	72	1.60	90	2.93	108	4.25		
55	— 0.37	73	— 1.68	91	— 3.00	109	— 4.32		
56	0.44	74	1.75	92	3.07	110	4.39		
57	0.51	75	1.83	93	3.15	111	4.46		

Tafel IV. *Periodische Fehler der y-Schraube.*

(φ_r ist die Correction für die Ablesung r der Trommel.)

φ_0 =	0.00	φ_{50} =	+ 0.01	φ_{100} =	— 0.08	φ_{150} =	— 0.19
5	+ 0.02	55	+ 0.01	105	0.10	155	0.18
10	0.03	60	0.00	110	0.11	160	0.17
15	0.04	65	— 0.01	115	0.12	165	0.15
20	+ 0.04	70	— 0.02	120	— 0.13	170	— 0.13
25	+ 0.05	75	— 0.03	125	— 0.14	175	— 0.11
30	0.05	80	0.04	130	0.16	180	0.09
35	0.04	85	0.04	135	0.17	185	0.07
40	0.03	90	0.05	140	0.18	190	0.05
45	+ 0.02	95	— 0.06	145	— 0.19	195	— 0.02

Tafel V. *Periodische Fehler der x-Schraube.*

φ_0 =	0.00	φ_{50} =	+ 0.27	φ_{100} =	+ 0.97	φ_{150} =	+ 0.68
5	— 0.03	55	0.37	105	1.00	155	0.59
10	0.05	60	0.46	110	1.01	160	0.52
15	0.05	65	0.54	115	1.01	165	0.44
20	— 0.04	70	+ 0.62	120	+ 0.99	170	+ 0.36
25	— 0.02	75	+ 0.69	125	+ 0.97	175	+ 0.29
30	+ 0.01	80	0.77	130	0.93	180	0.21
35	0.06	85	0.84	135	0.87	185	0.15
40	0.12	90	0.89	140	0.81	190	0.10
45	+ 0.19	95	+ 0.93	145	+ 0.75	195	+ 0.05

Tafel VI. Δx. (*Die y-Schraube*).
(Δx_r ist der Fehler für $y = r$ Halbmm.)

Δx_0 =	— 0.28	Δx_{12} =	— 0.23	Δx_{25} =	— 0.08
2	0.28	15	0.21	27	0.05
5	0.27	17	0.18	30	0.00
7	0.26	20	0.15		
10	— 0.25	22	— 0.12		

Tafel VII. Δy. (*Die x-Schraube*).
(Δy_r ist der Fehler für $x = r$ Halbmm.)

Δy_0 =	+ 0.17	Δy_{12} =	+ 0.14	Δy_{25} =	+ 0.05
2	0.17	15	0.13	27	0.03
5	0.16	17	0.11	30	0.00
7	0.16	20	0.09		
10	+ 0.15	22	+ 0.07		

Tafel VIII. $a' \sin \psi_0$ ($\psi_0 = -2' 10''.5$).

a' in Halbmm.	$a' \sin \psi_0$	a' in Halbmm.	$a' \sin \psi_0$	a' in Halbmm.	$a' \sin \psi_0$
0	0.00	10	— 1.27	20	— 2.53
1	— 0.13	11	1.40	21	2.66
2	0.25	12	1.52	22	2.79
3	0.38	13	1.65	23	2.91
4	— 0.51	14	— 1.78	24	— 3.04
5	— 0.63	15	— 1.90	25	— 3.16
6	0.76	16	2.03	26	3.29
7	0.89	17	2.15	27	3.41
8	1.02	18	2.28	28	3.54
9	— 1.14	19	— 2.41	29	— 3.67

Tafel IX. $\frac{b'^2}{R'}$.

(Die Ablesung der y-Schraube ist $100 + b'$ in Halbmm.)

b' in Halbmm.	$\frac{b'^2}{R'}$	b' in Halbmm.	$\frac{b'^2}{R'}$	b' in Halbmm.	$\frac{b'^2}{R'}$
0	0.00	10	— 0.06	20	— 0.25
1	0.00	11	0.07	21	0.27
2	0.00	12	0.09	22	0.30
3	— 0.01	13	0.10	23	0.33
4	— 0.01	14	— 0.12	24	— 0.36
5	— 0.02	15	— 0.14	25	— 0.39
6	0.02	16	0.16	26	0.42
7	0.03	17	0.18	27	0.45
8	0.04	18	0.20	28	0.48
9	— 0.05	19	— 0.22	29	— 0.52

Tafel X. $\frac{a'b'}{R}$.

(a' und b' in Halbmm., die Ablesung der x-Schraube 80 + a').

a' =	+ 5	+ 10	+ 15	+ 20	+ 25	+ 30
b' = + 5	+ 0.01	+ 0.02	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.05	+ 0.06
+ 10	+ 0.02	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.11
+ 15	+ 0.03	+ 0.06	+ 0.08	+ 0.11	+ 0.14	+ 0.17
+ 20	+ 0.04	+ 0.07	+ 0.11	+ 0.15	+ 0.19	+ 0.22
+ 25	+ 0.05	+ 0.09	+ 0.14	+ 0.19	+ 0.23	+ 0.28
+ 30	+ 0.06	+ 0.11	+ 0.17	+ 0.22	+ 0.28	+ 0.33

Tafel XI. $\frac{a'^2}{R}$.

a' in Halbmm.	$\frac{a'^2}{R}$	a' in Halbmm.	$\frac{a'^2}{R}$	a' in Halbmm.	$\frac{a'^2}{R}$
0	0.00	10	+ 0.04	20	+ 0.15
1	0.00	11	0.04	21	0.17
2	0.00	12	0.05	22	0.18
3	0.00	13	0.06	23	0.20
4	+ 0.01	14	+ 0.07	24	+ 0.21
5	+ 0.01	15	+ 0.08	25	+ 0.23
6	0.01	16	0.10	26	0.25
7	0.02	17	0.11	27	0.27
8	0.02	18	0.12	28	0.29
9	+ 0.03	19	+ 0.13	29	+ 0.31

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 4.)

Bonn. *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande.*
Verhandlungen. Jahrg. 54 (1897): H. 1. 8:o.
— *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Sitzungsberichte. 1897: H. 1. 8:o.
— *K. Sternwarte.*
Veröffentlichungen. N:o 2. 1897. 4:o.
Bordeaux. *Société Linnéenne.*
Actes. Vol. 50. 1896. 8:o.
Braunschweig. *Verein für Naturwissenschaft.*
Jahresbericht. 10 (1895/96—1896/97). 8:o.
Bremen. *Meteorologisches Observatorium.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahrg. 7 (1896). 4:o.
Breslau. *Verein für schlesische Insektenkunde.*
Zeitschrift für Entomologie. N. F. H. 22. 1897. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 34 (1897): N:o 9—11. 8:o.
— *Société Belge de microscopie.*
Annales. T. 22: Fasc. 1. 1897. 8:o.
— *Observatoire R. de Belgique.*
Observations météorologiques d'Uccle. 1894: 11—12; 1895: 1—3. 4:o.
Buenos Aires. *Oficina meteorológica Argentina.*
Anales. T. 10. 1896. 4:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Verslag. Jaar 1896. 8:o.
Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Bulletin. (4) Vol. 10 (1896); (5) Vol. 1 (1897): Fasc. 1. 8:o.
Calcutta. *Geological survey of India.*
Records. Vol. 30 (1897): P. 4. 8:o.
Cambridge. *University Library.*
CAYLEY, A., The collected mathematical papers. Vol. 13. 1897. 4:o.
Cambridge, U. S. A. *Museum of comparative zoology.*
Annual report. Year 1896/97. 8:o.
Memoirs. Vol. 23: N:o 1. 1897. 4:o.
— *Astronomical observatory of Haward College.*
Annual report. 52 (1896/97). 8:o.
Annals. Vol. 30: P. 4. 1896. 4:o.
Cape Town. *Meteorological commission.*
BUCHAN, A., A discussion of the rainfall of South Africa, 1885—94. Fol.
— *Royal observatory.*
Independent day-numbers for the year 1898. 8:o.

(Forts å sid. 64.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 1.
Stockholm.

Om individbildningen hos släktet Mentha samt om hybriden Mentha aquatica L. × arvensis L., dess utbredning i Sverige och systematiska begränsning.

Af TYCHO VESTERGREN.

(Meddeladt den 12 Januari 1898 genom TH. M. FRIES).

I det följande vill jag först beskrifva åtskilliga *Mentha*-former, som jag hösten 1897 funnit på Gotland och hvilka jag både på grund af dessa formers karakterer och förekomstsätt måste anse direkt hafva uppkommit genom korsning mellan *Mentha aquatica v. capitata* och *M. arvensis*. Den nämnda bastarden påträffades i början af september i Bro socken på icke mindre än 5 olika lokaler. Hvad som betydligt underlättade studiet af den samma var den omständigheten, att i nämnda trakt, där jag gjorde mina iakttagelser, såväl *M. aquatica* som *M. arvensis* — oafsedt den växlande behåringen och andra rent lokala modifikationer — föga varierade, ehuru dessa arter på lämpliga lokaler förekommo ganska ymnigt. Af *M. aquatica* förekom endast formen *α capitata* FR. De högväxta, bredbladiga former af *M. aquatica*, som i vårt land f. n. gå under namn af *β subspicata* FR. och *γ verticillata* FR. och hvilka ofta genom sin storlek och sitt frodiga växtsätt öfverträffa formen *capitata*, saknades fullkomligt. De äro för öfrigt sällsynta på Gotland och böra enligt mitt förmenande på intet vis förväxlas med den ofvannämnda hybriden.

Denna senare växer med förkärlek på nyodlad fuktig mark, speciellt myrmark, där *M. aquatica α capitata* (som jag i det följande för korthetens skull vill beteckna *M. capitata*) ännu kvarlefver i dikena och dit *M. arvensis* inkommit bland kulturväxterna. I mitt herbarium har jag bland exemplar af *M. arvensis* påträffat ett individ af ifrågavarande *M. capitata* × *arvensis*, insamladt i Bro redan 1890. Med godt hopp om framgång företog jag en exkursion till den vidsträckta, nyligen utdikade Martebo myr för att eftersöka den nämnda hybriden, och jag lyckades äfven finna den därstädes på flera ställen i närheten af Skäggs i Västkinde. *Mentha capitata* × *arvensis* synes således icke vara någon sällsynthet på Gotland, alldenstund jag påträffat den på snart sagdt alla undersökta lokaler, där den kunde förekomma, d. v. s. där ståndorten var sådan, att stamarterna växte i hvarandras närhet. Men så har växten också i sina talrika, kraftiga utlöpare förträffliga resurser i kampen för tillvaron, så att af ett enda individ snart uppkommer ett helt bestånd. På lokalerna uppträder också därför *M. capitata* × *arvensis* vanligen rikligt, stundom ymnigare än stamarterna.

Hybridens intermediära karakterer falla lätt i ögonen, och det så mycket mer som den oftast växer intimt blandad med stamarterna. Från *M. capitata* skiljes den lätt redan på afstånd genom blomknippenas kranslika ställning i bladvecken (mera sällan bilda dessutom de öfversta ett hufvud i stjälkens topp), från *M. arvensis* skiljes den genom spetsigare foderflikar och håriga blomskaft, från bägge stamformerna på grund af den intermediära bladformen samt nästan fullständig sterilitet både hvad pollen och frukter beträffar.

Jag har redan nämnt, att stamarterna på det af mig i ifrågavarande hänseende undersökta tämligen begränsade området varierade föga. Hybriden däremot förekom — såsom förhållandet plägar vara med hybrider — i åtskilliga former, hvilka dock utan svårighet kunna hänföras till en och samma gemensamma hufvudtyp, hvars plats är emellan de bägge stamarterna,

ehuru den för öfrigt svänger som en pendel mellan dessa, så att en vacker variationsserie föreligger från former, som mest likna *M. aquatica*, till sådana, som mera likna *M. arvensis*. Då dessa hybrida former ständigt synas vara fullkomligt sexuellt impotenta, måste de alla anses vara af primär uppkomst; genom den kraftiga vegetativa förökningen ha de mycket lätt att bibehålla sig.

M. aquatica × *arvensis* har, ehuru icke såsom hybrid betraktad, på flere sätt blifvit uppmärksammad af svenska botanister, och framför allt är den klart uppfattad af F. ARESCHOUG, som i Skånes Flora, 2 uppl. (1881) beskrifvit densamma från Gudmundstorp i Skåne under namn af *M. aquatica *hybrida*. Ett med den gotländska hybriden öfverensstämmande autentiskt exemplar från denna lokal finnes i Upsala botaniska museum, bland hvars storartade samling af *Mentha*-former jag dessutom påträffat exemplar af hybriden från åtskilliga lokaler på Öland, Gotland och i Skåne. Dessa tillhöra troligen alla kombinationen *capitata* × *arvensis;* åtminstone gäller detta om de gotländska exemplaren. De hithörande formerna synas ha förorsakat rätt mycket bekymmer och ha på många sätt blifvit kommenterade på etiketterna samt gå dessutom under sådana namn som *M. aquatica f. subsativa* FR., *M. acutifolia* SM., *M. *supina* LÖNNR. Särskildt torde böra framhållas, att *M. sativa* auctt. suec. *till någon del* synes ha utgjort denna hybrid.

I mellersta Europa, där flere botanici ägnat släktet *Mentha* ett ifrigt studium, är kombinationen *M. aquatica* × *arvensis* sedan länge bekant, men tages där f. n. allmänt i en enligt min åsikt alltför vidsträckt omfattning. Med *M. aquatica* förstås endast formen *α capitata;* till hybriden däremot föras alla de ofvan nämnda verticillata formerna af *M. aquatica*, som ofta ej synas mig ha något annat gemensamt med *M. arvensis* än blommornas skenbara kransställning i bladvecken. Såsom synonym till hybriden sättas bl. a. *M. verticillata* L. och *M. sativa* L.

Denna uppfattning har motiverats af F. MOEWES [1]) 1883, som stöder sin åsikt om, att alla de nämnda verticillata *aquatica*-formerna äro af hybridt ursprung och tillhöra kombinationen *capitata* × *arvensis*, framför allt på den omständigheten, att de allesamman äro sterila. Denna hans uppfattning af de nämnda formerna synes utan undantag ha biträdts af senare monografer J. BRIQUET, H. BRAUN m. fl.

Jag har däremot i trots af nämnda faktum, som ju i allmänhet utgör ett godt kriterium på en växts hybrida natur, kommit till en helt olika uppfattning af dessa former. Enligt min åsikt är inom släktet *Mentha* såväl pollenets som frukternas degeneration endast af underordnad betydelse vid afgörandet af en forms hybriditet. Nämnda omständighet äger visserligen betydelse så till vida, att hos en hybrid *Mentha* väl alltid det fruktifikativa systemet är satt ur funktion, men å andra sidan finnas, såsom jag i det följande vill visa, äfven sterila arter och former, hvilka det oaktadt icke kunna anses äga hybridt ursprung, och till denna kategori höra enligt min uppfattning de former, som jag sammanfattar under benämningen *de verticillata aquatica-formerna*, samt dessutom *M. gentilis*, *M. piperita* m. fl.

Orsaken till dessa Menthors apogami synes mig kunna sökas på tvenne olika håll: 1) framför allt i den inom detta släkte liksom hos en mängd andra labiater rådande polygamien, som yttrar sig i förekomsten af dels hermafrodita blommor, dels rena honblommor (gynodioeci), 2) i Menthornas starka vegetativa individbildning.

Gynodioecien hos släktet *Mentha* (för att nu enbart hålla mig till detta) synes nämligen bero på *en fortgående reduktion af dithörande formers könliga individbildningsförmåga, hvilken reduktion, såsom redan skett med t. ex. M. gentilis, kan fortgå*

---

[1]) FRANZ MOEWES, Ueber Bastarde von *Mentha arvensis* und *Mentha aquatica*, sowie die sexuellen Eigenschaften hybrider und gynodiöcischer Pflanzen. Englers Jahrbücher, bd. IV (1883) pag. 190—216.

ända till fullständig sterilitet. Denna reduktion synes hufvudsakligen träffa ståndarna, och en hel serie af olika grader i ståndarnas kontabescens är påvisbar hos vissa *Menthæ*, kanske tydligast hos *M. arvensis*, såsom jag i det följande vill visa. Så länge tillgången på potent pollen, oaktadt ståndarnas kontabescens hos vissa individ (honindividen), är tillräcklig för artens behof, såsom f. n. hos *M. arvensis*, synes gynodioecien åtminstone för vissa växter, t. ex. *Thymus serpyllum*, enligt hvad DARWIN visat, rent af vara fördelaktig, i det honindividen äro fruktbarare än de hermafrodita; detta kan bero på att hos honplantorna mindre kraft behöfver förbrukas på ståndarnes utbildning och att dessutom hos dessa pollination mellan blommor tillhörande samma individ är utesluten, hvilken säkerligen hos ifrågavarande för allogami afpassade växter skulle verka försvagande. Men om å andra sidan, såsom hos ofvannämnda *Menthæ*, ståndarnas reduktion fortgår så långt, att pollenbrist inträder eller rent af potent pollen ej vidare utbildas, blir följden tvärtom den, att växten blir steril.

Då i honblommorna nästan alltid finnas mer eller mindre desorganiserade, funktionslösa ståndarrudiment, måste följaktligen gynodioecien hos släktet *Mentha* och öfriga gynodioika labiater betraktas som en sekundär företeelse. Det synes mig som om man hos denna grupp af närbesläktade växter måste antaga *en af obekant orsak förefintlig inhärent benägenhet eller tendens att reducera det hanliga elementet* och att man häri ytterst har att söka den förnämsta orsaken till de ifrågavarande Menthornas apogami.

Den andra faktorn, som synes mig hafva medverkat till och påskyndat apogamiens inträdande hos dessa *Menthæ* (bland hvilka jag för att underlätta den kommande framställningen vill utvälja *M. gentilis* såsom ett tydligt exempel på en apogam *Mentha*-art) är den starka vegetativa individbildningen. Genom denna har det slag af autogami befrämjats, som består i pollination mellan blommor härstammande från ett och samma frö, vare sig dessa blommor tillhöra en och samma planta eller

tvenne skilda plantor, af hvilka då åtminstone den ena på vegetativ väg isolerats från det ursprungliga fröindividet.

Autogamien synes mig nämligen kunna uppdelas i tvenne olika grader: 1) autogami *sensu strictiore*, då pollinationen försiggår inom en och samma blomma, 2) heteranth autogami eller heterautogami, då pollinationen försiggår mellan tvenne blommor, tillhörande samma morfologiska individ eller tvenne, morfologiskt sedt, skilda individ, hvilka, i samklang med den vegetativa individbildningens natur, kunna anses tillhöra hvad jag vill kalla samma *fysiologiska kollektivindivid.*

Ursprungligen ha de numer apogama, icke hybrida Menthorna ägt såväl könlig som vegetativ individbildning. Men den senare kan tänkas ha försiggått säkrare och hastigare än den förra, och därigenom har pollination mellan olika fysiologiska individ blifvit försvårad, hvad jag ofvan kallat *heterautogami* däremot befrämjad. Menthorna äro tillpassade för allogami, och autogami *sensu strictiore* äro hos dem förebygd genom proterandri. Det antagandet ligger nära till hands — så mycket mer som flera analoga fall äro kända inom växtriket — att heterautogamien inom samma fysiologiska kollektivindivid haft en ogynnsam inverkan på fruktsättningen och att därigenom apogamiens inträdande blifvit påskyndad och befrämjad.

Man kan till och med förmoda, att liksom en liflig korrelation råder mellan kronan och ståndarna i en *Mentha*-blomma, i det kronan aftager i storlek allt efter graden af ståndarnas abort, äfven i viss mån en korrelation skulle vara tänkbar mellan gynæciet och ståndarna och att sålunda den på den starka vegetativa individbildningen beroende heterautogamien skulle verka befrämjande och påskyndande på den tendens att reducera ståndarna, som redan i och för sig måste antagas hos Menthorna liksom hos en mängd andra till familjen *Labiatæ* hörande växter, vare sig de äga en vegetativ individbildning eller icke.

Bedömandet af en *Menthas* hybriditet är sålunda försvårad genom apogamien hos former och arter, som icke kunna anses

äga hybridt ursprung. Andra skäl, som jag vill framhålla i det följande, synas mig vara tillräckliga för att jag måste anse de former, som jag här nedan vill beskrifva under namn af *M. capitata* × *arvensis*, vara primära korsningsprodukter.

Efter denna orienterande inledning vill jag öfvergå till en noggrannare beskrifning af hybriden *M. capitata* × *arvensis*, sådan jag funnit densamma, samt därefter lemna en redogörelse för gynodioecien och i samband med denna stående förhållanden hos *M. arvensis*, *aquatica*, *capitata* × *arvensis*, *gentilis* m. fl.; på grundvalen häraf vill jag därpå närmare söka utveckla mina åsikter om orsakerna till apogamien hos de *Menthor*, där denna inträdt, hvarvid jag särskildt kommer att uppehålla mig vid *M. gentilis* såsom typ, samt vill till sist framställa min uppfattning om hybriden *M. aquatica* × *arvensis*' systematiska begränsning.

Mentha aquatica L. α capitata Fr. × arvensis L.

Stammen med långa, kraftiga, rikligt förgrenade utlöpare från rhizomets öfre nodi. Stjälken antingen enkel eller grenig med långa vegetativt-florala grenar i synnerhet från de nedre bladvecken ss. hos *M. arvensis* eller nedtill ogrenad med sidoskott endast från stjälkens öfre delar ss. ofta hos *M. capitata*.

Bladpar ss. hos *M. arvensis* ända till 20, flera än hos *M. capitata*, som har omkring 10. Bladen till storlek och form intermediära med på skaftet mer eller mindre bredt nedlöpande skifva ss. hos *M. arvensis*, äggrunda — äggrundt ovala med basen mer eller mindre vigglikt utdragen som hos *M. arvensis*, men tvärare än hos denna; bladtänder glesare än hos *M. aquatica*, ofta endast omkring 5 i hvarje bladhälft ss. hos *M. arvensis*. De nedre bladen mer rundade som hos *M. aquatica*, stundom nästan cirkelrunda.

Blomknippen i bladvecken, stundom dessutom hufvudlikt samlade i stjälkens topp, antingen bildande några få kransar i

de öfre bladvecken eller sittande i ända till 17 kransar utefter den långt utdragna, ogrenade öfre delen af hufvudskottet samt dessutom på sidogrenarna. Det i hvardera af de tvenne motsatta bladvecken sittande knippet är vanligen tydligt skaftadt, men stundom som hos *M. arvensis* nästan oskaftadt. Blommorna äro i genomsnitt färre i hvarje knippe än hos *M. arvensis*. Blomskaften tämligen tätt håriga af nedåt riktade styfva hår som hos *M. aquatica*. Fodertänder spetsiga som hos *M. aquatica*, fast med bredare bas, stundom äfven något trubbigare. Kronans färg är än lila med dragning åt rosa som hos *M. capitata*, än lila med dragning åt blått eller violett som vanligen hos *M. arvensis*. Pollen 95—100 % odugligt; de abnorma pollenkornen äro antingen hopfallna, vanligen med elliptisk omkrets eller rundade som de normala, men betydligt mindre än dessa samt mycket plasmafattiga. Frukt nästan fullständigt felslagen: endast ett par gånger har en af de 4 delfrukterna befunnits utbildad.

Utbredning: *Gotland*, Bro socken flerstädes (1890, 1897); Västkinde i Martebo myr vid Skäggs (1897); Lummelundsbruk (C. HARTMAN 1842; LÖNNROTH 1853); Lauters på Fårön (J. E. ZETTERSTEDT 1867); Hangvars socken vid Träskmyr (LÖNNROTH 1853); »in aqua prati ad portum Kyllej» (P. C. AFZELIUS 1841); vid en bäck vid vägen mellan Klinte kyrka och hamnen (K. J. & M. LÖNNROTH 1879).

Öland: Löth (Herb. WAHLENBERG, »missa a cl. FRIES 1819»); Runsten (AHLQUIST 1828); Glömminge socken, Lökenäs (J. G. SEGRELL 1846).

Skåne, Gudmundstorp (F. ARESCHOUG sept. 1880); Kullen vid Vattenmölla (FR. BJÖRNSTRÖM 1854); Billinge (ANDERSSON 1847).

Västergötland, Göteborg (Herb. E. FRIES). *Hisingen* (C. J. LINDEBERG; herb. E. FRIES). —

Mentha capitata × *arvensis* är så polymorf, att den sällan på tvenne skilda lokaler är fullkomligt lika. Liksom stamarterna varierar denna bastard betydligt till storlek, förgrening och hårighet: från 1,5 till 6 dm. höjd, från enkel till mycket rikt förgrenad; hvad hårigheten beträffar rätter den sig efter stamarterna på lokalen, så att tillsamman med en glabrescent form af *M. aquatica* eller *M. arvensis* blir också hybriden mindre hårig o. s. v.

Viktigare är dock hvad jag redan nämnt, att hybriden i fråga om den relativa likheten med stamarterna svänger som en pendel emellan dem, så att därigenom en serie af former uppstått från sådana, som i karakterer stå nära *M. arvensis*, till sådana, som närmast likna *M. aquatica*. Dessa mer eller mindre utpräglade former eller modifikationer få dock icke tänkas stå i något omedelbart genetiskt samband med hvarandra, utan de måste, alldenstund de äro fullkomligt sterila, anses hvar för sig hafva uppstått genom direkt korsning mellan stamarterna och ha utvecklat sig ur frö från endera af dessa, hvarefter de uppehålla sin tillvaro genom vegetativ förökning.

Inom den nämnda variationsserien kan man med förbigående af mer intermediära former urskilja grupperna *subaquatica* och *subarvensis*, som i sina extrema former äro väl skilda. Då en närmare kunskap om dessa former eller formgrupper kan vara af vikt för ett rätt uppfattande af hybriden i fråga, vill jag lämna en kort jämförande beskrifning på dem.

Mentha aquatica *α* **capitata** × **arvensis**

f. *subaquatica.*	f. *subarvensis.*
Blad, stjälk och foder ofta rödaktigt anlupna.	Färgen mer rent grön.
Stjälk upprät med kortare, rent vegetativa eller mer sällan blombärande grenar från stjälkens öfre region.	Stjälk ofta något nedliggande och böjd med tämligen långa, vegetativt-florala grenar mest från stjälkens nedre del.
Bladpar färre, vanligen 10—15.	Bladparen flere, högst 20.

Bladen äggrundt ovala eller nästan äggrunda med mer tvärt afrundad bas och smalt nedlöpande skifva med talrikare (vanl. 7—8) tänder i hvarje bladhalfva.	Bladen af mer rent oval form, med utdraget vigglik bas och mer bredt nedlöpande skifva samt färre (vanl. 4—6) tänder i hvarje bladhalfva.
Blomkransar färre (2—5), mer sällan blommor äfven i stjälkens topp.	Blommor i flere, ända till 17 kransar, aldrig i stjälkens topp.

I närheten af Bro kyrka på Gotland har jag iakttagit på nyss blottad myrmark bland massor af *M. capitata* × *arvensis* åtskilliga individ af en egendomlig form med starkt uppblåst blomfoder, som jag vill beskrifva sålunda:

M. capitata × *arvensis* f. *inflata*. —

Hela örten mörkt purpurfärgad; blomskaftet förlängdt, fodret stort, uppblåst, kruklikt vidgadt, dubbelt längre än kronan och döljande denna, som är af blåaktig lilafärg, liten och fatlik med mycket kort, knappt 1 mm. lång pip (hos hufvudformen ung. 3 mm.) och 4 sterila, oskaftade ståndarknappar i kronans botten.

Det starkt vidgade blomfodret i förening med den ovanliga färgen ger örtståndet en mycket egendomlig habitus.

Denna form är säkerligen blott en anomali och dess egendomligheter ha tydligen af någon obekant orsak uppkommit hos ett enda individ under den ontogenetiska utvecklingen, hvilket individ sedermera reproducerats på rent vegetativ väg. Om formen ägde förmåga af könlig individbildning, skulle säkerligen de nämnda troligen rent individuella egendomligheterna saknas eller blifva försvagade och utspädda hos flertalet eller alla af de ur frön utvecklade plantorna. Som nu emellertid *f. inflata* är fullkomligt steril och endast förökar sig genom utlöpare och de på dylikt sätt uppkomna nya individen fysiologiskt taget endast äro isolerade delar af det ursprungliga individet, komma därför antagligen karaktererna att bibehålla sig oförändrade och

det hur länge som helst, såvida icke rent yttre förhållanden förorsaka växtens undergång. Därför skulle också formen *rent praktiskt taget* kunna anses konstant.

Blommans gynodioeci hos ifrågavarande växter kan väl vara förtjänt af ett särskildt kapitel.

Hos *Mentha arvensis* växlar blommans storlek betydligt, hvilket står i samband med den rådande polygamien. Ifrågavarande växt är — liksom flera andra labiater — dioikt polygam eller, för att begagna DARWINS terminologi, *gynodioik*, i det vissa individ äga tvåkönade blommor, andra däremot endast honblommor, hvilka senare dock äga reminiscenser af det hanliga elementet uti mer eller mindre desorganiserade, sexuellt impotenta ståndare. *M. arvensis* har i själfva verket *trimorfa* blommor, beroende på den olika graden af ståndarnas desorganisation eller *kontabescens*, som GÆRTNER kallat detta förhållande, och i anslutning härtill uppträder kronan i tre olika storlekar.

På individ med den största blomformen är kronan 5—6 mm. lång och ståndarknapparna utskjuta ur blomman på långa strängar. Pollenet är här väl utbildadt (90—100 % dugligt) och anthererna ha en purpurviolett färg. Andra individ hafva kronan något mindre (4—5 mm. lång), och ståndarknapparna, som äro något smärre än hos föregående form och af gulhvit färg, sitta på korta strängar i jämnhöjd med pipens öfre mynning, men pollenkornen äro här sterila och af samma beskaffenhet som hos hybriden *M. capitata* × *arvensis* (95—100 % oduga). Det tredje slaget har de minsta blommorna (3—4 mm. långa), och af ståndarna finnas endast små rudiment (staminodier utan antherer), hvilka t. o. m. kunna fullständigt saknas. Endast blommor af det först nämnda slaget kunna således stricte räknas som hermafrodita, de öfriga fungera endast såsom honblommor.

Dessa trenne former fann jag ungefär lika vanliga. Någon skarp gräns emellan dem kan icke uppdragas, enär öfvergångar stundom äfven kunna anträffas. I allmänhet finnes på samma individ endast ett slags blommor; dock har jag på några individ med blommor af den andra ofvan nämnda typen funnit blommorna i de öfre, senare och under mer ogynnsamma förhållanden utbildade kransarna mera liknande den tredje typen med staminodier utan antherer. I vissa blommor med utskjutande ståndare fann jag öfver hälften af pollenkornen sterila, i blommor tillhörande den andra typen hade contabescensen fortskridit så långt, att anthererna voro hopskrumpna utan att ha utvecklat något pollen. En serie af olika desorganisationsgrader hos ståndarne existerar således.

Mentha capitata har, så långt mina undersökningar räcka, endast ett slags blommor, nämligen hermafrodita med godt pollen och liknande den första typen hos *M. arvensis* med långt utskjutande ståndare. Individ med korta ståndarsträngar äro dock iakttagna. I Skånes Flora, [1]) som innehåller flera viktiga upplysningar i här berörda hänseenden, heter det nämligen om *M. capitata*: »Hithörande former hafva merendels långt utskjutande ståndare och likaledes utskjutande stift. Endast på skuggrikare ställen kunna hos denna formserie ståndarne stundom blifva inneslutna.» Enligt A. SCHULZ [2]) förekommer den feminina formen af *M. aquatica* sällsynt i Thüringen och äfven H. MÜLLER [3])

---

[1]) F. ARESCHOUG, Skånes Flora, 2:a uppl. Lund 1881.

[2]) A. SCHULZ, Beiträge zur Kenntniss der Bestäubungseinrichtungen und der Geschlechtsvertheilung bei den Pflanzen. Bibliotheca botanica h. 10. Cassel 1888. — Enl. denne forskare utgöra honindividen hos *M. aquatica* 5—15 % och hos *M. arvensis* 50 % eller därutöfver. Bägge arterna uppgifvas dessutom stundom vara gynomonoika.

[3]) H. MÜLLER, Befruchtung der Blumen, 1873. Cit. efter MOEWES op. cit.
Enligt F. MOEWES äro båda blomformerna af *M. capitata* omkring Potsdam ung. lika allmänna och honformen, som på afstånd kan igenkännas på de smärre blommorna, har ståndarna inneslutna, skrumpna och utan spår af pollen. — Om honformen af *M. arvensis* säger densamme: Die Staubfäden sind in der Corollenröhre eingeschlossen, ganz kurz filamentirt und haben braun gefärbte, verschrumpfte, aber deutlich in zwei hälften gesonderte Antheren.

uppgifver, att denna form förekommer, fast mycket sällsyntare än den hermafrodita.

Hvad hybriden *M. capitata* × *arvensis* angår, råder där samma förhållande som hos *M. arvensis*, fast skillnaden i kronans storlek hos de olika formerna ej synes vara fullt så utpräglad som hos den senare. I de allra flesta fall likna blommorna den andra typen af *M. arvensis* med korta ståndare och degenereradt pollen, mera sällan likna de den tredje typen utan spår af antherer, och blott på en lokal har jag funnit blommor med långa ståndare som hos *M. capitata*, men äfven här hade pollenet samma abnorma beskaffenhet, som hos den vanliga formen, hvilket synes bekräfta ifrågavarande *Menthas* hybrida karakter. På några individ af hybriden med korta ståndare funnos i de nedre blomkransarna utbildade antherer, hvaremot blommorna i de öfre, sist utvecklade kransarna icke hade förmått utbilda sådana.

Enligt såväl ARESCHOUGS uppgifter l. c. som mina egna iakttagelser tyckas både hos de verticillata formserierna af *M. aquatica* och hos *M. gentilis* endast finnas blommor med korta, inneslutna, mer eller mindre contabescenta ståndare. Hos de förstnämnda har jag på de exemplar, där anthererna voro utbildade, funnit lika odugligt pollen som hos den motsvarande formen af *M. arvensis* med inneslutna ståndare. På tvenne undersökta individ voro ståndarsträngarna längre än vanligt, så att de till det yttre normalt utvecklade anthererna nådde något utanför kronan, dock ej så långt som hos *M. capitata*; pollenet var äfven här sterilt.

Hos *M. gentilis* synes contabescensen ha fortskridit längre än hos någon annan här omtalad *Mentha*. Staminodierna sakna i de flesta fall fullständigt antherer, eller också finnas på sin höjd små rudiment af dylika, i hvilka jag dock aldrig påträffat något pollen.

Hvad *gynæciet* angår synes detta hos ofvan anförda former åtminstone till sin yttre gestalt vara fullkomligt normalt. Stiftet räcker långt ut ur blomman och märkesflikarna böja sig utåt på vanligt sätt.

Ställer man ofvan anförda fakta i relation till formernas relativa fertilitet, så skall man finna, att *M. capitata* och *M. arvensis*, hos hvilka blomformen med långa ståndare och godt pollen är hos den förstnämnda nästan ensam förekommande och hos den senare vanlig, i regeln utbilda rikligt med frukter, medan å andra sidan *M. gentilis*, de verticillata formerna af *M. aquatica* och *M. capitata* × *arvensis*, hvilka ha mer eller mindre desorganiserade, inneslutna ståndare utan pollen eller med dåligt sådant, förblifva sterila eller endast undantagsvis utbilda ett ringa fåtal frukter.

Uppgifter om dessa formers sterilitet finnas både i ARESCHOUGS och MOEWES' anförda arbeten. Den senare, som hänför alla verticillata *aquatica*-former just på grund af deras sterilitet till hybriden *M. capitata* × *arvensis*, uppvisar hos denna flera olika grader i ståndarnas desorganisation, af hvilka här är af vikt att anföra de tvenne minst omvandlade typerna. Utgående från den hermafrodita typen hos *M. aquatica*, där endast ett fåtal pollenkorn äro abnorma, säger han om de enligt hans förmenande till hybriden hörande formerna: »Der erste Schritt zur Desorganisation tritt nun da hervor, wo sich die Zahl der schlechten, nicht befruchtungsfähigen Körner bedeutend vermehrt hat, die der guten dagegen zurücktritt. — — — Auf einer weiteren Stufe findet man in dem Pollen gar keine oder nur noch einzelne gesunde Körner. Zuweilen sind dann auch die Filamente schon etwas verkürzt, auch die Farbe der Antheren ist häufig etwas blasser, sonst aber sind diese Staubgefässe nicht von den normalen zu unterschieden.» Inom den formgrupp, som jag här kallat de verticillata *aquatica*-formerna, finnas således typer med relativt föga omvandlade ståndare. Den andra af MOEWES omtalade blomformen stämmer väl med de af mig ofvan anförda individens med något utskjutande ståndare. Med det här anförda harmonierar rätt väl FOCKES [1]) yttrande: »*M. aquatica* L. × *arvensis* L. . . . Hieher *M. sativa* aut. (auch wohl L.), *M. verticillata* ROTH . . . Zwischenformen, welche

[1]) W. O. FOCKE, Die Pflanzenmischlinge (Berlin 1881) pag. 332.

M. aquatica und *M. arvensis* verbinden, treten oft wie selbständige Arten auf; *M. sativa* ist von BECKHAUS mit zahlreichen Früchten beobachtet.» Detta senare faktum förklaras af MOEWES som en sekundär företeelse, jämförlig med det förhållandet, att ur hybrider kunna uppkomma fröbeständiga raser; mig synes här endast föreligga en verticillat *aquatica*-form, där ännu ingen kontabescens inträdt, snarare än en hybrid.

MOEWES anför i en not (l. c. pag. 201) några för mig viktiga upplysningar: »Es sei hier bemerkt, dass auch alle von mir untersuchten (getrockneten) Exemplare der *M. gentilis* L. steril waren und »stamina inclusa» hatten. Doch will ich mich einer Äusserung über den Ursprung dieser bei Potsdam nicht vorkommende Pflanze enthalten, obgleich dieselbe in auffallender Weise die Charaktere der *M. aquatica* und *arvensis* in sich vereinigt. — Ferner habe ich sämmtliche Pflanzen von *M. piperita* L. in Berliner und Potsdamer Gärten mit lauter verkümmerten Staubfäden angetroffen. Auch von *M. crispa* L. [1]) besass kein einziges Exemplar im Kgl. Univ. Garten in Berlin gesunde Staubgefässe.»

En mer eller mindre långt framskriden degeneration af det hanliga elementet existerar således hos *M. capitata*, *M. arvensis*, den verticillata *aquatica*-gruppen, *M. gentilis*, *M. piperita* och *M. crispa*. De tvenne förstnämnda, där kontabescensen är minst och där allmänt normala ståndare förekomma, äro fertila, hos de återstående har kontabescensen fortskridit så långt, att normala ståndare saknas eller äro sällsynta, och dessa former äro också därför sterila. Isynnerhet hos *M. arvensis* och *M. aquatica formæ verticillatæ* är en tydlig serie af olika grader i ståndarnas abort påvisbar. Hos *M. gentilis* har kontabescensen fortskridit längst,

[1]) Namnet *M. crispa* L. har tilldelats krusbladiga varieteter af flera olika arter. H. BRAUN i sin monografi (Verh. der k. k. zool.-botan. Gesellschaft. Wien 1890) anför en mängd former med krusiga blad, tillhörande olika arter, hvilka former af vissa författare varit uppställda som själfständiga arter. *M. crispa* L. anses där tillhöra *M. aquatica*. — En i Upsala bot. trädgård under namn af *M. crispa* odlad form, som sistlidne sommar icke blommat, tillhör säkerligen *M. viridis* och torde vara identisk med den af H. BRAUN anförda *M. crispata* SCHRAD.

alldenstund den aldrig, såvidt jag kunnat finna, utbildar något pollen.

Hos den ofvan beskrifna hybriden *M. capitata* × *arvensis* är orsaken till steriliteten gifvetvis en annan, och denna har inträdt så att säga med ett slag, beroende på dess hybrida ursprung. Äfven de till det yttre fullt normala ståndarna hade här fullkomligt sterilt pollen.

Ståndarnes kontabescens och blommans därpå beroende gynodioeci och sterilitet försvårar i ej obetydlig grad en rätt uppfattning af Menthorna i systematiskt hänseende.

För att blott hålla mig till *Mentha gentilis* L., så utgör denna ett intressant exempel på en självständig art,[1]) som förlorat förmågan af individbildning på könlig väg i och med det hanliga elementets abort och i följd häraf ständigt är steril.[2]) Denna art är således enbart hänvisad till förökning på vegetativ väg.

Man måste antaga, att *M. gentilis* eller åtminstone den form, från hvilken denna utvecklat sig, ursprungligen ägt såväl vegetativ som sexuell individbildningsförmåga. Den måste anses

---

[1]) *M. gentilis* är enligt H. BRAUN l. c. af F. SCHULTZ uppställd som hybrid, *M. arvensis* × *viridis*. Detta synes mig vara orimligt åtminstone i fråga om hufvudformen af vår svenska *M. gentilis*. Däremot kan det möjligen äga något berättigande angående *M. gentilis v. glabrata* HN. (= *M. gentilis v. subspicata* ARESCH.), en form, som jag endast känner genom prässade exemplar. Än mindre afseende kan fästas vid MOEWES' ofvannämnda antydan om dess hybrida ursprung ur *M. aquatica* och *M. arvensis*. Man synes ha utgått från den härvidlag falska induktionen, att eftersom växten är steril, måste den vara hybrid, och sedan med ljus och lykta sökt efter föräldrar till densamma. — Andra t. ex. MALINVAUD (Bull. Soc. bot. France 1880 p. 349) uppfatta icke *M. gentilis* som hybrid. BRAUN är försiktig nog att öfverallt begagna uttrycket »Mittelformen oder Bastarden».

[2]) Härvidlag frånser jag den möjligheten, att vissa individ, hvilket jag dock aldrig funnit, skulle utbilda pollen och att något pollenkorn däribland skulle vara befruktningsdugligt. På en lokal (potatestäppa vid Stenstu i Bro, Gotland) voro några få delfrukter utvecklade, ehuru det torde vara tvifvelaktigt, om dessa voro i stånd att ge upphof till nya individ. Möjligheten af pollenöfverföring från andra Menthor torde väl ock böra tagas med i räkningen. — Jmf. LOEW, Blütenbiol. Floristik (1894) pag. 317.

en gång hafva ägt hermafrodita, fortplantningsdugliga blommor, alldenstund mer eller mindre rudimentära, omvandlade ståndare finnas kvar och dessa numer funktionslösa organ omöjligen kunna anses under sin nuvarande gestalt vara af primär natur, utan fastmer måste anses utgöra en reduktion af könsdugliga ståndare. Hvad kan då orsaken vara, att *M. gentilis* från att ha ägt såväl vegetativ som könlig individbildningsförmåga förlorat denna senare för att exklusivt reproducera sig på vegetativ väg, och det tydligen med desto större liflighet som ej längre några krafter behöfva förbrukas i könsfortplantningens tjänst?

För det första torde den hos många labiater af någon obekant grund förefintliga benägenheten att reducera sina blommor genom ståndarnes kontabescens från hermafrodita till rena honblommor tagas med i räkningen. Denna reduktion har här gått så långt, att inga hermafrodita blommor återstå och således det hanliga elementet saknas hos växten, hvarigenom blomman hos denna växt blifvit ett funktionslöst organ. Till ofvannämnda moment vill jag återkomma utförligare i det följande, sedan jag först anfört ett annat, som kan tänkas hafva medverkat med detta.

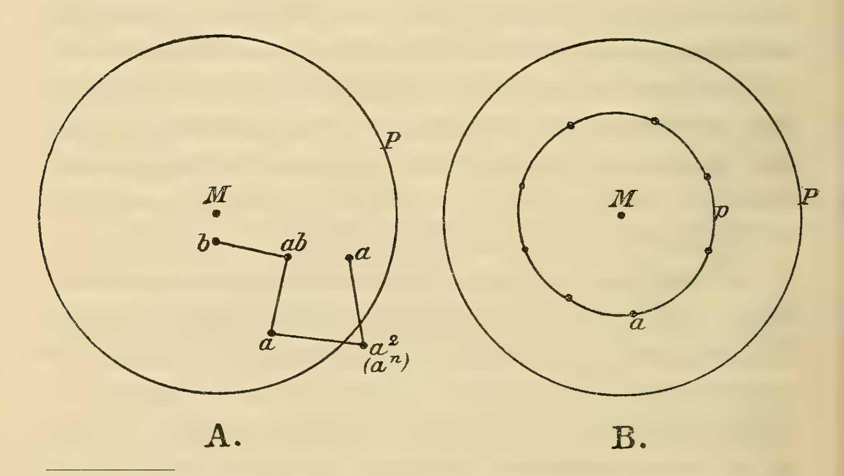
För det andra torde det nämligen ligga nära till hands att sätta försvinnandet af den könliga reproduktionsförmågan i någon slags relation till växtens stora vegetativa förökningsförmåga. Därvid är först af vikt att fasthålla en sträng »boskillnad» mellan vegetativ och könlig individbildning.

Då den sexuella individbildningen mera afser artens bestånd, afser däremot den vegetativa mest individets bestånd. Vid den förra äger i vanliga fall, om allogami är rådande, en sammansmältning rum mellan hanlig och honlig plasma från skilda individ. De tvenne skilda föräldraindividen kunna anses äga en större eller mindre kvalitativ fysiologisk, stundom äfven morfologisk åtskillnad. Det genom förening af substans från tvenne olika individ alstrade unga individet ärfver egenskaper från dem bägge, men är, jämfördt med föräldraindividen hvart för sig, äfven i någon mån kvalitativt olikt dessa. Nya individuella egenskaper kunna uppstå, medan andra egenskaper, som

föräldraindividen ägde, kunna saknas, och i detta förhållande ligga ju resurser för en transformerande verksamhet, som utmynnar i en fortsatt progressiv eller regressiv fylogenetisk utveckling.

Vid den vegetativa individbildningen däremot är dotterindividet i regeln i allo en tydlig upprepning af sitt moderindivid, ett organ eller en organkomplex, som frigjort sig från detta och på egen hand fortsätter sin utveckling i moderindividets riktning. En under ett individs ontogenes uppkommen afvikande egenskap kan, som bekant, genom individbildning på vegetativ väg allt fortfarande bibehållas *oförändrad*, äfven om den ej är fröbeständig. [1])

Vid den sexuella individbildningen ter sig saken mer kompliceradt. Därvid kan den afvikande egenskapen alldeles försvinna, hvarvid den icke är fröbeständig; i motsatt fall kan den antingen blifva *försvagad* eller *förstärkt*. Detta förhållande torde kunna förtydligas genom följande försök till en grafisk framställning däraf.



[1]) Härmed är dock ej sagdt, att förändring hos växten är utesluten i och med den vegetativa individbildningen. Den förmåga af ombildning, som tillkommer en planta i och för sig, som individ betraktad, såsom förmågan af själfreglering efter förändrade yttre faktorer (lokalvariation o. d.) samt s. k. knoppvariation, tillkommer naturligtvis äfven den på vegetativ väg alstrade plantan. Utesluten är ej heller i viss mån en regressiv transformism, såsom just härvidlag reduktionen af *M. gentilis*' generativa organ.

Cirkeln *A* föreställer omfånget för en viss art; artens typiska representanter böra placeras närmast medelpunkten *M*, de i någon mån afvikande däremot närmare periferien *P*. Om ett atypiskt individ *a* korsas med ett mera typiskt *b*, blir den hos *a* förefintliga egenskapen utspädd och försvagad hos det nya individet *ab*, och detta kommer sålunda att ligga närmare *M* än det afvikande individet *a*. Korsas däremot tvenne atypiska individ, som i sina afvikelser tendera åt samma håll, om *a* korsas med ett annat *a* på ungefär samma afstånd från *M*, äger afkomman a^2 den afvikande egenskapen i förstärkt grad och faller således längre från *M* och närmare *P* än de bägge föräldraindividen *a*, ja det kan slutligen, om utvecklingen fortsättes i den inslagna riktningen, gå därhän, att de till gruppen *a* hörande individen komma att stå utom omfånget för arten *A* och bilda ett nytt species, en ny konstant närstående art a^n. På denna väg kunna ursprungligen rent individuella egenskaper omvandlas till specifika.

Helt annorlunda är förhållandet vid den vegetativa individbildningen. Har hos ett fröindivid en eller flera individuella egenskaper under ontogenesen uppkommit, så bibehållas dessa vanligen oförändrade hos de från detta på vegetativ väg isolerade och vidare utvecklade sidodelarna (= vegetativt alstrade individen). I cirkeln *B* komma de från det atypiska fröindividet *a* vegetativt isolerade individen, hvilka bibehålla egenskaperna hos *a* oförändrade, att ständigt ligga på samma afstånd från *M* och *P* som *a* ursprungligen intog (utefter cirkellinjen *p*). Om nu af en eller annan orsak en dylik form blir sexuellt impotent, såsom den ofvan beskrifna *M. capitata* × *arvensis f. inflata*, så kan en sådan praktiskt taget anses konstant.

De olika resultaten af sexuell och vegetativ individbildning kunna särdeles tydligt iakttagas hos hybriden *M. capitata* × *arvensis:* på en viss lokal finnas massor af sinsemellan fullkomligt lika individ, tydligen uppkomna på vegetativ väg från en enda genom korsning af stamarterna ur frö utvecklad planta; på en annan lokal har en med den förra olik fröplanta kring

sig utvecklat ett bestånd af med denna andra fröplanta lika, men med den förra lokalens olika individ.

Man kan, fysiologiskt sedt, fatta den vegetativa förökningen så, att alla de från det ursprungliga fröindividet härstammande, på vegetativ väg bildade individen tillhöra ett och samma *fysiologiska kollektivindivid*, som måhända århundraden igenom alltjämt fortsatt att på vegetativ väg bilda sidoskott, som isoleras sinsemellan och från moderindividet.

Detta vill jag nu tillämpa på *M. gentilis*. Jag antog i det föregående, att *M. gentilis* ursprungligen ägde såväl sexuell som vegetativ individbildning. Då den vegetativa individbildningen hos denna växt är särdeles kraftig, så synes det ej oantagligt, att på en viss lokal den vegetativa reproduktionen kan ha försiggått lifligare och säkrare än den sexuella, så mycket mer som frönas groning och utveckling har kunnat blifva försvagad eller förhindrad på grund af ogynnsamma yttre omständigheter, hvilka däremot det vid upphörandet af sambandet med moderindividet redan kraftigt utvecklade vegetativa skottet förmått öfvervinna. Vidare är äfven att märka, att *M. gentilis* liksom *M. piperita* och *M. crispa* antagligen är en gammal kulturväxt och att därför genom människans åtgörande den vegetativa förökningen kunnat blifva befrämjad dels genom den rikliga näringen i trädgårdsjorden, hvarigenom som bekant många kulturväxters vegetativa system plägar tilltaga i frodighet under det blom- och fruktsättningen minskas, dels ock därigenom att — vare sig växten odlats som prydnadsväxt eller som kryddväxt — de blombärande skotten ofta kunnat blifva afplockade i förtid, hvarigenom fruktsättningen hindrats.

I samband med den numera uteslutande vegetativa individbildningen står måhända *M. gentilis*' förekomst på enstaka och från hvarandra isolerade lokaler, såsom i gamla trädgårdstäppor och på liknande ställen, där växten ger intryck af att vara gammal på platsen och att lefva kvar från en tid, då den synbarligen varit odlad. Spridning till en ny lokal utan människans åtgörande synes ej falla sig så lätt.

På grund af hvad ofvan anförts om den stora roll, som den vegetativa individbildningen redan tidigt synes ha spelat hos denna växt, är det antagligt, att vid befruktningen pollinationen ej så sällan försiggått mellan blommor tillhörande samma fysiologiska kollektivindivid, hvilket från individets, om också icke från den enskilda blommans synpunkt sedt kan betraktas som ett slags *autogami*.

Den autogama befruktningen synes mig kunna indelas i tvenne olika grader, allteftersom den betraktas från synpunkten af den enskilda blomman eller af växtindividet i sin helhet: i förra fallet eger pollinationen rum inom en och samma blomma (autogami *sensu strictiore*), i senare fallet mellan tvenne skilda blommor tillhörande samma individ, hvilket kunde kallas *heteranth autogami* eller med en kortare term *heterautogami*.

Men då individen hos växter med vegetativ individbildning kunna indelas i *morfologiska individ* (= *individ* eller *exemplar* enligt den deskriptiva botanikens terminologi) och *fysiologiska kollektivindivid*,[1]) kan man äfven indela *heterautogamien* i tvenne fall, allteftersom pollinationen försiggår mellan tvenne blommor, bägge tillhörande samma morfologiska individ eller mellan tvenne blommor, tillhörande tvenne skilda morfologiska individ, men på samma gång ett och samma fysiologiska kollektivindivid.

Nu är emellertid det faktum kändt, att det slag af pollination, som jag ofvan benämnt *heterautogami*, hos vissa växter

[1]) Hos en växt, som saknar vegetativ individbildning och enbart föröker sig på könlig väg, sammanfalla begreppen *morfologiskt individ* och *fysiologiskt individ;* om *fysiologiskt kollektivindivid* kan här ej blifva tal. Hos en växt med både könlig och vegetativ individbildning *kunna* dessa begrepp sammanfalla, när det gäller en ur frö utvecklad planta, som icke ännu på vegetativ väg bildat nya individ; har detta däremot inträffat, faller begreppet *morfologiskt individ* inom omfånget af begreppet *fysiologiskt kollektivindivid*, så att ett fysiologiskt kollektivindivid kan uppdelas i flere morfologiska individ. Hos en växt med enbart vegetativ individbildning är det sistnämnda alltid fallet.

Klart är att inom ett fysiologiskt kollektivindivid de äldsta morfologiska individen småningom bortdö, under det att nya sådana allt jämt bildas, så att ett successivt bortdöende i den ena polen är förenadt med ett (starkare) successivt tillväxande i den andra polen, i viss mån jämförligt med t. ex. förhållandet hos *Cuscutas* groddplantor eller med tillväxten af en *Vaucheria*-tråd.

i mer eller mindre grad visat sig förorsaka dålig frukt- och frösättning likaväl som autogamien inom samma blomma.

Här vill jag citera följande yttrande af W. O. FOCKE (Pflanzenmischlinge pag. 447): »Jetzt wissen wir, dass es Pflanzen gibt, die sich niemals durch Pollen derselben Blüthe, desselben Stocks oder anderer ursprünglich dem nämlichen Samen entsprossener Exemplare befruchten lassen. In andern Fällen ist eine derartige Befruchtung zwar möglich, aber schwierig und liefert eine schwächliche Nachkommenschaft, in noch andern ist sie dagegen die Regel. Dazwischen gibt es alle denkbaren Mittelstufen.»

Särskildt vill jag här nämna, att den ogynnsamma inverkan på fruktbarheten af heterautogami inom samma fysiologiska kollektivindivid är bekant i fråga om en del på vegetativ väg förökade varieteter af vissa kulturväxter. M. B. WAITE [1]) har påvisat, att hos päronvarieteter, som i kulturen alltjämt förökas på vegetativ väg och kunna anses härstamma från ett enda eller några få ursprungligen ur frön uppkomna individ, pollination utförd mellan blommor tillhörande en och samma varietet är overksam eller lämnar ett sämre resultat, än om pollenet öfverföres från en blomma tillhörande en annan päronvarietet. Någonting liknande är bekant (enligt hvad doc. T. HEDLUND meddelat mig) angående smultron- och jordgubbsorter, hvilka anses lämna den rikaste och bästa skörden, om tillfälle gifves till pollination mellan olika varieteter.

Klart är, att satsen om heterautogamiens ogynnsamma inverkan vid befruktningen icke kan generaliseras så, att den gäller i hvarje fall, lika litet som detta kan ske i fråga om autogami inom samma blomma, då ju växter finnas, som tvärtom äro tillpassade därför, men om blomman är afpassad för allogami såsom just inom släktet *Mentha*, där autogami *sensu strictiore* är förhindrad genom proterandri, synes ej det antagandet vara för djärft, att äfven det slag af autogami, som äger rum vid

[1]) M. B. WAITE, The pollination of pear flowers. U. S. Departm. of agriculture, division of vegetable pathology. Bulletin n:o 5. Washington 1894.

pollination mellan tvenne blommor inom samma fysiologiska individ, i viss mån skulle — fast måhända i mindre grad än det förra slaget — vara ofördelaktig för *M. gentilis* och verka minskad fruktsättning.

Då nu hos denna för allogami afpassade art den könliga individbildningen icke hållit jämna steg med den vegetativa, har pollinationen allt oftare måst försiggå mellan blommor tillhörande samma fysiologiska kollektivindivid, och i samma mån som fruktsättningen därigenom blifvit försämrad, har skillnaden i antalet mellan på könlig och vegetativ väg alstrade individ blifvit allt större, utsikterna för pollination mellan tvenne olika fysiologiska individ allt sämre, däraf åter är en naturlig följd, att steriliteten blifvit än större, hvilket förhållande slutligen — i samband med den supponerade inhärenta benägenheten för det hanliga könets reduktion — hos arten i sin helhet förorsakat total apogami.

I fråga om pistillen har jag redan anmärkt, att den till sitt yttre synes vara fullt normal. Dock torde härvidlag i analogi med den satsen, att organ, som mist sina funktioner, abortera eller åtminstone degenerera, ej det antagandet vara förhastadt, att ett försvagande af gynæciets sexuella potens redan inträdt eller åtminstone i en framtid kommer att inträda.

På grund af det ofvan anförda har jag således sökt visa, att den starka vegetativa individbildningen samverkat till apogamiens inträdande hos *M. gentilis* med den tendens att reducera andræciet, som i och för sig måste antagas hos nämnda art liksom hos en mängd andra labiater, vare sig de äga vegetativ förökning eller icke.

Den af den vegetativa individbildningen verkade autogamien skulle möjligen kunna anses tillräcklig att förklara växtens sterilitet, men knappast för att förklara ståndarnas abort. En sådan abort är ju bekant äfven hos labiater utan nämnvärd vegetativ individbildning. Men å andra sidan är det i och för sig ej otänkbart, att liksom ju faktiskt en liflig korrelation råder mellan kronan och ståndarna i en *Mentha*-blomma, i det kronan aftager i storlek alltefter graden af ståndarnas abort, fysiologiskt

sedt äfven en viss korrelation kunnat äga rum mellan det allt mindre funktionerande gynæciet och ståndarna, och att en dylik korrelation verkat påskyndande och befrämjande på den i och för sig på grund af andra orsaker försiggående reduktionen af andræciet.

Såsom redan förut framhållits, antager jag, att den måhända förnämsta orsaken till apogamiens uppkomst hos *M. gentilis* är att söka i den inom släktet *Mentha* liksom hos en mängd andra närstående släkten bekanta *gynodioecien;* då sexuellt funktionslösa staminodier finnas kvar i honblommorna, måste man antaga, att Menthorna ursprungligen ägt hermafrodita, sexuellt normala blommor; jag visade, att en serie af olika grader i ståndarnas kontabescens existerar, hvilket är tydligast iakttaget hos *M. arvensis* af mig och af MOEWES hos de verticillata *M. aquatica*-formerna. Därigenom har jag ledts till den förmodan, att man ifråga om Menthornas gynodioeci (för att uteslutande taga hänsyn till dessa) skulle kunna lämna ett visst berättigande åt följande sats, som jag vill hafva framhållit:

Gynodioecien hos ifrågavarande Menthæ synes innebära icke blott och bart en uppdelning af ursprungligen hermafrodita blommor i hermafrodita och rena honblommor, utan ock jämväl en i anslutning till det hanliga elementets successiva degenerering försiggående, stundom af andra, yttre faktorer befordrad och påskyndad reduktion af den sexuella individbildningsförmågan, hvilken reduktion kan fortgå ända till total apogami.

Apogamien har sålunda hos de ifrågavarande Menthorna icke inträdt med ett slag såsom fallet är hos hybrida former, utan först så småningom. Från att ursprungligen endast hermafrodita individ funnos, ha under tidernas lopp proportionsvis allt fler individ träffats af ståndarkontabescensen, och hos några, t. ex. *M. gentilis*, har det redan gått så långt, att alla individ träffats af densamma. Med detta förhållande står den olika graden af ståndarnas degenerering i det närmaste sammanhang.

Det synes ej omöjligt, att det öde, som redan träffat *M. gentilis*, i en framtid äfven skulle kunna vederfaras *M. arvensis*. Den påvisade serien af i olika hög grad kontabescenta ståndare synes peka därhän. Då blommornas i det föregående omtalade trenne hufvudtyper hos denna art synas vara ungefär lika vanliga, är sålunda för närvarande endast ungefär en tredjedel af samtliga individen pollenalstrande.

Så länge pollentillgången är tillräcklig, synes gynodioecien i vissa fall långt ifrån att innebära en minskning tvärtom förorsaka en ökning af fruktbarheten hos de rena honindividen. DARWIN[1]) har genom experiment visat, att hos *Thymus serpyllum* och *Satureja hortensis*[2]) honindividen kunna vara fruktbarare än de hermafrodita. Detta förhållande är ju ock lätt förklarligt, då den kraft, som eljes användes vid ståndarnas utveckling, i stället kan komma pistillen till godo och dessutom hos honplantorna försvagande autogami är utesluten. DARWIN antar därför också, att *ökad fruktbarhet* är den sannolika orsaken till gynodioecien.

Denna sats är emellertid redan före DARWIN uttalad af SCHELVER och HENSCHEL enligt GÆRTNER,[3]) som bekämpar densamma. GÆRTNER, som ju var en särdeles skicklig experimentator, uppvisade kontabescens hos ståndarna af många icke hybrida växter, särskildt åtskilliga *Caryophyllaceer*, iakttog därvid aldrig ökad fruktbarhet, men väl stundom minskad sådan eller sterilitet; i senare fallet kan ju kontabescensen hafva träffat äfven pistillen.

Saken tyckes således hos olika växter gestalta sig olika. Faktum är emellertid, att många labiater, inklusive släktet *Mentha*, vare sig de äga vegetativ individbildning eller icke,

---

[1]) CH. DARWIN, Die verschiedenen Blüthenformen an Pflanzen der nämlichen Art. Aus dem Englischen übersetzt von J. VICTOR CARUS; Stuttgart 1877; pag. 261—63.

[2]) Vid experimentet med denna art hade, då endast *ett* 2-könadt individ fanns, detta blifvit befruktadt med eget pollen, hvilket, som ock DARWIN anmärker, i detta fall kan ha förorsakat mindre god fruktsättning.

[3]) C. F. GÆRTNER, Versuche und Beobachtungen über die Befruchtungsorgane der vollkommeneren Gewächse etc. Pag. 122. Stuttgart 1844.

ursprungligen endast haft hermafrodita blommor, men att af någon obekant orsak kontabescensen inträdt hos ståndarna, hvilken synes så småningom utbreda sig och, åtminstone hos vissa arter, peka hän mot en fullständig reduktion af det hanliga könet, något som också hos flera arter redan inträffat.

En viss benägenhet för denna reduktion måste antagas hos dessa växter, och denna benägenhet synes verkligen vara inhärent, i synnerhet som en hel grupp af närbesläktade växter visar en sådan. Hvad den ursprungliga orsaken härtill kan vara, torde vara omöjligt att med säkerhet afgöra. Emellertid synes det mig, som om man härvidlag ej så mycket kan lämna rum åt en teleologisk uppfattning. Det må vara sant, att genom ståndarnas kontabescens åtminstone vissa växter, så länge pollenproduktionen oaktadt förminskningen är tillräcklig för artens behof, kunna ernå fördelen af såväl ökad fruktsättning som förhindrad autogami, men om reduktionen fortgår så långt, att förrådet af potent pollen blir otillräckligt för artens behof eller slutligen rent af fullständigt försvinner, såsom t. ex. hos *M. gentilis*, så är därmed betydligt skjutet öfver målet.

Darwin säger också (l. c. pag. 263), att det är omöjligt att afgöra, om ståndarna hos vissa individ af någon obekant orsak hade benägenhet att felslå och därigenom fröproduktionen blifvit rikligare eller om vissa individ producerade mer frö än vanligt och i följd däraf mindre pollen, och tillägger: »wenn aber die Neigung zur vermehrten Produktion von Samen beständig begünstigt wurde, so wird das Resultat in jedem Falle das vollständige Fehlschlagen der männlichen Organe sein».

Moewes (op. cit. pag. 208) vill i stället för Darwins »obekanta orsak» sätta ärftligheten och håller före »dass in der Vorzeit nicht nur innere, sondern auch äussere Einflüsse die zarten männlichen Organe gewisser Individuen afficirten und in der Entwicklung hemmten, und dass die so erworbene Eigenschaft auf die Nachkommen übertragen wurde».

Mig synes, att man härvidlag visserligen kan inrymma plats åt ärftligheten så till vida, att *benägenheten* för kontabescens är

ärftlig, men icke så, att alla ur frö från kontabescenta individ (honindivid) uppkomna plantor nödvändigt skulle i berörda hänseende likna moderplantan. Det är ju en allmän regel i naturen, att t. ex. hos diklina växter honindividen alstra både han- och honindivid, och i analogi härmed kan man därför också vänta, att honindivid i detta fall böra alstra både hermafrodita plantor och honplantor. Detta har också vid af GÆRTNER och DARWIN verkställd frösådd visat sig vara fallet.

En sak, som jag vill framhålla, är, att hos gynodioika arter — liksom hos heteroklina[1]) växter öfverhufvud (t. ex. släktet *Salix*), om för öfrigt sexuell frändskap finnes mellan arterna — utsikten för hybridbildning synes mig vara ökad: pollenproduktionen är åtminstone teoretiskt sedt minskad genom heteroklinien, ehuru den det oaktadt i många fall kan vara mer än tillräcklig för artens behof; genom densamma är vidare möjligheten till att pollenet kan komma från en främmande arts blomma ökad liksom ock därigenom konkurrensen minskas mellan den främmande artens pollen och den egna artens eller det egna individets pollen, hvilket senare ju plägar föredragas framför det förstnämnda, om bägge slagen finnas tillstädes.

Apogami förekommer således inom släktet *Mentha* icke blott hos hybrider, utan äfven hos de enligt min uppfattning icke hybrida *M. gentilis*, *M. aquatica* ff. *verticillatæ*, *M. piperita* m. fl. I det föregående har jag sökt visa, att apogamien hos *M. gentilis* långt ifrån att bero på hybriditet tvärtom äger sin grund i det hanliga könets successiva abort understödd af den på den starka vegetativa individbildningen beroende heterautogamien inom samma fysiologiska kollektivindivid. Det om *M. gentilis* förda resonnemanget gäller naturligtvis i hufvudsak äfven om de öfriga icke hybrida Menthorna.

---

[1]) Jag känner ej, om denna term förut är använd, men den synes mig vara lämplig som en sammanfattande benämning för *monoeci*, *dioeci* och *polygami* (inklusive *gynodioeci* och *androdioeci*), hvilken stundom synes vara af praktiska behof påkallad.

Alltefter sättet för apogamiens uppkomst inom detta släkte synes den mig därför kunna indelas i tvenne olika slag: 1) primär eller hybrid-apogami, som förekommer hos hybrida former, hvarest den är ursprunglig och har inträdt med ens; 2) sekundär eller art-apogami, som finnes hos *icke* hybrida former, hvarest den ursprungligen icke funnits, men inträdt så småningom.

Oaktadt icke inom släktet *Mentha* på grund af art-apogamien blommans (ståndarnas och pistillens) sterilitet kan tillmätas någon större betydelse såsom kriterium på en forms hybriditet, har jag dock i fråga om de i början af denna uppsats under namn af *M. capitata* × *arvensis* beskrifna formerna vid iakttagande af dessa i naturen af flera skäl kommit till det resultatet, att jag måste betrakta dem såsom korsningsprodukter och därtill, alldenstund formerna äro fullkomligt sexuellt impotenta, såsom primära sådana.

De bilda tillsammantagna en formkomplex, som på grund af sina intermediära karakterer har sin plats mellan *M. capitata* och *M. arvensis.* Under det att stamarterna inom det undersökta gebietet föga varierade, ehuru de förekommo ymnigt, varierade däremot hybriden till den grad, att en serie af former uppstått från sådana, som mest öfverensstämma med *M. capitata* till dem, som närmast likna *M. arvensis.* Hvar och en af dessa former synes ha uppstått för sig direkt genom korsning mellan stamarterna, och man igenkänner hos dem alla utan svårighet samma gemensamma hufvudkarakterer, oaktadt formerna på tvenne skilda lokaler sällan äro fullt lika. Att uppgöra en gemensam diagnos för *M. capitata* × *arvensis*' former, sådan denna hybrid uppfattas af mig, möter därför inga större svårigheter. En sådan svängning inom området *mellan* de bägge stamarterna, som utmärker *M. capitata* × *arvensis*, är just kännetecknande för en hybrid. Om därtill lägges ofvannämnda faktum, att stamarterna på det undersökta området öfverallt voro sig lika, så synes det mig mycket antagligare, att den variabla formkomplexen uppstått genom korsning mellan *M. capitata* och *M. arvensis*, än att t. ex. från hvardera af de tvenne arterna en formserie utgått,

samt att dessa bägge formserier mött hvarandra och sammansmält till en de nämnda arterna sammanbindande serie, hvarvid det blefve omöjligt att afgöra, hvar *M. capitata* upphör och *M. arvensis* vidtager.

På de flesta ställen, där jag iakttog hybriden i naturen växte den intimt blandad med stamarterna. Antager man ej en hybrid härkomst för de omtalade formerna, synes det mig omöjligt att förklara förekomsten af dessa fullkomligt sterila former på nyss blottade myrmarker och andra nyodlade ställen, då de ögonskenligen ha mycket svårt att utan människans åtgörande förflyttas till nya lokaler.

Särdeles upplysande i nämnda hänseende är hybridens förekomst i ett litet nyligen utdikadt och uppodladt kalkkärr, som är beläget i skogen nära Bro kyrka på Gotland och hvilket jag under flera somrar noga undersökt före torrläggningen. Vegetationen bestod af spridda *Sphagnum*-tufvor med *Ledum palustre*, *Oxycoccus* och *Drosera rotundifolia* samt mellan tufvorna *Carices*, *Schoenus ferrugineus*, *Tofieldia calyculata* m. fl. Ingen *Mentha* iakttogs då. Sedan det torrlagda kärret nu i några år användts som åker, är den forna kärrvegetationen naturligtvis ersatt af kulturformationer och i somras (1897) förekommo där ymnigt både *Mentha capitata* (mest i och vid dikena) och *M. arvensis* samt *M. capitata* × *arvensis* (bägge mest på åkern). De båda arterna hafva antagligen ditkommit medels frön samtidigt med kulturväxterna, under det att det hastiga uppträdandet af den fullkomligt sterila *M. capitata* × *arvensis*-formen icke synes mig kunna förklaras på annat sätt, än att den uppstått på lokalen genom korsning mellan stamarterna. I skarp motsättning härtill står den sterila arten *M. gentilis*' orörlighet och isolerade förekomst.

Vidare befordras onekligen uppkomsten af en hybrid mellan *M. capitata* och *M. arvensis* genom *M. arvensis*' gynodioeci, och det är antagligt, att på grund af denna *M. arvensis* vid korsningen plägar spela rollen af honlig part. Sättet för korsningen torde nämligen ofta vara det, att den redan före lokalens upp-

odlande förefintliga, nästan alltid hermafrodita *M. capitata* befruktar honindivid af den med kulturväxterna införda *M. arvensis.*

Det ofvan anförda synes mig otvetydigt tala för den uppfattningen, att de af mig under namn af *M. capitata* × *arvensis* (*M.* **hybrida* ARESCH.) beskrifna formerna verkligen äro primära korsningsprodukter. Jag instämmer alltså fullkomligt i den af utländska monografer [1]) allmänt antagna åsikten, att en hybrid existerar mellan *M. capitata* och *M. arvensis.*

Däremot vill jag opponera mig mot den omfattning, i hvilken denna hybrid tages af dem på samma gång som mot det brukliga sättet att inom släktet *Mentha* sluta från en forms sterilitet till dess hybriditet. Hufvudsakligen på grund af steriliteten hos den samling af närstående former, som jag i det föregående benämnt *de verticillata aquatica-formerna* och hvilka i den svenska floristiska litteraturen äro sammanförda under namnen *β subspicata* FR. och *γ verticillata* FR., ha dessa utan undantag förts till hybriden *M. capitata* × *arvensis.* Och dock likna för det mesta dylika former *M. arvensis* i intet annat än i fråga om blommornas skenbara kransställning i bladvecken, ofta äro de mer grofva och högväxta än *M. capitata* själf och förekomma i vårt land i trakter, där *M. capitata* saknas. De äro i mitt tycke sterila former, som på intet vis ha att göra med *M. arvensis.* Därigenom att dylika former föras till *M. aquatica* × *arvensis*, bli hybridens former så olika, att ingen gemensam diagnos kan uppställas för dessa, hvilket ock MOEWES betonar i sitt anf. arb. Ueber Bastarde von M. arvensis und M. aquatica, på samma gång som han talar om former af hybriden »welche im Stattlichkeit des Wuchses die *capitata* über-

[1]) Jämför t. ex. J. BRIQUET, Fragmenta monographiæ Labiatarum fasc. 1er: Revision systématique des groupes spécifiques et subspécifiques dans le sougenre Menthastrum du genre Mentha (Bull. de la Soc. bot. de Genève 1889 N:o 5 pag. 20—122). HEINRICH BRAUN, Ueber einige Arten und Formen der Gattung *Mentha* mit besonderer Berücksichtigung der in Oesterreich-Ungarn wachsenden Formen (Verhandl. der Zool.-Bot. Gesellschaft zu Wien 1890 p. 351—509). MALINVAUD, Simple aperçu des hybrides dans le genre *Mentha* (Bull. de la Soc. bot. de France vol. XXVII 1880 p. 332—348). W. O. FOCKE, Die Pflanzenmischlinge. Berlin 1881.

treffen» och dessutom bland andra om en form »welche der *M. aquatica* (*capitata*) ganz ähnlich sieht und sich nur durch die grössere Zahl der blattwinkelständigen Quirle unterscheidet».

Den äldre och i vårt land ännu härskande åsikten, att sådana former tillhöra *M. aquaticas* formkrets, anser jag långt riktigare än den ofvannämnda af MOEWES motiverade och i utlandet allmänt utbredda uppfattningen. Därtill kommer då som ett särskildt moment hybriden *M. capitata* × *arvensis*.

Hvad jag därför vill hafva betonat är, att inom släktet *Mentha* förekomma utom de sterila hybriderna äfven sterila arter och former, som icke kunna anses äga hybridt ursprung. På grund häraf är blommans sterilitet här ej af så stor betydelse vid afgörande af en forms hybriditet som hos *Viola*, *Epilobium* och många andra släkten. Jag anser, att för ett framgångsrikt studium af det mångformiga släktet *Mentha* kulturförsök och speciellt försök att genom korsning på konstig väg framställa hybrider i många fall äro nödvändiga; korsningsförsök äro lyckligtvis inom detta släkte underlättade genom förekomsten af rena honindivid.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. fr. sid. 32.)

Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 5 (1897): N:o 12. 8:o.
Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Abhandlungen. H. 2. 1897. 4:o.
Das Klima des Königreiches Sachsen. H. 4. 1897. 4:o.
Vorläufige Mitteilung der Beobachtungs-Ergebnisse von 12 Stationen 2. Ordn. in Sachsen. 1896: 10—12. 4:o.
Cherbourg. *Société nationale des sciences naturelles et mathématiques.*
Mémoires. T. 30. 1896—97. 8:o.
Colima. *Observatorio meteorológico y vulcanologico.*
Boletin mensual. 1896: 7—8. 4:o.
Dorpat. *Meteorologisches Observatorium.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 30 (1895). 8:o.
Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen. Jahr 1896. 4:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 2.

Onsdagen den 9 Februari.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot f. d. Öfverdirektören Knut Styffe med döden afgått.

Med anledning af ett förslag, som vid ett föregående Akademiens sammanträde blifvit framställdt om vidtagande af förberedande åtgärder för utförande af en gradmätning på Spetsbergen, afgåfvo Herrar Frih. Nordenskiöld, Torell och Rosén infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å en af bestyrelsen för det femtonde Skandinaviska naturforskaremötet, hvilket under instundande sommar kommer att hållas i Stockholm, ingifven underdånig ansökan om beredande af ett anslag till bestridande af de med mötet förbundna omkostnader, afgåfvo Herrar Frih. Nordenskiöld och Lindström infordradt utlåtande, som jemväl af Akademien godkändes.

Herr Théel höll föredrag om hermafroditismen hos lägre hafsdjur.

Herr AURIVILLIUS redogjorde för innehållet af en utaf Fil. Kandidaten H. BORG afgifven berättelse om den resa, som han med understöd af Akademien utfört till Norrbotten och Lappland för entomologiska forskningar.

Friherre NORDENSKIÖLD meddelade några ytterligare upplysningar, som till Kongl. Utrikes Departementet inkommit, angående den ballong, som skulle hafva varit synlig i British Columbia och trotts vara ANDRÉES ballong.

Det *Letterstedtska* priset för förtjenstfulla originalarbeten och vigtiga upptäckter tillerkändes Friherre A. E. NORDENSKIÖLD för hans under nästlidne år utgifna kartverk: »Periplus, utkast till sjökortens och sjöböckernas äldsta historia».

Det *Letterstedtska* priset för förtjenstfulla öfversättningar till svenska språket tillerkändes e. o. Professorn vid universitetet i Lund F. A. WULFF för hans öfversättning af DANTE's »Vita nuova».

Letterstedtska medlen för maktpåliggande undersökningar skulle öfverlemnas till Amanuensen Dr. G. O. MALME för att sätta honom i tillfälle att genom jemförande studier vid det botaniska museum i Genève bestämma de värdefulla Syd-amerikanska Lichen-samlingar, som tillhöra Riksmuseum.

1897 års ränta å *Scheele-fonden* tilldelades Fil. Licentiaten A. EKBOM för att sätta honom i tillfälle att fullfölja påbörjade undersökningar öfver ortoamidobenzolsilfversyreamidens kondensationsprodukter.

Anmäldes, att det utskott, som af Akademien blifvit tillsatt för bortgifvande af det Byzantinska resestipendiet, öfver hvilket Akademien eger att förfoga för åren 1898, 1899 och 1900, till stipendiater utsett:

för år 1898 Assistenten vid den kemisk-växtbiologiska anstalten i Luleå, Filos. Kandidaten F. E. WICKSTRÖM för att vid Tyska universitet idka agrikultur-kemiska studier;

för år 1899 Vagnmakaren A. A. SVENSSON för att i utlandet studera vagnfabrikationen ur så väl teoretisk som praktisk synpunkt; och

för år 1900 Adjunkten vid Ultuna Landtbruksinstitut P. E. ULLBERG för att i utlandet studera kulturteknik i allmänhet och särskildt fältbyggnadslära m. m.

På tillstyrkan af komiterade antogos till offentliggörande i Akademiens skrifter följande afhandlingar och uppsatser, nämligen:

dels i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) »Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf den Stationen Haparanda, Hernösand, Upsala, Stockholm und Lund», af Professor P. G. ROSÉN; 2:o) »Sur un problème d'Euler mentionné par Legendre dans sa Théorie des nombres et quelques notes sur les carrés magiques», af Ingeniören C. O. BOIJE AF GENNÄS; 3:o) »Krustaceen aus dem Kamerun-Gebiete, durch Y. SJÖSTEDT und P. DUSÉN eingesammelt», af Docenten C. W. S. AURIVILLIUS;

och dels i Öfversigten: 1:o) »Sur les points singuliers des équations différentielles», af Docenten I. BENDIXSON; 2:o) »En studie öfver Ranunculus illyricus' morfologi, biologi och anatomi», af Lektor J. ERIKSON; 3:o) »Das System der Synaptiden. Vorläufige Mittheilung», af Kandidat H. ÖSTERGREN.

Genom anställdt val kallade Akademien till ledamot sin Astronom Professorn Dr. KARL PETRUS TEODOR BOHLIN.

Följande skänker anmäldes:

Till K. Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 2 häften. 4:o.
— *K. Kommerskollegium.*
Yrkesinspektionens verksamhet år 1896. 8:o.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. 1897: H. 4. 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1897: n:r 12. 8:o.
Lund. *Universitetet.*
Årsskrift. T. 33 (1897): Afd. 1—2. 4:o.
Amsterdam. *Société mathématique.*
Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 6 (1897): P. 1. 8:o.
Nieuw archief voor wiskunde. (2) D. 3: Stuk 3. 1897. 8:o.
Wiskundige opgaven. D. 7: Stuk 4. 1898. 8:o.

Belfast. *Natural history and philosophical society.*
Report and proceedings. Session 1896/97. 8:o.
Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen. Bd 24. 1897. 8:o.
— *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1897: H. 2. 8:o.
Bologna. *R. accademia delle scienze.*
Memorie. (5) T. 5. 1895/96. 4:o.
Rendiconto delle sessioni. N. S. Vol. 1 (1896—97). 8:o.
Brünn. *Naturforschender Verein.*
Verhandlungen. Bd 35 (1896). 8:o.
Bericht der Meteorologischen Commission. 15 (1895). 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts.*
Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers. T. 54. 1896. 4:o.
Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 48—50, 53—54. 1895—1896. 8:o.
Bulletin. (3) T. 34 (1897): N:o 12. 8:o.
Annuaire. Année 64 (1898). 8:o.
Biographie nationale. T. 14: Fasc. 1. 1896. 8:o.
— *Observatoire R. de Bruxelles.*
Annales. — Observations météorologiques et magnétiques. N. S. T. 3 (1880—1883); 4 (1884—1886). 1895. 4:o.
Annuaire. Année 56—64 (1889—97). 12:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 44 (1897): Entr. 5. 8:o.
Cambridge. *Philosophical society.*
Transactions. Vol. 16: P. 3. 1898. 4:o.
Proceedings. Vol. 9: P. 7. 1897. 8:o.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 31: N:o 5. 1897. 8:o.
Delft. *École polytechnique.*
Annales. T. 8 (1897): Livr. 3—4. 4:o.
Dorpat. *Meteorologisches Observatorium.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 30 (1895) = Bd 6: H. 5. 8:o.
Dublin. *R. Irish academy.*
Proceedings. (3) Vol. 4: N:o 4. 1897. 8:o.
Greifswald. *K. Universität.*
Akademische Schriften. Jahr 1896/97. 143 st. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Kl. N. F. Bd 2: N:o 4. 1898. 4:o.
Nachrichten. Math.-phys. Kl. 1897: H. 1—3. 8:o.
» Philol.-hist. Kl. 1897: H. 3. 8:o.
» Geschäftliche Mittheilungen. 1897: H. 1—2. 8:o.
Habana. *R. Colegio de Belen de la Compañía de Jesus.*
Observaciones magnéticas y meteorológicas. Año 1894, 95. Fol.

(Forts. å sid. 86.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 2.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola, N:o 173.

Sur les points singuliers des équations différentielles.

Par IVAR BENDIXSON.

[Communiqué le 9 Février 1898 par G. MITTAG-LEFFLER.]

Dans leurs recherches sur les équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \tag{1}$$

X et Y désignant des polynomes en x et y, BRIOT, BOUQUET ont pour la première fois entrepris une étude des intégrales qui passent par un point où X et Y s'annullent tous les deux. [1]) Ils y ont montré que l'on peut, par un procédé analogue à celui, employé par PUISSEUX pour les fonctions algébriques, réduire l'étude des singularités d'une telle équation à celles d'un certain nombre d'équations différentielles de la forme

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + f(x, y) \tag{2}$$

$f(x, y)$ désignant une série procédant suivant les puissances entières positives de x et y, ne contenant que des termes de dimension plus grande que 1 et convergente au voisinage de $x = 0$, $y = 0$.

Quant à ces dernières équations leurs recherches, complétées par celles de MM. POINCARÉ [2]) et PICARD, [3]) ont, pour le cas où $n = 1$, complètement déterminé la forme des courbes intégrales réelles au voisinage d'un point singulier, tant que $a \neq 0$.

---

[1]) Voir BRIOT, BOUQUET: »Recherches sur les propriétés des fonctions, définies par des équations différentielles». Journal de l'école Polytechnique, Tome XXI, 1856.

[2]) Voir POINCARÉ, »Sur les courbes définies par des équations différentielles.» Journal de Liouville 1881 et 1882.

[3]) PICARD, Traité d'analyse, Tome II, pages 202, 203.

Le développement analytique des intégrales a été donné par M. POINCARÉ [1]) sauf dans le cas où $a = 1$ et où la partie réelle de a est < 0. Le premier de ces cas a été traité par M. PICARD [2]) et moi, [3]) le second par moi. [4])

Pour le cas au contraire où $n > 1$ on n'a obtenu jusqu'ici que le résultat prouvé par BRIOT, BOUQUET dans leur mémoire cité, à savoir qu'il n'existe pas en géneral dans ce cas d'intégrale holomorphe passant par $x = 0$, $y = 0$.

Dans les pages suivantes je veux traiter le cas où $n \geq 2$, me bornant pourtant à la détermination des courbes intégrales réelles dans le cas où a et b et les coëfficients de f sont des nombres réels.

Je me propose d'établir les théorèmes suivants.

Théorème I. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$x^{2n}\frac{dy}{dx} = ay - x\varphi(x) - yf(x, y) \tag{3}$$

où $a > 0$ et $\varphi(x)$ et $f(x, y)$ sont des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x et y, $f(x, y)$ s'annullant pour $x = 0$, $y = 0$; on peut toujours entourer l'origine $x = 0$, $y = 0$ par un cercle C ($x^2 + y^2 = \varrho^2$) possédant les propriétés suivantes: Par chaque point x_0, y_0, situé à droite de l'axe des y et à l'intérieur de C, passe alors une courbe intégrale allant de x_0, y_0 à l'origine, en restant toujours à l'intérieur de C. À gauche de l'axe des y, il existe au contraire une seule courbe intégrale, passant par l'origine et restant tout entière à l'intérieur de C.

Dans le cas au contraire où $a < 0$ il y a une infinité de courbes à gauche de l'axe des y et une seule à droite de cet axe, ce que l'on obtient aisément par la substitution $x = -\xi$.

---

[1]) POINCARÉ, Thèse inaugurale Paris Gauthier Villars, 1879. Voir aussi du même auteur »Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équat. diff.» Journal de l'école polytechnique, Cahier XLV.

[2]) PICARD: Traité d'analyse, Tome II, page 30.

[3]) BENDIXSON: »Sur le développement des intégrales d'un système d'équat. diff. au voisinage d'un point singulier.» Öfversigt af K. Vet. Akad. handlingar. Stockholm 1894.

[4]) BENDIXSON: »Sur les points singuliers des équat. différentielles». Öfversigt af K. Vet. Akad. handlingar 1895.

Théorème II. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$x^{2n+1}\frac{dy}{dx} = ay - x\varphi(x) - yf(x, y)$$

où $a > 0$, *on peut toujours entourer l'origine par un cercle* C $(x^2 + y^2 = \varrho^2)$ *tel qu'il passe par chaque point* x_0, y_0, *situé à l'intérieur de* C, *une courbe intégrale allant de* x_0, y_0 *à l'origine et telle que toute la courbe, comprise entre* x_0, y_0 *et l'origine, est située à l'intérieur de* C.

Enfin on aura le théorème suivant.

Théorème III. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$x^{2n+1}\frac{dy}{dx} = ay - x\varphi(x) - yf(x, y)$$

où $a < 0$, *il ne passe par l'origine plus de trois courbes intégrales, dont l'une est la droite* $x = 0$, *l'une est située à droite de l'axe des* y *et la troisième à gauche de cet axe.*

Pour fixer les idées nous traiterons d'abord le cas où $n = 2$ dans l'équation (2), c'est-à-dire l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx} = ay - x\varphi(x) - yf(x, y) \tag{4}$$

où $a > 0$.

Nous voulons donc d'abord prouver que l'on peut déterminer un nombre positif ϱ tel qu'il passe par chaque point x_0, y_0, où $0 < x_0 < \varrho$, $|y_0| < \varrho$, une courbe intégrale allant à l'origine. Nous pouvons en outre nous borner au cas où $y_0 > 0$, le cas où $y_0 < 0$ se réduisant à celui-là par la simple substitution $y = -\eta$.

Nous démontrerons notre théorème à l'aide d'une méthode d'approximations successives tout analogue à celle de M. PICARD.

Déterminons d'abord la fonction y_1, de manière qu'elle satisfasse à

$$x^2\frac{dy_1}{dx} = ay_1 - x\varphi(x)$$

et qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Ayant formé ensuite l'équation différentielle

$$x^2 \frac{dy_2}{dx} = ay_2 - x\varphi(x) - y_1 f(x, y_1)$$

on en détermine y_2 par la condition qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$. En continuant ainsi, on déterminera y_ν de manière qu'elle satisfasse à

$$x^2 \frac{dy_\nu}{dx} = ay_\nu - x\varphi(x) - y_{\nu-1} f(x, y_{\nu-1}) \qquad \nu=2, 3, 4, \ldots$$

et qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Je dis alors que la série

$$y = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu) \tag{5}$$

représente une intégrale de l'équation (4), s'annulant pour $x = 0$, dans le cas où l'on ait choisi x_0, y_0, suffisamment petits et positifs.

Observons aussi que la méthode bien connue de la résolution des équations linéaires nous donne

$$y_1 = He^{-\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{x\varphi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx$$

où

$$H = y_0 e^{\frac{a}{x_0}}$$

et en général

$$y_\nu = y_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{y_{\nu-1} f(x, y_{\nu-1})}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \qquad \nu=2, 3, \ldots$$

On voit alors aisément que toutes les fonctions y_ν sont telles que l'on ait

$$\lim_{x=+0} y_\nu = 0$$

en désignant par $x = +0$, que x va vers zéro du côté positif. Pour établir ce résultat on doit observer que, si $\psi(x)$ est une

fonction continue pour des valeurs positives de x, et telle que $\lim\limits_{x=+0} \psi(x) = 0$, on a

$$\lim_{x=+0} e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx = 0 . \tag{6}$$

Soit en effet ε une valeur positive très petite, on pourra écrire

$$e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx = e^{-\frac{a}{x}} \int_\varepsilon^{x_0} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx .$$

Il est évident que la première partie du membre droit s'annulle pour $x = +0$. Et l'égalité

$$e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx = \frac{\psi(x_1)}{a} - \psi(x_1) \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{a} \cdot e^{\frac{a}{\varepsilon}}$$

x_1 désignant une valeur de x comprise entre 0 et ε, nous fait voir que l'équation (6) a lieu.

On en obtient tout de suite que $\lim\limits_{x=+0} y_1 = 0$, et en général que $\lim\limits_{x=+0} y_\nu = 0$.

Afin de prouver maintenant la convergence de la série (5), nous la comparons à la série correspondante que l'on obtient, en appliquant notre méthode d'approximations successives à l'équation

$$x^2 \frac{dz}{dx} = az - Mx - Nz \tag{7}$$

M désignant ici la valeur maxima, de $|\varphi(x)|$ pour $|x| \leq \varrho_1$, et N désignant la valeur maxima de $\left|\frac{\partial}{\partial y}[y \cdot f(x, y)]\right|$ pour $|y| \leq \varrho_1$, $|x| \leq \varrho_1$.

En faisant ϱ_1 suffisamment petit, la valeur de N peut être faite aussi petite que l'on voudra.

Nous supposerons donc qu'on ait choisi ϱ_1 de manière que $N < a$.

En appliquant notre méthode d'approximations successives à l'équation (7), on en tire

$$(8) \quad \begin{cases} z_1 = He^{-\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} Mx \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx \\ z_2 = z_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{Nz_1}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \\ \text{— — — — — —} \\ z_\nu = z_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{Nz_{\nu-1}}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \, . \\ \text{— — — — — —} \end{cases}$$

Formons maintenant la série

$$(9) \qquad z = z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_{\nu+1} - z_\nu)$$

je dis que, si l'on ait choisi $0 < x_0 < \varrho_1$, la série (9) est uniformément convergente et représente l'intégrale de l'équation (7) qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0 et pour $x = 0$ prend la valeur 0.

D'après la supposition faite, $y_0 > 0$, il est évident que $z_1 > 0$ pour $0 < x \leq x_0$.

Mais

$$z_2 - z_1 = e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{Nz_1}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx$$

nous apprend donc que $z_2 - z_1 > 0$ pour $0 < x \leq x_0$, et on obtient en général que

$$z_{\nu+1} - z_\nu = e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{N(z_\nu - z_{\nu-1})}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \geq 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0 .$$

Soit enfin $\bar{z}$ l'intégrale de l'équation (7) qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0, on aura

$$\bar{z} = H_1 e^{-\frac{(a-N)}{x}} + e^{-\frac{a-N}{x}} \int_x^{x_0} Mx \cdot \frac{e^{\frac{a-N}{x}}}{x^2} dx \tag{10}$$

où

$$H_1 = y_0 e^{\frac{a-N}{x_0}} .$$

On aura donc $\bar{z} > 0$ pour $0 < x \leq x_0$.

Mais la fonction $\bar{z}$ satisfaisant alors à l'équation

$$x^2 \frac{dz}{dx} = az - Mx - N\bar{z}$$

peut s'écrire

$$\bar{z} = z_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{N\bar{z}}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx$$

d'où l'on conclut que $\bar{z} > z_1$ pour $0 < x \leq x_0$.

On aura alors

$$\bar{z} - z_2 = e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{N(\bar{z} - z_1)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx$$

ce qui fait voir que

$$\bar{z} - z_2 > 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

En continuant ainsi on voit que

$$\bar{z} - z_\nu > 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

Tous les termes de la série (9) étant positifs, et la somme d'un nombre fini de ces termes étant toujours $< \bar{z}$, on est assuré que la série est convergente.

Pour prouver l'uniformité de la convergence, nous formons la série des dérivées

$$\frac{dz_1}{dx} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{d}{dx}(z_{\nu+1} - z_\nu) = [az_{m+1} - Mx - Nz_m] \frac{1}{x^2}$$

On aura donc

$$\left|\frac{dz_1}{dx} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{d}{dx}(z_{\nu+1} - z_\nu)\right| < [(a + N)\bar{z} + Mx]\frac{1}{x^2}$$

pour chaque valeur de m.

En désignant par ε une valeur positive aussi petite que l'on voudra, on peut maintenant déterminer un nombre positif G_ε, tel que le membre droit soit en valeur absolue moindre que G_ε, pour $\varepsilon \leq x \leq x_0$, et pour chaque valeur de m.

On sait alors que la série (9) est uniformément convergente pour ces mêmes valeurs de x. [1])

En formant de la même manière la série des dérivées secondes

$$\frac{d^2z_1}{dx^2} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{d^2(z_{\nu+1} - z_\nu)}{dx^2} = \left[a\frac{dz_{m+1}}{dx} - M - N\frac{dz_m}{dx}\right]\frac{1}{x^2}$$

$$- \frac{2}{x^3}[az_{m+1} - Mx - Nz_m]$$

on aura

$$\left|\frac{d^2z_1}{dx^2} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{d^2(z_{\nu+1} - z_\nu)}{dx^2}\right| < [(a + N)G_\varepsilon + M]\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}G_\varepsilon .$$

On pourra donc déterminer un nombre positif G'_ε tel que le membre droit soit moindre que G'_ε pour chaque valeur de m et pour $\varepsilon \leq x \leq x_0$. On en conclut que la série des dérivées premières est aussi uniformément convergente, ce qui met en évidence que la série (9) satisfait à l'équation (7), pour $\varepsilon \leq x \leq x_0$.

On aura donc

$$\bar{z} = z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(z_{\nu+1} - z_\nu) \qquad \text{pour } \varepsilon < x \leq x_0.$$

---

[1]) Voir BENDIXSON, »Sur la convergence uniforme des Séries», Théorème III. Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. Stockholm 1897.

Ici on peut prendre ε aussi petit que l'on voudra, ce qui nous fait conclure que

$$\bar{z} = z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(z_{\nu+1} - z_\nu) \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

Mais l'expression (10) de $\bar{z}$ nous apprend enfin que

$$\lim_{x=+0} \bar{z} = 0$$

ou que

$$\lim_{x=+0}\left[z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(z_{\nu+1} - z_\nu)\right] = 0.$$

Retournons maintenant à l'équation différentielle donnée. Ayant déterminé alors le nombre positif ϱ tel que

$$\varrho\left[1 + \frac{M}{a}\right] < \varrho_1\left[1 - \frac{N}{a}\right]$$

je dis, qu'ayant déterminé $x_0 < \varrho$, $y_0 < \varrho$, la série (5) est uniformément convergente et représente l'intégrale de l'équation (4) qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0.

Nous remarquons d'abord que toutes les quantités y_ν sont telles que

$$|y_\nu| < \varrho_1 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0 < \varrho.$$

L'équation

$$y_1 = y_0 e^{-\frac{a}{x} + \frac{a}{x_0}} + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^{x_0} \frac{x\varphi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}}$$

nous donne en effet

$$|y_1| < \varrho + e^{-\frac{a}{x}} x_0 \cdot M \int_x^{x_0} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx$$

$$< \varrho + x_0 \frac{M}{a}\left[1 - e^{\frac{a}{x_0} - \frac{a}{x}}\right]$$

$$< \varrho\left[1 + \frac{M}{a}\right] < \varrho_1.$$

On aura donc

$$|y_1 f(x, y_1)| < N\varrho_1$$

ce qui nous donne

$$|y_2| < \varrho\left[1 + \frac{M}{a}\right] + e^{-\frac{a}{x}}\int_x^{x_0}\frac{N\varrho_1}{x^2}e^{\frac{a}{x}}dx$$

$$< \varrho\left[1 + \frac{M}{a}\right] + \frac{N\varrho_1}{a} < \varrho_1 .$$

En continuant ainsi, on aura

$$|y_\nu| < \varrho_1 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

Formons maintenant

$$|y_2 - y_1| = \left|e^{-\frac{a}{x}}\int_x^{x_0}\frac{y_1 f(x, y_1)}{x^2}e^{\frac{a}{x}}dx\right|$$

$$< e^{-\frac{a}{x}}\int_x^{x_0}\frac{N|y_1|}{x^2}e^{\frac{a}{x}}dx .$$

En observant que $|y_1| < z_1$ on conclut que

$$|y_2 - y_1| < z_2 - z_1 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

L'équation

$$|y_3 - y_2| = \left|e^{-\frac{a}{x}}\int_x^{x_0}\frac{y_2 f(x, y_2) - y_1 f(x, y_1)}{x^2}e^{\frac{a}{x}}\right|$$

$$< e^{-\frac{a}{x}}\int_x^{x_0}\frac{N|y_2 - y_1|}{x^2}e^{\frac{a}{x}}dx < e^{-\frac{a}{x}}\int_x^{x_0}\frac{N(z_2 - z_1)}{x^2}e^{\frac{a}{x}}dx$$

met alors en évidence que

$$|y_3 - y_2| < z_3 - z_2 .$$

En continuant ainsi on obtient

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < z_{\nu+1} - z_\nu \quad \text{pour } 0 < x \leq x_0.$$

On peut donc affirmer que la série (5) est convergente, et même uniformément convergente, pour $\varepsilon < x \leq x_0$, ε étant une valeur positive aussi petite que l'on voudra.

L'équation

$$x^2 \left| \sum_{\nu=m+1}^{m+m'} \frac{d}{dx}(y_{\nu+1} - y_\nu) \right| =$$

$$= | a(y_{m+m'+1} - y_{m+1}) + y_{m+m'} f(x, y_{m+m'}) - y_m f(x, y_m) |$$

$$< a | y_{m+m'+1} - y_{m+1} | + N | y_{m+m'} - y_m |$$

nous apprend alors que la série des dérivées $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(y_{\nu+1} - y_\nu)$ est uniformément convergente pour $\varepsilon < x \leq x_0$, et il s'en suit que la série (5) satisfait à l'équation différentielle (4) pour $\varepsilon \leq x \leq x_0$. Mais ε étant aussi petit que l'on voudra, l'intégrale de l'équation (4) qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0, sera donnée par la série (5), pour toute valeur de x telle que $0 < x \leq x_0$.

Or, on a établi que

$$\left| y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu) \right| < \bar{z} \quad \text{pour } 0 < x \leq x_0$$

et que $\lim_{x=+0} \bar{z} = 0$. On est donc assuré que

$$\lim_{x=+0} \left[y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu) \right] = 0$$

c. q. f. d.

La première partie de notre théorème est donc prouvée.

Afin de prouver la seconde partie du théorème, nous observons d'abord qu'une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = ay - \psi(x) \tag{11}$$

où $\psi(x)$ est une fonction continue pour des valeurs négatives de x, telle que

$$\lim_{x=-0} \psi(x) = 0$$

possède une seule intégrale qui s'annulle pour $x = -0$.

Car l'intégrale générale de l'équation (11) pouvant s'écrire

$$y = e^{-\frac{a}{x}} \left[C - \int_{-x_0}^{x} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \right]$$

C désignant une constante arbitraire, on voit bien qu'il faut que

$$C = \int_{-x_0}^{0} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx$$

pour que $\lim\limits_{x=-0} y$ ne soit pas infini.

Mettons donc

$$y_1 = e^{-\frac{a}{x}} \left[\int_{-x_0}^{0} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx - \int_{-x_0}^{x} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \right]$$

$$= e^{-\frac{a}{x}} \int_{x}^{0} \frac{\psi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \qquad \text{pour } -x_0 < x < 0.$$

On aura donc

$$y_1 = e^{-\frac{a}{x}} \cdot \psi(x_1) \int_{x}^{0} \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx \qquad x < x_1 < 0.$$

Mais x étant un nombre négatif, on conclut que

$$y_1 = \frac{\psi(x_1)}{a}$$

ce qui fait voir enfin que

$$\lim_{x=-0} y_1 = 0.$$

En appliquant notre méthode d'approximations successives à l'équation (4), nous déterminerons maintenant y_1 de telle manière que

$$\frac{dy_1}{dx} = ay_1 - x\varphi(x)$$

et que $\lim\limits_{x=-0} y_1 = 0.$

Ensuite nous déterminerons y_2 de sorte que

$$\frac{dy_2}{dx} = ay_2 - x\varphi(x) - y_1 f(x, y_1)$$

et que $\lim\limits_{x=-0} y_2 = 0.$

En continuant ainsi on obtient

$$y_1 = e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{x\varphi(x)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \qquad \text{pour } x < 0$$

$$y_2 = y_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{y_1 f(x, y_1)}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \qquad \text{pour } x < 0$$

et en général

$$y_\nu = y_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{y_{\nu-1} f(x, y_{\nu-1})}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \quad \nu = 3, 4, \ldots .$$

Je dis que la série

$$y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu)$$

représente alors, pour des valeurs négatives suffisamment petites de x, une intégrale de l'équation (4) qui s'annulle pour $x = -0$.

Formons en effet la série correspondante pour l'équation (7), nous aurons

$$z_1 = e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 Mx \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2} dx$$

$$z_2 = z_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{Nz_1}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx$$

— — — — — —

$$z_\nu = z_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{Nz_{\nu-1}}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx .$$

— — — — — — —

On prouve aisément, comme au cas précédent, que

$$z_1 < 0 , \; z_2 - z_1 < 0 \quad \text{pour } -\varrho_1 \leq x < 0$$

et en géneral que

$$z_\nu - z_{\nu-1} < 0 \qquad \text{pour } -\varrho_1 \leq x < 0 .$$

En mettant

$$\bar{z} = e^{-\frac{(a-N)}{x}} \int_x^0 Mx \frac{e^{\frac{a-N}{x}}}{x^2} dx$$

on voit que $\bar{z} < 0$ pour $-\varrho_1 \leq x < 0$. Mais $\bar{z}$ satisfaisant à l'équation (7), et $\lim\limits_{x=-0} \bar{z} = 0$, on a

$$\bar{z} = z_1 + e^{-\frac{a}{x}} \int_x^0 \frac{N\bar{z}}{x^2} e^{\frac{a}{x}} dx \quad \text{pour } -\varrho_1 \leq x < 0.$$

On aura donc

$$|\bar{z}| > |z_1|, \ |\bar{z}| > |z_2|, \ \ldots |\bar{z}| > |z_\nu| \ldots .$$

La série

$$z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_{\nu+1} - z_\nu) \tag{11}$$

est alors convergente, et on prouve de la même manière que ci-dessus qu'elle satisfait à l'équation (7) pour $-\varrho_1 < x < -\varepsilon$.

Mais

$$|\bar{z}| > |z_n| \qquad \text{pour } -\varrho_1 \leq x < 0$$

nous apprend que

$$|\bar{z}| \geq \left| z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_{\nu+1} - z_\nu \right| \quad \text{pour } -\varrho_1 \leq x < 0$$

ce qui met en évidence que

$$\lim_{x=-0} \left(z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_{\nu+1} - z_\nu) \right) = 0 .$$

La série (11) représente donc une intégrale de l'équation (7) qui s'annulle pour $x = -0$. Or il n'existe plus d'une seule telle intégrale. On peut donc affirmer que

$$\bar{z} = z_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_{\nu+1} - z_\nu) \quad \text{pour } -\varrho_1 \leq x < 0.$$

En déterminant enfin un nombre positif ϱ suffisamment petit pour que

$$\varrho \cdot \frac{M}{a} < \varrho_1 \left[1 - \frac{N}{a}\right]$$

et en prenant $-x < \varrho$, on peut être assuré que

$$|y_\nu| < \varrho_1 \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

La démonstration se fait de la même manière qu'à la page 77, et on s'assure aussi de la même manière que

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| < -(z_{\nu+1} - z_\nu)$$

et enfin que la série

$$y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu)$$

satisfait à l'équation (4) pour $-\varrho \leq x < 0$.

De l'inégalité

$$\left| y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu) \right| < -z_1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} (z_{\nu+1} - z_\nu) \text{ pour } -\varrho_1 \leq x < 0$$

on conclut enfin que

$$\lim_{x=-0} \left[y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{\nu+1} - y_\nu) \right] = 0\,.$$

Il est donc établi qu'il existe une intégrale y de l'équation (4) telle que

$$\lim_{x=-0} y = 0\,.$$

Il nous reste à prouver qu'il n'existe pas d'autre intégrale satisfaisant à la condition réquise.

Supposons en effet qu'il existe deux intégrales de l'équation (4), y_1 et y_2, telles que

$$\lim_{x=-0} y_1 = 0; \qquad \lim_{x=-0} y_2 = 0.$$

On aurait alors

$$x^2 \frac{dy_1}{dx} = ay_1 - x\varphi(x) - y_1 f(x, y_1)$$

$$x^2 \frac{dy_2}{dx} = ay_2 - x\varphi(x) - y_2 f(x, y_2)$$

ce qui nous donne

$$x^2 \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = a(y_2 - y_1) - \frac{y_2 f(x, y_2) - y_1 f(x, y_1)}{y_2 - y_1} \cdot (y_2 - y_1) \cdot$$

En mettant

$$\frac{y_2 \cdot f(x, y_2) - y_1 \cdot f(x, y_1)}{y_2 - y_1} = \chi(x)$$

on sait que pour $|x| \leq \varrho_1$, $|y_1| \leq \varrho_1$, $|y_2| \leq \varrho_1$, on a

$$|\chi(x)| < N < a .$$

L'équation

$$x^2 \frac{dz}{dx} = z[a - \chi(x)]$$

aurait donc une intégrale $z = y_2 - y_1$, s'annullant pour $x = -0$.

Mais l'intégrale générale de cette dernière équation peut s'écrire

$$z = Ce^{\int_{x_0}^{x} \frac{a - \chi(x)}{x^2} dx}$$

$$= Ce^{-[a - \chi(x_1)] \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right]}$$

x_1 désignant une valeur comprise entre x_0 et x. Comme $a - \chi(x_1) > 0$, on aura, pour toute valeur de C, excepté $C = 0$,

$$\lim_{x = -0} z = \infty$$

Il s'en suit que z doit être $= 0$, pour toute valeur de x, c'est à dire que

$$y_1 = y_2 \qquad \text{pour toute valeur de } x.$$

c. q. f. d.

Nous avons prouvé notre théorème I pour le cas où $n = 1$, mais il est évident qu'il n'y a rien à changer dans la démonstration pour le cas où $n = q$.

On voit aisément que la démonstration du théorème II se fait aussi de la même manière. On n'a besoin que d'observer que l'équation

$$x^{2q+1}\frac{dy}{dx} = ay + \psi(x) \tag{12}$$

où $a > 0$, et $\psi(x)$ est une fonction continue qui s'annulle pour $x = 0$, possède toujours une intégrale allant du point arbitraire x_0, y_0, à l'origine. Mettons en effet

$$y = y_0 e^{\left[\frac{a}{x_0^{2q}} - \frac{a}{x^{2q}}\right]\frac{1}{2q}} + e^{-\frac{a}{2q}\cdot\frac{1}{x^{2q}}}\int_{x_0}^{x}\frac{\psi(x)}{x^{2q+1}}\, e^{\frac{a}{2q}\cdot\frac{1}{x^{2q}}}\, dx$$

on s'assure de la même manière qu'à la page 73 que y est une telle intégrale qui s'annulle pour $x = 0$.

Si au contraire $a = -\alpha < 0$, il existe une seule intégrale, allant de l'origine à gauche de l'axe des y, et une seule allant à droite. Dans ce cas on a en effet l'intégrale générale de l'équation (12)

$$y = C\cdot e^{\frac{\alpha}{x^{2q}}\cdot\frac{1}{2q}} + e^{\frac{\alpha}{x^{2q}}\cdot\frac{1}{2q}}\int_{x_0}^{x}\frac{\psi(x)}{x^{2q+1}}\, e^{-\frac{\alpha}{2q}\cdot\frac{1}{x^{2q}}}\, dx\,.$$

Pour que y s'annulle, quand $x = 0$, il faut donc que

$$C = \int_{0}^{x_0}\frac{\psi(x)}{x^{2q+1}}\, e^{-\frac{\alpha}{2q}\cdot\frac{1}{x^{2q}}}\, dx$$

ce qui nous donne

$$y = e^{\frac{\alpha}{x^{2q}}\cdot\frac{1}{2q}}\int_{0}^{x}\frac{\psi(x)}{x^{2q+1}}\, e^{-\frac{\alpha}{2q}\cdot\frac{1}{x^{2q}}}\, dx\,.$$

Cette distinction faite, l'application de la méthode précédente est immédiate. —

Il n'offre évidemment pas de difficulté de traiter les cas de MM. BRIOT, BOUQUET et de M. POINCARÉ aussi par la méthode développée ici. Pour le cas au contraire où $a = 0$, les difficultés sont considérables. Nous y retournerons à une autre occassion.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 68.)

Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 70: H. 3. 1898. 8:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Jahrg. 19 (1896). 4:o.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an 10 Stationen 2. Ordnung. . . . Jahrg. 18. 1895. 4:o.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Systeme der Deutschen Seewarte für das Lustrum 1891—95. 4:o,
Wetterbericht. Jahrg. 22 (1897). Fol.

Harlem. *Koloniaal museum.*
Extra bulletin. 1897. Fol.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. 1: 16; 7: 6; 21: 2. 1897. 8:o.

Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 31: H. 2. 1897. 8:o.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1896. 4:o.
Niederschlagsbeobachtungen der meteorologischen Stationen im Grossherzogthum Baden. Jahrg. 1897: 1. 4:o.
Übersicht der Ergebnisse der an den badischen meteorologischen Stationen angestellten Beobachtungen. Jahr 1895: 1—3; 1896: 1—12. Fol.

Kassel. *Verein für Naturkunde.*
Abhandlungen und Bericht. 42 (1896/97). 8:o.

Kazan. *Kejserl. universitetet.*
Učenija zapiski. G. 63 (1897): N:o 7—9. 8:o.
Akademiska dissertationer 1897. 10 st. 8:o.
— *Observatoire magnétique et météorologique de l'université Imp.*
Observations météorologiques. Année 1895: 9—12; 1896: 1—3. 8:o.

Kiel. *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd 2: H: 1: Abt. 2; 2: 2. 1897. 4:o.

Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. Naturvid.-math. afd. (6) T. 8: N:o 5. 4:o.
Oversigt over Forhandlinger. 1897: N:r 4—5. 8:o.
Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius. Ed. M. CURTZE. Khvn 1897. 8:o.
— *Meteorologisk Institut.*
Meteorologisk Aarbog. 1893: D. 2; 1896: 3. Fol.
Maanedsoversigt over Vejrforholdene. 1897: 1—12. Fol.

(Forts. å sid. 110.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 2.
Stockholm.

En studie öfver Ranunculus illyricus' morfologi, biologi och anatomi.

Af JOHAN ERIKSON.

(Meddeladt den 9 Februari 1898 genom A. G. NATHORST.)

En af den öländska florans märkligare växter är *Ranunculus illyricus*. Denna art har nämligen icke blott en på sätt och vis från alla svenska växter afvikande biologi, utan äfven i växtgeografiskt afseende företer den sina egenheter. Då denna växt på senare tiden [1]) icke varit mycket uppmärksammad af botanister, erbjuder ett ingående studium af dess morfologiska och anatomiska egenskaper följaktligen ett rätt stort intresse.

Ranunculus illyricus upptäcktes först i Sverige af LINNÉ på hans Ölandsresa och kallades af honom först *Ranunculus foliis ternatis integerrimis*. Sedan benämnde han den i Species plantarum med LOBELII gamla namn, *Ranunculus illyricus*. Han såg den först den 5 Juni vid Borgbyborg, men endast i ringa mängd. På den östra sidan hade han sedan tillfälle att iakttaga den »i otrolig myckenhet» vid Hulterstads kyrka. Den beskrifning, LINNÉ lämnade på örten, lyder sålunda: [2]) »Hon hade på stielken flera blad och åtskilliga fördelte grenar; blommorna voro helt gula och gläntzande, större än på *Ranunculo acri;* squamula nectarii vid basin af hvart kronblad var crenata, och pistillorum capitulum var aflångt såsom uti Adonide; radix tu-

[1]) I nyare morfologiska arbeten omnämnes den icke.
[2]) CARL LINNÆI Öländska och Gothländska resa. Stockholm och Upsala 1745.

berosa sessilis conglobata skickade ut på sidorna långa trådar, vid hvilkas spitzar sutto små radices tuberosæ;[1]) hela växten var tomentosa, såsom *Cyanus*; Stielken var en halfaln lång och rak; rotbladen voro ovato-lanceolata trubbige med bladskaft; Stielkbladen voro 3 på hvart bladskaft, af hvilka det medlersta var något längre och de öfversta bladen altid smalare; blommorna slutade grenarne, sittande på sina blomskaft, ägandes hvartdera sitt eget fembladiga blomfoder; på somliga blommor voro hvita fläckar, men på dem var öfversta huden skild från den andra.»

Denna LINNÉS beskrifning, hvilken såsom vanligt framhåller allt väsentligt i formförhållandena, väckte mitt intresse för denna *Ranunculus*-art, och jag satte som ett af mina mål vid studiet af alfvarvegetationen att så fullständigt som möjligt undersöka dess utveckling och byggnad.

Under sommaren 1895 hade jag icke tillfälle att iakttaga *Ranunculus illyricus;* under nästföljande sommar undersökte jag densamma dels på Resmo kyrkogård, där den ännu i ganska stor mängd finnes kvar, dels på den klassiska fyndorten vid Borgbyborg. Undersökningen skedde i slutet af juni och början af juli, hvarför endast vissnade exemplar voro till finnandes. Växten blommar i slutet af Maj och början af Juni och vissnar sedan mycket hastigt. Det var därför då endast tillfälle att iakttaga de underjordiska delarne. Dessutom kunde observeras, att intet exemplar satt frukt. Min anteckning i dagboken om de underjordiska delarne lyder: »Perenneringsorgan en stamknöl, hvarifrån utgå vanliga rötter, amrötter och utlöpare. Utlöparne, hvilka nå en längd af 12—18 cm. och hafva en bredd af endast $^1/_2$ mm., sluta i spetsen med en samling knölrötter. De äro

---

[1]) Redan CLUSIUS har emellertid observerat detta förhållande. Liksom LINNÉ räknar han knölstammen till roten. CLUSIUS' beskrifning lyder: »radix multis brevibus et extima parte obtusis tuberculis sive grumis constabat, ut pæne in *Chelidonio minore* (= *Ficaria verna*), quibus aliæ tenues fibræ intermixtæ. Multas proles ea radix generare solet, vel matri adnascentes, vel subinde tenui fibræ inhærentes procul a se sparsas! Han kallade växten *Ranunculus radice grumosa.*

försedda med små fjäll. Vid denna tid äro utlöparne nästan alldeles vissnade».

För att vinna kännedom om tiden för utlöparnes bildning och för öfrigt om de underjordiska delarnes utveckling har jag gjort tvänne särskilda resor till Öland, den ena den 26 Maj, den andra den 26 September 1897. Det är resultatet af dessa resors iakttagelser jämte under tiden gjorda anatomiska studier, som härmed offentliggöras.

Af äldre litteratur är det egentligen endast att taga hänsyn till TH. IRMISCHS, Ueber einige *Ranunculaceen* (Bot. Zeitung 1857), hvari likväl hufvudsakligen groningen beskrifves. Själf har jag icke funnit några utvecklade frukter och frön af denna art, hvarför jag var böjd för den slutledningen, att den liksom en del andra på vegetativ väg sig raskt propagerande växter, t. ex. *Ficaria verna*, endast i undantagsfall sätter grobara frön, men möjligen förhåller sig växten på annat sätt i sydligare trakter.

Groning och första utveckling.

Groningsförloppet anföres sålunda helt och hållet efter IRMISCH. — De epigäiska hjärtbladen äro långskaftade, äggrunda, ofta med hjärtlik bas, glänsande mörkgröna. Den längre eller kortare hypokotyla axeln, som är mycket tunn och späd, förblir till större delen under jorden. De på hjärtbladen följande bladen äro äggrunda, glatta eller obetydligt håriga. Så långt hinner växten under den första vegetationsperioden. Följande vår utvecklas nya örtblad, sedan hjärtbladen och de första örtbladen vissnat under vintern. Hufvudrot och hypokotyl äro stadda i bortvissnande. Birötter utvecklas under hjärtbladen och växa ut på längden; omedelbart ofvanför dem uppstå andra birötter, hvilka icke nå samma längd som de föregående, men från början äro något uppsvällda. Dessa tjockare rötter hafva i juni fått utseendet af rofformiga knölar. Deras understa del förblir tunn och förvissnar slutligen. Alltefter växtståndets styrka fann IRMISCH 1—2—6—8 knölrötter. Den axeldel, hvarifrån rötterna

utgå, sväller något upp. Dessutom finnes en terminalknopp, ytterst omgifven af några håriga lågblad. Vid sidan af terminalknoppen finner man äfven i regeln små axillära knoppar. I detta tillstånd förblifver plantan till nästa höst. Då utvecklas åter några örtblad,[1]) och ofvanför knölrötterna frambryta tunna birötter. Därjämte plägar en (sällan flera) axillär knopp växa ut till en underjordisk utlöpare. När blomningsstadiet inträder, växer terminalknoppen upp till ett vegetativt-floralt skott, och nästa års skott bildas af den öfversta axillära knoppen. Andra axillära knoppar växa ut till utlöpare. Utlöparne, som i början äro alldeles rotlösa, utveckla tämligen snart i den fria ändan, hvarest de senare drifva en liten bladrosett, knöliga och trådlika [2]) rötter, och i det att utlöparnes sträckta internodier snart bortvissna, bli de unga plantorna själfständiga. Så långt IRMISCHS framställning, hvilken, såsom synes, hufvudsakligen afhandlar groningen och något berör de allra första stadierna efter groningen.

Det öfverjordiska systemets morfologi.

Stjälken är omkring 30 cm. hög, styft upprät, enkel eller förgrenad. Den är beklädd af ett glest silkesartadt filtludd, något tätare på dess öfre del.

Bladen hafva olika form (se fig. 1), [3]) i det att de först bildade (1 à 2) rotbladen äro ovala, de därpå följande (2 à 3) äro lansettlika och de sist bildade rotbladen äro djupt 3- eller 2-delade (i förra fallet är midtelfliken ofta 3-delad) med jämnbredt-lansettlika flikar. Alla rotbladen äro långskaftade. Stjälkbladen äro kort- eller oskaftade och liksom de sist bildade rot-

[1]) Om detsamma äfven skulle inträffa i ett mera nordiskt klimat, kan vara tvifvel underkastadt.

[2]) Af IRMISCHS framställning ser det ut, som om en bladrosett redan på sommaren eller hösten utväxte på utlöpareändan. Möjligen förhåller sig växten så i ett sydligare klimat, men på Öland utvecklas icke rosetten förr än följande vår. Af rötterna anläggas knölrötterna genast, såsom af den följande beskrifningen och figurerna framgår, däremot utvecklas de normala rötterna först på hösten.

[3]) På det afbildade exemplaret förekommo endast hela rotblad.



Fig. 1. Ett sterilt stånd af *Ranunculus illyricus* med tvänne utlöpare, af hvilka den vänstra slutar med en knölrotskomplex, den högra icke är fullständigt intecknad.

bladen 3- eller 2-delade med jämnbredt-lansettlika, helbräddade flikar. De öfversta stjälkbladen äro stundom hela, liknande en af de nedras flikar. I en nyligen utkommen afhandling [1]) om Ranunculacéernas bladform omnämnes äfven *Ranunculus illyricus*. Det heter nämligen: »Ferner hängt mit der im Centrum stehenden *Ranunculus acer*-Form auch die kleine Gruppe der *Ranunculus*-Species mit tief getheilten fussförmigen Blättern, *Ranunculus pedatus* W. et K. und *Ranunculus illyricus* L. zusammen. Beide haben lineale, ziemlich parallel-nervige Blattzipfel und stehen deshalb am besten hier im Anschluss an *Ranunculus gramineus*». Bladen hos *Ranunculus illyricus* äro visserligen till en del djupt delade, men att kalla dem fussförmig synes mig vara konstladt, då de väl snarare äro handdelade. Att det äfven finnes hela blad hos denna art omnämnes icke af BITTER.

Alla bladen äro beklädda med ett silfverglänsande filtludd, som är tätast på bladens undre yta.

De först bildade bredare rotbladen vissna hastigt bort, så att de vid tiden för blomningen ofta äro alldeles försvunna.

Ranunculus illyricus visar sig i sin utveckling och sina morfologiska förhållanden tillpassad till ett torrt klimat och en torr jordmån. Också förekommer den hufvudsakligen [2]) på soliga, vindöppna, sandiga lokaler eller på de regnfattiga stepperna i södra Ryssland.

Med afseende på sin vegetationstid är denna ranunkel en s. k. efemer växt, som fullbordar sin vegetation och blomning under våren och försommaren. Efter blomningen, som vanligen inträffar i den första veckan i juni, vissnar växten hastigt bort.

Som xerofila tillpassningar kunna dessutom anföras bladskifvornas successiva reduktion, i det att skifvan delas i smala flikar på de sist bildade bladen, förekomsten af luftförande hår på växtens alla öfverjordiska delar samt bladskifvornas uppräta

---

[1]) G. BITTER, Vergleichend-morphologische Untersuchungen über die Blattform der *Ranunculaceen* und *Umbelliferen* (Flora 83 Bd, 1897).

[2]) I BECKS Flora von Nieder-Österreich uppgifvas följande lokaliteter: »Auf Weiden, sonnigen, sandigen Triften, unter Buschwerk».

ställning. Bladskifvorna hafva äfven förmåga att vid ihållande torka rulla in sig med kanterna, hvarigenom den morfologiskt undre, rikast hårbärande ytan nästan ensam kommer att bilda den för vindar och sol utsatta ytan. Af den följande framställningen skall det framgå, att växten äfven visar anatomiska xerofiltillpassningar.

GREVILLIUS, [1]) som icke ägnat denna växt någon noggrannare uppmärksamhet, yttrar om dess öfverjordiska delar: »Diese Art wird demzufolge (der kurzen Vegetationsperiode zufolge) noch weniger als die übrigen Knollen- und Zwiebelgewächse von Klimaveränderungen abhängig. Ihr oberirdisches vegetatives System ist in Uebereinstimmung hiermit nur theilweise — in Bezug auf die Behaarung des Stammes und der Blätter — einem trockenen Klima angepasst: sie ist nämlich sehr hoch gewachsen und die Blätter sind theilweise hoch oben an den vegetativ-floralen Achsen befestigt, ohne in dem bei den Alvarpflanzen sonst gewöhnlichen Grade reduciert zu sein». Emellertid torde det af det föregående och skall äfven af det följande framgå, att *Ranunculus illyricus* visar lika många och verksamma tillpassningar till ett torrt klimat som många icke-efemera xerofiler.

Det underjordiska systemets morfologi.

Perenneringsorganet hos denna växt utgöres af en stamknöl, som på hela sin yta är tätt besatt med knöl- eller amrötter. [2]) Såväl knölstammen som knölrötterna äro ettåriga. Amrötterna hafva en växlande form: de äro ibland nästan klotrunda eller valsformade eller rofformade o. s. v. Nya stamknölar bildas dels omedelbart ofvanför den gamla, dels i ändarne af trådsmala utlöpare, hvilka antingen redan på hösten eller först på våren frambryta från knölstammen. Dessa utlöpare,

---

[1]) A. G. GREVILLIUS, Morphologisch-anatomische Studien über die xerophile Phanerogamenvegetation der Insel Oeland. (Englers Bot. Jahrbücher, Bd 23).

[2]) I HARTMAN, Skandinaviens flora (11:te årgången) heter det: »Stjälken vid basen försedd med en rundad samling af små stjälkknölar mellan rottrådarne». Af dessa organs anatomi bl. a. framgår det emellertid otvetydigt, att de äro rötter (se längre ned).

hvilka bildas till ett antal af vanligen 2, stundom endast 1, möjligen stundom också flera än 2, hafva till en början en trubbigt konisk spets, hvarmed de tränga fram genom jorden. Stundom saknas utlöpare, emedan individen icke är stark nog att kunna inträda i förgreningsstadiet. Utlöparne växa ut till en längd af omkring 15 cm. Dock råder ganska stor växling härvidlag, beroende på jordmånens beskaffenhet eller andra omständigheter. Jag har mätt upp utväxta utlöpare, som voro 3,3, 8, 10, 12, 15, 18 cm. långa. Tjockleken är alltid mycket obetydlig, omkring 1/2 mm. På utlöparne sitta små, till en början hvitaktiga, sedan brunaktiga, omslidande fjäll, till ett antal af 2 à 3. När utlöparen nått sin definitiva längd, börjar dess ända att svälla upp, och knölrötter uppkomma på alla sidor om den uppsvällda stolonändan. Till en början bildas endast knölrötter; sedermera, nämligen först på hösten, uppkomma normala rötter ofvanför dessa i samband med utvecklingen af en ny stamknöl. På den uppsvällda utlöparändans, stamknölens, spets anlägges en knopp, hvilken omgifves af en mängd långa hår och dessutom af några fjäll (= lågblad), hvilka troligen slutligen upprispas till hår, genom hvilka den skyddas mot vinterkölden och sommartorkan. Den stamknöl, från hvilken stolonerna utgått, bildar äfven en knopp — terminal, i fall icke blomning egt rum, i annat fall axillär — som gifver upphof åt nästa års skott och som i sitt nedersta parti sväller upp till den nya stamknölen.[1]) Dessutom anläggas i båda fallen, dels på den ursprungliga knölen, dels på knölarne i stolonändarne axillära knoppar, ur hvilka utlöparne framväxa, men de uppkomma liksom de normala rötterna alltid på de till en början

[1]) Då de nya knölarne delvis bildas ofvanför de gamla liksom alltid hos *Ranunculus bulbosus*, så synes det, som om de slutligen skulle komma upp till jordytan. Men förmultningen af den gamla knölen sker mycket hastigt och ganska fullständigt, och den nya knölen sjunker därefter af sin egen tyngd ner på den gamlas plats i det allra närmaste. Hos *R. bulbosus* har man dessutom antagit, att rötterna kontraheras och därigenom sänka knölen, men hos denna art kan det icke blifva tal om någon dylik neddragning, då knölrötterna tydligen icke kunna kontraheras och de normala rötterna äro så svaga, att en kontraktion af dem icke skulle hafva någon effekt.

små dotterknölar, som bildas ofvanför årets egentliga knölar och som först nästa år skola fullständigt utveckla sig. — Rensar man en stamknöl från amrötterna, så synes den öfverallt ärrig, på grund af dessa organs talrikhet. Hela den öfversta delen af knölen är besatt med långa, gulaktiga hår (delvis = upprispade lågblad?).

Enligt G. BONNIER [1]) förekomma liknande krypande underjordiska utlöpare och liknande propagation hos *Ranunculus monspeliacus* L. BONNIER uppgifver, att de underjordiska grenarnes antal rättar sig efter de yttre omständigheternas större eller mindre grad af gynnsamhet. Jag citerar det viktigaste af beskrifningen. »Chaque rejet s'isole par la rupture du rameau grèle qui le porte; le bourgeon qui surmonte la griffe [2]) formée par le faisceau de racines adventives renflées donne une tige fleurie et porte à sa base, à l'aisselle d'écailles engainantes de nouveaux rameaux rampants se terminant par un bourgeon qui porte au-dessus de lui un faisceau de racines adventives renflées où s'accumule une réserve de nourriture.» Som vi finna i hufvudsak samma förhållande som hos *Ranunculus illyricus*.

På liknande sätt förhålla sig enligt samma författare *Ranunculus chærophyllus* och *R. gramineus*, hvars utlöpare likväl stundom äro mycket korta, och *R. Thora*, hos hvilken utlöparne äro ännu kortare. En uppgift hos BONNIER, att *Ranunculus acris* skulle normalt föröka sig genom särskilda underjordiska grenar, måste antingen bero på tryckfel eller förväxling.

När jag första gången observerade *Ranunculus illyricus*, den 2 Juli 1896, voro de nya knölrotskomplexerna i stolonändarne färdigbildade, men inga normala rötter hade ännu uppkommit. Utlöparne voro nästan alldeles vissnade, så att man måste använda stor försiktighet vid uppgräfvandet af fullständiga exemplar. De öfverjordiska delarne voro, såsom förut nämndt, äfven vissnade.

---

[1]) G. BONNIER, Observations sur les *Renonculacées* de la flore de France. (Revue génerale de botanique 1889, T. 1).

[2]) Griffe = knölstam + knölrötter (ett hortikulturuttryck).

Den 26 Maj 1897 fortsattes iakttagelserna på samma ställe, där den förra observationen gjordes, nämligen vid Borgbyborg. Växten uppträdde i ytterst riklig mängd, fastän endast ett fåtal exemplar hade blomknopp. På största delen af de uppgräfda exemplaren funnos utlöpare i alla möjliga stadier, från utlöpare, som ännu befunno sig i tillväxtstadium, igenkänliga på sin smala stolonspets, till sådana, hvars spets börjat svälla (Fig. 2), och utlöpare med några få knölrötter (Fig. 3) eller fullt utbildade knölrotskomplex. I de unga stamknölarnes spetsar sutto 2 tydligt urskiljbara fjäll = de första lågbladen (Fig. 4 o. 5).

På exkursionen den 26 September 1897 observerades, att utlöpare började bildas, att de nya normala rötterna växt fram

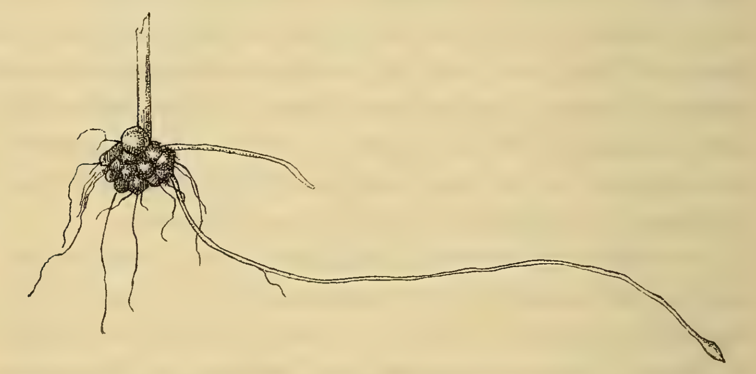


Fig. 2. Nedre delen af växten jämte en utlöpare, som börjat svälla i ändan.

ofvanom den gamla knölen, utgående från den nya, ännu högst obetydligt utvecklade knölen. Lågbladen, som till ett antal af 3 omgifva stamknoppen, hade förlängt sig starkt, så att det öfversta stack upp i själfva jordbrynet. Det första lågbladet är mycket kort och öppet, det andra är längre och äfvenledes öppet, det tredje är längst, hoprulladt och försedt med en hårdare, gulaktig spets (= rudimentär bladskifva) (Fig. 6). Detta hoprullade fjäll omsluter de första örtbladen, af hvilka 2 voro tydligt urskiljbara på de undersökta exemplaren (Fig. 9). Mellan de två första lågbladen och det 3:dje var i ett fall ett långt internodium utveckladt.



Fig. 4 (något förstorad). Den uppsvällda ändan af en utlöpare med knölrötter och lågblad (*l*) (Maj).

Fig. 5. Utlöpareända med fullt utbildade amrötter och lågblad. De senare isärlagda med preparernålen (Maj).

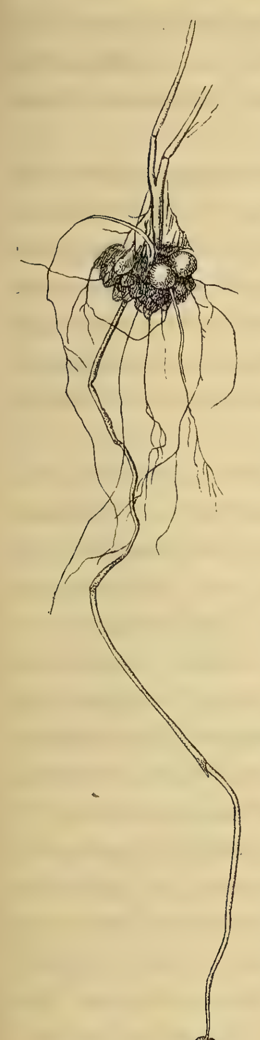


Fig. 3. Nedre delen af växten jämte en lång utlöpare med tydliga lågblad och början amrotbildning i spetsen.

Den underjordiska stammen hos *Ranunculus illyricus* är en ettårig knölstam, såvida man med denna benämning menar en kort och tjock stambildning. HJALMAR NILSSON har i sitt arbete öfver jordstammarne [1]) på biologiska och anatomiska grunder indelat knölstammarne i tvänne hufvudkategorier, eller, riktigare uttryckt, han har reserverat benämningen knölstam endast åt fleråriga knölstammar. Jämför man knölen hos t. ex. *Ranunculus bulbosus* med knölstammen hos t. ex. *Corydalis cava*, så visa sig betydande biologiska och anatomiska skiljaktigheter. Knölen hos *Ranunculus bulbosus* är ettårig, under det att knölen hos *Corydalis cava* är flerårig. Knölarne hos den förra äro leder af ett rizom, som för hvarje år bildar en knöl uppåt, under det att den undre, gamla knölen dör bort. Hos *Corydalis cava* däremot tillväxer

[1]) HJALMAR NILSSON, Dikotyla jordstammar. (Lunds Univ. Årsskrift, T. XXI).

knölen för hvarje är i tjocklek. Skillnaden mellan dessa bildningar har redan beaktats af TH. IRMISCH,[1]) som skiljer mellan Achsenknollen (ettåriga) och Knollenstämme (fleråriga). Likaledes af WARMING.[2])

I HJALMAR NILSSONS system föras de ettåriga knölarne till rizomen, några, såsom *Ranunculus bulbosus*, till de bladiga rizomen, andra, såsom *Solanum tuberosum*, till de fjälliga rizomen, nämligen till undergruppen groddknoppstammar. HJALMAR NILSSON framhåller, att öfvergångarne från sådana bildningar som *Ranunculus bulbosus*' knölar till verkliga sammanhängande rizom och till ej förtjockade, fria årsgenerationer äro så talrika, att inga bestämda gränser kunna dragas.

En viktig anatomisk skillnad finnes äfven mellan de ett- och fleråriga knölarne, hvilken dock ytterst beror af varaktigheten. Hos de förra utgöres knölens öfvervägande, reservnäringen innehållande massa af grundväfnad, märg och barkparenkym, under det att knippena äro föga utvecklade. De fleråriga knölstammarne utmärka sig genom en liflig sekundär tillväxt ur kontinuerliga kambier, och reservnäringen förvaras hufvudsakligen i de genom den kambiala delningen uppkomna parenkymmassorna.

Ranunculus illyricus är tydligen, såsom af det föregående framgår och som äfven anatomien skall utvisa, att hänföra till den grupp i HJALMAR NILSSONS system, för hvilken *Ranunculus bulbosus* anföres såsom typ. Liksom hos denna art uppbygges nämligen knölen hos *Ranunculus illyricus* hufvudsakligen af en rosett assimilerande rotblad och dör bort efter endast en öfvervintring. Men här visar sig dock den olikheten, att hos *Ranunculus bulbosus* rosetten redan anlägges på hösten och således öfvervintrar, under det att hos *R. illyricus* rosetten först utvecklas på våren, åtminstone i vårt klimat. Från *R. bulbosus* afviker den dessutom genom sina utlöpare samt genom den markerade skillnaden mellan amrötter och vanliga rötter.

---

[1]) TH. IRMISCH, Über einige *Fumariaceen*. Halle, 1862.

[2]) E. WARMING, Om Skudbygning, Overvintring og Foryngelse. Naturhist. Forenings Festskrift, Kjøbenhavn, 1884.

En jämförelse mellan *R. illyricus* och *R. bulbosus* framställdes redan af J. SCHMALHAUSEN,[1]) som särskildt påpekar öfverensstämmelsen i rotbildning men också framhåller skillnaden, i det han nämner, att amrötterna hos *R. bulbosus* äro få och föga afvikande från de normala. I stället äro de nedre stam-internodierna hos *R. bulbosus* starkt uppsvällda, under det att stamknölbildningen hos *R. illyricus* icke är så utpräglad.[2]) Dessutom jämför SCHMALHAUSEN rotsystemet hos *R. bulbosus* och *R. illyricus* med detsamma hos *Ficaria verna*. Hos alla tre finnas två slags rötter, tunna, förgrenade, som bildas företrädesvis om hösten, och tjocka, mer eller mindre knölformade, som anläggas om våren. Dock förefinnes den viktiga skillnaden, att hos *Ficaria* amrötterna stå i förbindelse med knoppar, tillsammans med hvilka de affalla och isoleras från moderplantan. Hvad beträffar amrotbildningen hos sistnämnda växt, så stå tvänne meningar mot hvarandra, i det att IRMISCH[3]) anser, att amrötterna anläggas på själfva knoppens stamdel, under det ARESCHOUG[4]) af flera skäl har framställt den meningen, att amroten anlägges på moderstammen och först efteråt genom dennas uppsvällning kommer i förbindelse med knoppen, så att sålunda knoppen och amroten affalla tillsammans med ett stycke af grundaxeln.

Den biologiska öfverensstämmelsen mellan *R. illyricus* och *R. bulbosus* är emellertid ännu större. Hos båda äro nämligen de florala axlarne anteciperade, d. v. s. de komma till utbildning ett år, innan de egentligen skulle uppkommit. En dylik antecipation af florala skott är ingen sällsynthet hos träden, t. ex. hos *Corylus*, *Betula*, *Alnus* m. fl.,[5]) och förekommer äfven

---

[1]) J. SCHMALHAUSEN, Zur Biologie und Morphologie des *Ranunculus bulbosus* und über seine Bastarde mit *Ranunculus acris* und *Ranunculus polyanthemos*. (Über Pflanzenhybriden, Diss., Petersburg 1874.) Denna afhandling känner jag endast genom referat i JUSTS Bot. Jahresbericht.

[2]) Detta beror dock något på, vid hvilken tid man undersöker stamknölen.

[3]) TH. IRMISCH, Beiträge zur vergleichenden Morphologie der Pflanzen, I Abtheilung, Halle.

[4]) F. W. C. ARESCHOUG, Bidrag till groddknopparnes morfologi och biologi.

[5]) Jmfr F. W. C. ARESCHOUG, Beiträge zur Biologie der Holzgewächse (Lunds Univ. Årsskrift, T. XII, Lund 1877) samt samme författares Betrachtungen

hos många örter, t. ex. flera *Geranium*-arter, *Anemone hepatica*, *Primula officinalis*, *Pulsatilla vulgaris* m. fl. [1]) Denna antecipering står i många fall i samband med en tidig blomning och kan däraf förklaras. Så är uppenbarligen fallet med de hanliga dvärggrenarne hos *Corylus*- och *Betula*-arter och de hanliga och honliga dvärggrenarne hos flera *Alnus*-arter, hvarest antecipationen till och med går så långt, att blomställningen framträder ur knoppen på hösten eller sommaren och öfvervintrar naken.

En dylik anteciperad utveckling af den florala axeln träffas som nämndt äfven hos *R. bulbosus*, hvilket påpekats af Hjalmar Nilsson. Undersöker man ett stånd af R. bulbosus på hösten, så finner man en fullt utvuxen knöl, från hvars spets eller sidor bildats en eller flera rosetter. Dessa förse sig vid basen med rötter och börja så småningom att svälla upp nertill. Men denna nya knöl, det nya skottets knöl, blir icke färdigbildad förrän efter blomningen nästa sommar, och den florala axeln måste därför betraktas som anteciperad, emedan den ju egentligen först skulle kommit efter det vegetativa systemets fullständiga utveckling.

Undersöker man en stamknöl af *R. illyricus* i början af Juli månad, finner man densamma fullt utvecklad, under det att den florala (eller rättare vegetativt-florala, liksom hos *R. bulbosus*) har vissnat. Det ser alldeles ut, som om knölen vore den florala axelns förtjockade basalparti. Vid slutet af sommaren, i September, ser man en ny knöl uppkomma ofvanför den gamla. Den nya knölen, som till en början är mycket obetydlig och som icke blir fullständigt utvecklad förrän efter blomningen, alstrar genast normala rötter och utlöpare (Fig. 8 och 9). I Maj månads slut strax före blomningen har den nya knölen försett sig med amrötter och något tillvuxit i tjocklek (Fig. 6). Uppenbarligen råder här samma antecipering af den florala axeln som hos *R. bulbosus*. Moderknölen alstrar ofvan-

---

über die Organisation und der biologischen Verhältnisse der nordischen Bäume (Engl. bot. Jahrbücher, Bd. IX, 1888).

[1]) Jmfr Hj. Nilsson, anf. arbete.

för sig en dotterknöl, hvilken icke når fullständig utveckling, innan den därifrån utgående axeln redan blommat och förvissnat. Knölen kan icke helt enkelt blott uppfattas såsom den florala axelns förtjockade basalparti, emedan knölar ju äfven finnas på de växtstånd, som ännu icke drifvit en blommande stjälk. Tillväxten är till en början, innan ännu plantan blommat, monopodial och blir efter den första blomningen sympodial, såsom redan framhållits af IRMISCH.

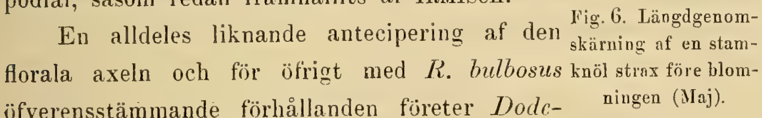


Fig. 6. Längdgenomskärning af en stamknöl strax före blomningen (Maj).

En alldeles liknande antecipering af den florala axeln och för öfrigt med *R. bulbosus* öfverensstämmande förhållanden företer *Dodecatheon Meadia* enligt FOERSTES iakttagelser.[1]) *Geranium tuberosum* hör till samma grupp som de nu nämnda växterna, ehuru, såsom HJALMAR NILSSON iakttagit på krukexemplar, det nya vegetativa skottet är så pass utbildadt redan på hösten, att man knappast behöfver kalla den florala axeln anteciperad. Ett liknande förhållande tyckes äfven stundom förekomma i naturen, att döma af följande yttrande hos



Fig. 7. Längdgenomskärning af en stamknöl efter blomningen (början af Juli).

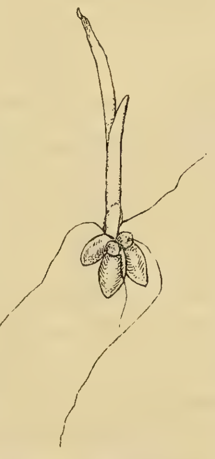


Fig. 8. En *Ranunculus illyricus*-planta i September med amrötter, normalrötter och tre lågblad, af hvilka det öfversta, hoprullade bär en rudimentär skifva.

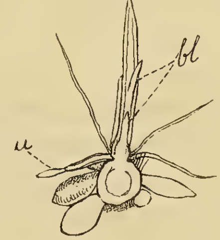


Fig. 9. Längdgenomskärning genom knölen i September. På denna figur synes, att en ny knöl har börjat bildas ofvanför den gamla. Från denna nya knöl, 1898 års knöl, utgå normala rötter och en utlöpare (*u*). Öfverst på figuren synes det 3:e genomskurna lågbladet och de af detta omslutna första örtbladen (*bl*); underst synas rester af den förmultnade 1896 års knöl.

[1]) Bulletin of the Torrey Botanical Club. Vol. XI, n:o 3, New York 1884.

IRMISCH: [1]) »Für die diesjährigen Sprosse, resp. *Triebe* (*d. h. Sprossfortsätze*), [2]) nachdem sie ihre Knollenachse ausgebildet haben, hat die vorjährige Knollenachse keine Bedeutung mehr.» Uttrycket Sprossfortsätze innebär, att det skott, som skall blomma under året, redan föregående år hunnit en viss grad af utveckling. Dock når äfven här det vegetativa skottet, d. v. s. knölen, först efter blomningen sin definitiva utveckling. Enligt WARMING [3]) och IRMISCH [4]) träffas samma utveckling hos flera monokotyla växter, såsom *Crocus*, *Gladiolus*, *Arum maculatum*, *Colchicum autumnale*. Äfven här är knölen det förra årsskottets vegetativa stamdel, som förtjockas till amorgan för årets skott.

Det öfverjordiska systemets anatomi.

Stjälken.

Stjälken omgifves af en epidermis, på hvilken både ytter- och innerväggar äro förtjockade. Ytterväggen är icke kutiserad. Epidermis är beklädd med långa hår, liknande dem, som bekläda bladen, hvilka bilda ett silfverglänsande filtludd. Barken består af små rundade celler. Kärlknippena bilda icke en sammanhängande ring och hafva ingen kambial tillväxt. Leptomet omgifves ringformigt af segbastet, hvilket bildar en rätt mäktig massa på kärlknippets yttre del. Märgen består af storlumiga celler men är ofta mer eller mindre resorberad.

A. MEYER [5]) har i WIGANDS Botanische Hefte behandlat en hel mängd *Ranunculacéers* och äfven åtskilliga *Ranunculus*-arters stamanatomi. Angående *Ranunculus*-arternas stamanatomi

---

[1]) TH. IRMISCH, Beitrag zur Morphologie einiger europäischen *Geranium*-arten, insbesondere des *Geranium sanguineum* und *Geranium tuberosum* (Bot. Zeitung 1874).

[2]) Kurs. af mig.

[3]) Anf. arbete.

[4]) Zur Morphologie der monokotylischen Knollen- und Zwiebelgewächse, Berlin 1850.

[5]) A. MEYER, *Ranunculaceæ* i Beiträge zur anatomischen Systematik (WIGANDS Botanische Hefte, Marburg 1885).

säger förf.: »Zwei anatomische Merkmale spielen bei der Characterisirung der *Ranunculus*-Species eine Hauptrolle: der vorher schon so vielfach erwähnte Festigungsring und die hier im Verein mit ihm auftretende, sich um die Gefässtheile der Bündel herumziehende Strangscheide, die bei den Landspecies verdickt und verholzt, bei den Wasserspecies nur angedeutet ist.» En sammanhängande mekanisk ring saknas emellertid hos *R. illyricus*, så att denna art i detta afseende afviker från de arter, MEYER undersökt. Hvad den andra uppgiften beträffar, att hadromet skulle vara omgifvet af en förvedad slida, så är det möjligt, att så förhåller sig. Jag har sett dylika förtjockade och förvedade celler mellan hadromet och leptomet, och det är mycket möjligt, att de ringformigt omgifva hadromet. Jag har för närvarande icke lämpligt undersökningsmaterial till hands, men jag anser icke frågan ha någon så stor betydelse, att den är värd ett uppskof. Min beskrifning af kärlknippena i bladskaften talar för förekomsten af en dylik slida. I så fall är den föregående uppgiften: »leptomet omgifves ringformigt af segbastet» naturligtvis icke fullt riktig.

Bladet.

Bladen visa en olika anatomisk byggnad, beroende på deras läge, i det att stjälkbladen äro isolaterade, under det att rotbladen äro bifaciala, hvilket förhållande måste uppfattas som en xerofil tillpassning. Det är endast de för vinden mest utsatta bladen, som hafva pallisadparenkymet utveckladt på båda sidor. Ett tvärsnitt genom ett *stjälkblads midtelflik* visar, att den undre öfverhudens yttervägg är förtjockad, mest i kanten och rakt under kärlknippena, dock icke kutiserad. På den öfre sidan är däremot öfverhudsytterväggen ytterst tunn. Den undre bladytans epidermisceller äro sträckta i bladets längdriktning och hafva något undulerade mellanväggar. Klyföppningarne äro ordnade parallelt med medelnerven. De på denna sida sittande håren äro tätare än de på öfversidan belägna. Håren äro långa, solida, framåtriktade och ligga ursprungligen rakt utsträckta,

men kunna sedan hopfiltas. Den öfre ytans epidermisceller och klyföppningar likna den undre ytans; de senare äro dock talrikare; håren äro som nämndt glesare. — Mesofyllet är isolateradt, med 1 lager pallisader på den öfre och 1 på den undre sidan. Pallisaderna på den undre sidan äro dock kortare än på den öfre.

Den isolaterade byggnaden, den på undersidan förtjockade ytterväggen och rikare hårigheten, den talrikare förekomsten af klyföppningar på den öfre ytan, alla dessa egenskaper äro att uppfatta som xerofila anpassningar; de tre sist anförda förhållandena stå i samband med bladets förmåga att rulla in sig med kanterna vid starkare torka.

Ett tvärsnitt genom ett *3-deladt rotblads midtelflik* visar, att detta har en bifacial byggnad, men i det understa mesofylllagret uppenbarar sig här och där tendens till pallisadbildning. På den öfre sidan förekommer ett lager af pallisader. Det undre epidermislagret har endast obetydligt förtjockad yttervägg. De större kärlknippena ha bastbeläggning på båda sidor.

De enkla rotbladen ha äfven en bifacial byggnad, och deras undersidas epidermisytterväggar äro högst obetydligt förtjockade.

Af bladskaftets anatomi förtjänar följande att framhållas. Epidermis har starkt förtjockade ytter- och innerväggar. De kretsformigt anordnade kärlknippena hafva jämväl mekaniska fibrer innanför leptomet, så att detta blir ringformigt omslutet liksom i stjälken, och därjämte en beläggning af tunnväggiga, förvedade mekaniska element innanför hadromet ut mot märgen till.

Det underjordiska systemets anatomi.

Stamknölen.

Stamknölens hufvudmassa utgöres af grundväfnad. Märgen, som är mest utvecklad, består af stora, rundade, stärkelseförande celler. Barken utgöres af mindre celler och för äfven rikligt stärkelse. Mellan bark och märg ligger kärlknippekretsen, som

till följd af de många utgreningarne till amrötter, normala rötter och stoloner ter sig tämligen oregelbunden. Bastfibrer uppträda såväl på in- som utsidan af de särskilda kärlknippena. Stora bastknippen ligga midtför de ställen, där kärlknippena till amrötterna grena ut sig. Knölen täckes ursprungligen af en epidermis, men denna ersättes snart af under denna väfnad uppkommande korklager, hvilka icke bilda någon synnerligt mäktig väfnad. Knölens hela öfre parti täckes med långa hår.

Utlöparen.

Ett tvärsnitt genom en ung, frisk, växande utlöpare visar ytterst en tämligen smålumig epidermis med något förtjockad yttervägg af cellulosa, en grundväfnad, som är differentierad i bark och märg, och mellan dem ett något växlande antal kärlsträngar (3, 4, 5). De närmast kärlknippena belägna grundväfnadscellerna föra stärkelse. Hvarje kärlknippe omgifves af strängslideartade celler. Kärlknippena äro små: hadromet utgöres endast af ett fåtal kärl, och äfven leptomet är föga utveckladt.

I en äldre, utvuxen utlöpare saknas stärkelse alldeles. Kärlknippena äro något större, och hvarje kärlknippe är omgifvet af en mekanisk slida af 2, 3 eller flera starkt förvedade cellager. Slutligen resorberas grundväfnaden.

Rötterna.

Den *normala roten* består utifrån inåt af följande väfnader: epidermis med rothår, exodermis, bark af rundade celler, endodermis, perikambium och egentligt kärlknippe. Endodermis och perikambium äro förtjockade och förvedade, åtminstone i den äldre roten. Kärlknippet har ett varierande antal ved- och leptomstrålar (di-, tri-, tetrarkt). Hos O. LOHRER [1]) finnes en ofullständig beskrifning af rotens anatomi hos denna växt. Det heter: »Die Fadenwurzeln von *R. muri-*



Fig. 10. Leptomknippe i roten med omgifvande perikambium och endodermis.

[1]) O. LOHRER, Beiträge zur anatomischen Systematik, (Diss., Marburg 1886).

catus und *R. illyricus* gleichen denen von *Ficaria ranunculoides*», och denna växts rotbyggnad uppgifves vara triark. Vidare nämnes, att kärlknippena äro förenade i midten och att bastprosenkym saknas. Emellertid är hadrom- och leptomstrålarnes antal ingalunda konstant, såsom nämndt, hos denna *Ranunculus*-art.

Amrötterna hafva alldeles samma väfnadslagring som de normala rötterna: alltså epidermis, exodermis, bark, endodermis, perikambium och egentligt kärlknippe. Hadrom- och leptomstrålarne mötas icke i midten, så att man kan tala om en obetydlig märg. Hvad som utgör den egentliga skillnaden är den kolossala utvecklingen af barkparenkymet,[1]) hvilket betingar rotens betydliga tjocklek. Dessutom äro aldrig endodermis och perikambium förtjockade eller förvedade. Barkcellerna äro fullproppade med stärkelsekorn. Epidermis består af i genomskärning ganska plattade celler, hvilket står i samband med organets betydande tillväxt i tjocklek. Exodermis har i genomskärning kvadratiska celler, hvilka äro resistenta mot koncentrerad svafvelsyra. Kärlknippet är ytterst litet och visar växlande talförhållanden (tri-, tetrarkt).

Angående knölrotens anatomi hos denna växt uppgifver LOHRER: »Die Knolle besitzt ebenfalls Wurzeltypus und ist triarchisch.» Ordet »Knolle» är ett något tvetydigt uttryck, då, såsom jag visat, det både finnes en knölstam och knölrötter, men förf. menar tydligen knölrötterna. Uppgiften om vedstrålarnes antal är ofullständig.

Rotstrukturen hos *R. illyricus* öfverensstämmer i det närmaste med den beskrifning P. MARIÉ[2]) lämnar af rötterna hos *R. chærophyllus* L., hvilken art tillhör samma grupp som *R. illyricus*. Hos *R. chærophyllus*[3]) äro rötterna uppsvällda vid basen, medan resten af roten har vanligt trådlikt utseende. Den trådlika delen af roten öfverensstämmer i sin byggnad med de

---

[1]) Detta förhållande framhålles redan af IRMISCH, som jämför denna växts rotanatomi med *Ficaria vernas*.

[2]) P. MARIÉ, Recherches sur la structure des *Renonculacées*, Paris 1884.

[3]) Jmfr äfven G. BONNIER, Observations sur les *Renonculacées* de la flore de France (Revue gén. de bot. 1889, t. 1).

normala rötterna hos *R. illyricus*. Så äro t. ex. perikambium och endodermis förtjockade och förvedade. Den knölformiga delen af roten liknar i sin konstruktion knölroten hos *R. illyricus*. [1])

MARIÉ beskrifver äfven rotbyggnaden hos två andra arter, *R. millefoliatus* VAHL och *R. flabellatus* DESF. Hos båda finnas både trådlika och knölformiga rötter. Hvad de senare beträffar, öfverensstämma de i väsentliga drag i sin byggnad med den knölformiga delen af *R. chærophyllus*' rötter. Hos *R. flabellatus* är märgen förvedad, hos *R. millefoliatus* oförvedad. I de trådlika rötterna mötas hadromstrålarne i midten.

En liknande anatomisk byggnad (mäktig utveckling af den primära barken och långt drifven reduktion af centralcylindern) finnes äfven i knölrötterna hos *R. asiaticus* enl. A. SEIGNETTE [2]) och hos *R. monspeliacus* och *R. Thora* enligt G. BONNIER. [3])

Utbredning.

Ranunculus illyricus tillhör en grupp af *Ranunculus*-arter (subsp. *Ranunculastrum*), utmärkt bland annat genom amrotbildning, som har sin hufvudsakliga utbredning i Medelhafsområdet. Till denna grupp höra bl. a. *Ranunculus orientalis* L., *R. isthmicus* BOISS., *R. chærophyllus* L., *R. monspeliacus* L., *R. rumelicus* L., *R. creticus* L., *R. asiaticus* L. m. fl. *Ranunculus illyricus* förekommer enligt NYMANS Conspectus floræ europææ i Österrike, Södra och Mellersta Italien (sällsynt), Dalmatien, Herzegovina, Montenegro, Kroatien, Ungarn, Serbien, Thracien, Södra Ryssland och Sverige. Dessutom förekommer den på ett par punkter i mellersta Tyskland. Arten saknas helt och hållet i västra Europa och i länderna kring Östersjön. I vårt land förekommer den som bekant endast på Öland, där den har sin hufvudsakliga utbredning längs de båda landborgarne.

---

[1]) Dock afviker den genom förekomsten af en central grupp af mekaniska fibrer i den uppsvällda delen.

[2]) A. SEIGNETTE, Recherches sur les tubercules (Revue gén. de bot. 1889, t. 1).

[3]) Anf. arbete. Märgen är i dessa arters rötter vanl. oförvedad.

Här och där kan den äfven förekomma ett stycke in på Alfvaret, men endast på obetydligt afstånd från endera landborgen och i detta fall nästan alltid steril. A. AHLQVIST[1]) uppgifver *Ranunculus illyricus* på följande lokaler: Borgbyborg (spridd), Skogsby bet, Glömminge backe (nog ymnigt), mellan Hulterstads kyrka och Triberga by, på sandbacken nära Sandby kyrka. SJÖSTRAND[2]) lämnar följande uppgifter om dess utbredning: »Förekommer såväl på östra som västra landborgen och på åkrar och fält, som gränsa därintill, t. ex. vid Runsten, N. Möckleby, Sandby, Gårdby, Hulterstad, Segerstad, Strandtorp i Repplinge socken, Glömminge, Thorslunda, Wickleby, Resmo, Kastlösa. På odlad mark invid Alfvaren förekommer den nästan alltid, t. ex. mellan Thorslunda och Resmo. På Wickleby och Resmo kyrkogårdar etc. På själfva Alfvaren o. a. skarpa ställen är den vanligast steril. Norr om Köpinge förekommer den icke.» Själf har jag iakttagit den vid Borgbyborg, på landborgen strax söder om Resmo (i stor mängd men steril) samt på Resmo kyrkogård, där den växer utmed inhägnaden i ståtliga exemplar.

Vid Borgbyborg förekommer *Ranunculus illyricus* i följande växtsamhälle: *Hutchinsia petræa*, *Potentilla verna*, *Holosteum umbellatum* (i frukt, nästan vissen), *Myosotis collina*, *Valerianella olitoria*, *Taraxacum officinale* (enstaka), *Sedum acre*, *Sedum album*, *Saxifraga tridactylites*, *Poa bulbosa*, *Artemisia campestris*, *Fragaria collina*, *Saxifraga granulata*, *Medicago falcata*, *Viola hirta*, *Festuca ovina*, *Bromus mollis*, *Draba verna*, *Scleranthus* sp., *Allium* sp., *Cotoneaster vulgaris* (enstaka), *Thymus serpyllum*, *Veronica arvensis*, *Veronica hederæfolia*, *Plantago lanceolata*, *Geranium molle*, *Silene nutans*, *Primula officinalis*, *Pulsatilla pratensis*, *Poa pratensis*, *Oxytropis campestris*, *Rosa canina* (enstaka), *Prunus spinosa* (enstaka), *Avena pubescens*, *Ranunculus bulbosus*, *Linaria vulgaris* o. s. v. Ståndortsanteckningen gjordes den 26 Maj 1897.

---

[1]) A. AHLQVIST, Anmärkningar om Ölands fysiska beskaffenhet och vegetation (Kgl. Vet. Akad. Handl. 1822).

[2]) M. G. SJÖSTRAND, Calmar läns och Ölands flora, Calmar 1863.

Hvad beträffar den förmodade tiden för *Ranunculus illyricus'* invandring, så räknas denna art af ARESCHOUG [1]) till den Kaukasiska eller Medelhafsfloran, hvilken samtidigt med boken skulle invandrat till Sverige, af KJELLMAN [2]) till hans fjärde utvecklingshistoriska grupp eller steppväxterna, dit äfven många andra för Alfvaret egendomliga former hänföras, såsom *Artemisia rupestris*, *Artemisia laciniata*, *Helianthemum ölandicum*, *Linosyris vulgaris* m. fl.

Fig. 1, 2 och 3 äro ritade af ritläraren J. J. SILVÉN, de öfriga af förf.

---

[1]) F. W. C. ARESCHOUG, Bidrag till den skandinaviska vegetationens historia (Lunds univ. årsskrift 1866).

[2]) F. R. KJELLMAN, Skandinaviska fanerogamflorans utvecklingshistoriska element. — Öfvertryck efter offentliga föreläsningar 1886.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 86.)

Krakau. *Académie des sciences.*
Rocznik. Rok 1896/97. 8:o.
Rozprawy. Wydział hist.-filozoficzny. (2) T. 11. 1897. 8:o.
Bulletin international. 1897: 11—12. 8:o.
Scriptores rerum polonicarum. T. 16. 1897. 8:o.
Materyały do klimatografii Galicyi. Rok 1896. 8:o.
PIEKOSIŃSKI, F., Rycerstwo polskie wieków średnich. T. 1—2. 1896. 8:o.
— *K. K. Sternwarte.*
Meteorologische Beobachtungen. 1896: 1—12. 8:o.
Kremsmünster. *Sternwarte.*
Beiträge zur Witterungskunde v. Oberösterreich im Jahre 1896. Linz 1897. 8:o.
Kristiania. *Det norske Justervæsen.*
Aarsberetning. 20, 21 (1897). 8:o.
— *Norwegisches meteorologisches Institut.*
Jahrbuch. 1896. 4:o.
— *Editorial Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition.*
Den norske Nordhavs-expedition 1876—78. 24. 1897. 4:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 24: N:o 2. 1898. 8:o.
Berichte. Phil.-Hist. Cl. 1897: 1. 8:o.
» Math.-phys. Cl. 1897: 4. 8:o.
Namen und Sachregister der Abhandlungen und Berichte der math.-phys. Cl. 1846—1895. 1897. 8:o.
— *Naturforschende Gesellschaft.*
Sitzungsberichte. Jahrg. 22—23. 1895—96. 8:o.
Liège. *Société géologique de Belgique.*
Annales. T. 24 (1897/98): Livr. 2. 8:o.
Liverpool. *Biological society.*
Proceedings and transactions. Vol. 11 (1896/97). 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1897): P. 5. 8:o.
— *Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 58 (1897/98): N:o 1—2. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): 12; 73—74 (1898): 1. 8:o.
Proceedings. Session 1897/98: N:o 185—187. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 53 (1897): P. 4. 8:o.
List. 1897. 8:o.

(Forts. å sid. 121.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 2.
Stockholm.

Das System der Synaptiden.

Von Hjalmar Östergren.

(Vorläufige Mitteilung).

[Mitgeteilt den 9 Februar 1898 durch Hj. Théel.]

Bei dem Bestimmen einer grösseren Zahl von Arten der Gattung *Synapta* glaubte ich zu finden, dass die bisher versuchten Einteilungen dieser grossen Gattung nicht ganz befriedigen. Bei dem Versuche, eine bessere zu gewinnen, wurde meine Aufmerksamkeit besonders auf die Verschiedenheiten im Baue des Gelenkendes der Ankerplatten gerichtet. Nach ihnen liess sich die Gattung in 5 Gruppen einteilen, und es zeigte sich, dass diese auch durch andere, zum Teil sehr wichtige Charaktere zu unterscheiden sind. Infolgedessen sah ich mich veranlasst, aus diesen 5 Gruppen 5 neue Gattungen zu bilden.

Da ich auch in Bezug auf die Begrenzung einiger anderen Synaptiden-Gattungen eine von den Auffassungen früherer Forscher abweichende Ansicht hege, liefere ich hier eine Zusammenstellung sämtlicher Gattungen der Familie der Synaptiden.

I Synaptinæ.

Fühlerstamm schmal, nicht nach oben breiter werdend, entweder nur an der Spitze Nebenäste tragend, deren es jederseits nur 1 oder 2 giebt (Tentacula digitata), oder aber an dem gröss-

ten Teil seiner Länge mit solchen besetzt (Tentacula pinnata). Kalkkörper fast immer Anker und Ankerplatten, ausserdem gewöhnlich sogen. Hirseplättchen, selten (*Anapta*) nur solche. Hakenförmige Stäbchen fehlen immer, ebenso Rädchen. — So weit bekannt Sämtliche Zwitter.

1. **Euapta** n. g.

Fühler federförmig mit zahlreichen Nebenästen. Rückziehmuskeln vorhanden. Knorpelring fehlt. Zahlreiche Poli'sche Blasen. Die Handhabe[1]) *des Ankers verzweigt, die Ankerarme glatt, die Mitte des Bogens mit 1 oder 2 Gruppen kleiner Zäpfchen besetzt* (Fig. 2). *Das freie Ende der Ankerplatte mit einem grossen centralen Loch, welches 6 (selten, infolge Teilung des untersten, 7) andere grosse Löcher umgeben. Von diesen ist das an das Gelenkende grenzende — das »Grenzloch» — von einem über die übrige Platte sich erhebenden Bügel überbrückt, welcher von 4 der Platte entspringenden Stützen getragen wird.*

Bei allen bekannten Arten dieser Gattung ist die typische Zahl der Fühler 15, indes schwankt sie zwischen 13 und 17. Die Löcher des freien Endes der Ankerplatte sind bezahnt, das »Grenzloch» jedoch nur in seinem inneren Teile (selten ganz glattrandig). Die Zähne um die übrigen 6 (7) Löcher in dem freien Ende liegen in 2 verschiedenen Ebenen, die einen in der Ebene der äusseren (dem Anker zugekehrten) Oberfläche der Ankerplatte, die anderen in der Ebene der inneren Fläche derselben. Die letzteren umrahmen nur die halbe Peripherie, die der Aussenseite aber den ganzen Umfang der Löcher, wobei indes diejenigen Zähne, welche den dem Mittelpunkte der Platte näher gelegenen Teilen der Lochumrandung angehören, kleiner sind, als die übrigen. Der Bügel ist immer glatt.

---

[1]) Zu der Benennung der verschiedenen Teile des Ankers und der Ankerplatte vgl. die Darstellung LUDWIGS in »Bronn's Klassen und Ordnungen», oder Verf. »Über die Function der ankerförmigen Kalkkörper der Seewalzen» (Zool. Anzeiger N:o 530, 1897).

Diese Gattung zerfällt in 2 Sektionen.

A. Steinkanal nur 1, oder allenfalls sehr wenige, dorsal gelegene. Das Gelenkende der Ankerplatte hat ausser einigen kleinen Löchern 2 grössere, die Seitenlöcher des Gelenkendes, je eins seitwärts vom Grenzloch und wie dieses von dem Bügel überspannt. Das äussere Ende des Grenzloches zugespitzt (Fig. 1).

Drei Arten: *godeffroyi* (SEMP.), *lappa* (J. MÜLL.) und *polii* (LUDW.).

B. Zahlreiche Steinkanäle, ringsum den Ringkanal verteilt. Die Seitenlöcher des Gelenkendes fehlen infolge des Schwundes der sie nach aussen begrenzenden Kalkleiste. (Die Fig. 9 stellt ein abnormes Gelenkende dar, dessen eines Seitenloch entwickelt ist.) Das Grenzloch nicht zugespitzt.

Drei Arten: *glabra* (SEMP.), *grisea* (SEMP.) und *serpentina* (J. MÜLL.).

2. **Chondrocloea** n. g.

Fühler federförmig mit mindestens 5 Nebenästen jederseits des Stammes. Rückziehmuskeln vorhanden (ausser — nach SEMPER — bei *C. nigra). Hinter dem Kalkring findet sich immer ein sogen. Knorpelring. Gewöhnlich zahlreiche, selten nur 3, Poli'sche Blasen. Der Anker mit unverzweigter Handhabe, sonst wie bei der vorigen Gattung, mit welcher diese auch betreffs der Anordnung der grösseren Löcher der Ankerplatte übereinstimmt. Den Bügel tragen nur 2 Stützen.*

Innerhalb dieser Gattung schwankt die Zahl der Fühler zwischen 10 und 27. Wie die Gattung *Euapta* kann auch diese in 2 Sektionen geteilt werden.

A. Steinkanal 1, unverzweigt. Ankerplatten denen der ersten Sektion der Gattung *Euapta* ähnelnd, aber von ihnen (ausser durch die Zahl der Bügelstützen) leicht dadurch zu unterscheiden, dass die Bezahnung der grossen Löcher auch auf der Aussenseite der Platte auf den halben Umfang der Löcher be-

schränkt ist. Ausserdem ist der Bügel gewöhnlich bedornt. Das Grenzloch ist oft ganz glatt, was indes kaum irgendwelche systematische Bedeutung hat, da die Platten in dieser Hinsicht oft unter sich bei einem Individe abweichen.

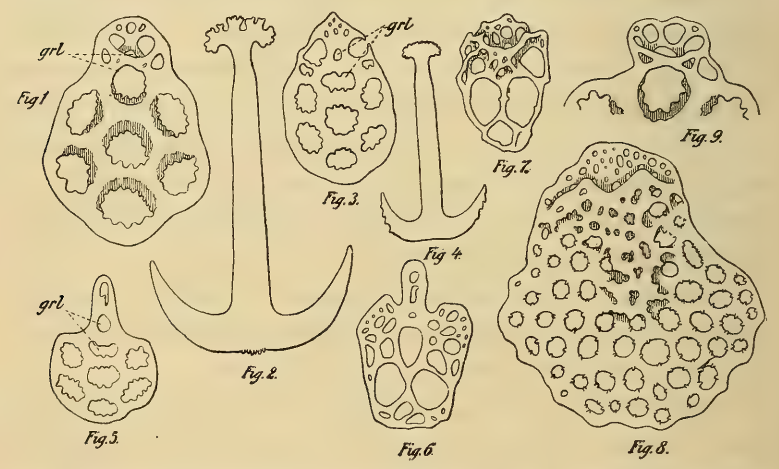
Zwölf Arten: *indivisa* (SEMP.), *kallipeplos* (SLUIT.), *kefersteini* (SEL.), *lactea* (SLUIT.), *nigra* (SEMP.), *orsinii* (LUDW.), *psara* (SLUIT.), *recta* (SEMP.), *reticulata* (SEMP.), *striata* (SLUIT.), *tenuis* (QUOY u. GAIM.) und *vivipara* (OERST.).

B. Ein Steinkanal (selten ein paar) verzweigt. Die grossen Löcher der Ankerplatte wie bei den vorhin angegebenen Arten geordnet (das unterste ist aber gewöhnlich in 2 Löcher geteilt, was bei jenen selten ist); sie sind jedoch unbezahnt, und ausser ihnen giebt es in der Peripherie der Platte eine grosse Zahl kleinerer, ebenfalls unbezahnter, unregelmässig angeordneter Löcher.

Eine Art: *beselii* (JÄG.).

3. **Synapta** (ESCHSCHOLTZ).

Fühler federförmig; jederseits des Stammes mindestens 4 Nebenäste. Rückziehmuskeln und Knorpelring fehlen. Poli'sche



1 u. 2, Ankerplatte und Anker von *Euapta lappa*. 3 u. 4, Ankerplatte und Anker von *Synapta inhærens*. 5—8, Ankerplatten von *Labidoplax tenera* (5), *L. digiata* (6), *Protankyra challengeri* (7) und *P. asymmetrica* (8). 9, Gelenkende (abnorm) von Ankerplatte bei *Euapta glabra*. — grl in Fig. 1, 3 u. 5, Grenzloch.

Blase 1, selten (S. inhærens) 1—3. Die Handhabe des Ankers unverzweigt, die Ankerarme mit Zähnchen besetzt, die Mitte des Bogens ohne Zäpfchen (Fig. 4). *Die Löcher der Ankerplatte in der Regel wie bei den vorigen Gattungen, mitunter aber unregelmässiger geordnet und weit zahlreicher, als bei jenen. Die seitlichen Teile des Bügels sind gewöhnlich ein wenig über die Seitenlöcher des Gelenkendes erhaben, seine mittlere Partie liegt aber ganz in der Ebene der Platte, das Grenzloch in zwei Teile zerlegend. Deshalb fehlen die Bügelstützen gänzlich* (Fig. 3).

Hierhergehörende Arten haben fast immer 12 Fühler, eine mir vorliegende neue Art aus Norwegen jedoch nur 10. Ausser den Löchern in dem freien Ende der Platte sind in der Regel auch noch das Grenzloch und die Seitenlöcher des Gelenkendes zum Teil bezahnt. Da der Bügel nicht über der Platte erhaben ist, verdient er vielleicht eigentlich den Namen Bügel nicht. Er ist indes offenbar mit dem Bügel der vorigen Gattungen homolog. Das Gelenkende der Platte ist schwach nach hinten gekrümmt und konkav (um den als Gelenkkopf dienenden Längskiel des Ankers festzuhalten).

Sieben Arten: *albicans* SEL., *gracilis* SEL., *inhærens* (O. F. MÜLL.), *macrankyra* LUDW., *ooplax* V. MARENZ, *pourtalesii* SEL. und *roseola* (VERR.). Von diesen umfasst *S. inhærens* eine Menge verschiedener Formen, unter denen mehrere zweifelsohne gute Arten sein dürften.

4. **Labidoplax** n. g.

Fühlerstamm mit jederseits nur 1 oder 2 Nebenästen. Rückziehmuskeln und Knorpelring fehlen. Poli'sche Blasen nur bei L. dubia mehr als 1. Der Anker wie bei der vorigen Gattung, die Ankerarme sind jedoch zuweilen (obwohl selten) glatt. Das Gelenkende der Ankerplatte zu einem schmalen Griff umgebildet. Kein über der Platte erhabener Bügel.

Fühlerzahl 11 oder 12. Bei den von mir untersuchten Arten (alle bekannten ausser *L. dubia*) ist der Plattengriff schwach nach aussen gebogen, der Handhabe des Ankers dicht anliegend.

Diese Gattung steht der folgenden so nahe, dass sie ihr vielleicht als ein Subgenus unterzuordnen sein möchte. Allerdings ist der Unterschied in Bezug auf die Ankerplatten beträchtlich. Die bei *Labidoplax* auftretenden können immer noch auf denselben Typus wie diejenigen der vorhergehenden Gattungen zurückgeführt werden. Zwei an der Basis des Plattengriffs gelegene Löcher entsprechen zusammen dem Grenzloch, und die dazwischen liegende Kalkleiste entspricht dem mittleren Teil des Bügels.

Die Gattung *Labidoplax* kann in 2 Gruppen geteilt werden.

A. Fühlerstämme mit jederseits nur 1 Nebenast. Die Löcher in dem freien Ende der Ankerplatten 7, bezahnt und wie diejenigen bei *Euapta* geordnet (Fig. 5).

Eine Art: *tenera* (NORM.).

B. Fühlerstämme mit jederseits 2 Nebenästen. Die Löcher der Ankerplatten mehr unregelmässig geordnet, glatt (Fig. 6).

Vier Arten: *digitata* (MONT.), *dubia* (SEMP.), *incerta* (LUDW.), und *thomsonii* (HERAPATH).

5. **Protankyra** n. g.

Fühlerstämme mit jederseits 2 Nebenästen. Rückziehmuskeln und Knorpelring fehlen. Poli'sche Blasen, wo ihre Zahl bekannt ist, mehrere (bei P. similis jedoch zuweilen nur eine). Der Anker wie bei der vorigen Gattung, nur ist die gewöhnlich sehr breite Handhabe mitunter verzweigt. Ankerplatten mit unregelmässig geordneten Löchern, ohne Griff. Fast immer ein unregelmässig verzweigter, über der Platte erhabener Bügel, welcher an mehreren Stellen mit ihr vereint ist.

Fühlerzahl (wo bekannt) 10—13. Die Löcher der Ankerplatte sind gewöhnlich zahlreich, bezahnt oder glatt (Fig. 8). Bei *P. challengeri* giebt es ihrer jedoch nur wenige (Fig. 7), diese können aber hier, wie bei den übrigen Arten, nicht oder nur schwierig mit bestimmten Löchern der Platten anderer Gattungen homologisiert werden. *P. molesta* entbehrt nach SEMPER des Bügels völlig.

Zwanzig Arten: *abyssicola* (THÉEL), *aculeata* (THÉEL), *asymmetrica* (LUDW.), *autopista* (V. MARENZ), *bankensis* (LUDW.), *benedeni* (LUDW.), *bidentata* (WOODW. u. BARR.), *brychia* (VERR.), *challengeri* (THÉEL), *distincta* (V. MARENZ), *innominata* (LUDW.), *insolens* (THÉEL), *ludwigii* (SLUIT.), *molesta* (SEMP.), *petersi* (SEMP.), *pseudo-digitata* (SEMP.), *rodea* (SLUIT.), *similis* (SEMP.), *uncinata* (HUTTON) und *verrilli* (THÉEL).

6. **Anapta** SEMPER.

Diagnose wie bei SEMPER.

Zwei Arten: *fallax* LAMP., *gracilis* SEMP.; *A. subtilis* SLUIT. ist meines Erachtens ein regenerierendes IndivId irgend welcher Synaptiden-Art.

II. Chiridotinæ.

Die jederseits mindestens 4 Nebenäste tragenden Spitzen der Fühlerstämme kurz und breit, öfters breiter, als der basale Teil (Tentacula peltato-digitata). Die Kalkkörper sind entweder Rädchen mit hohler, gedeckelter Nabe und (typisch) 6 Speichen, oder hakenförmige Stäbchen mit den eingebogenen Enden in 2 rechtwinklig zu einander gestellten Ebenen liegend, oder aber beiderlei Kalkkörper zusammen. Ausserdem oft anders geformte kleinere Kalkstäbchen, oder biscuitförmige Körper, nie aber Anker. Wenigstens dort, wo die hakenförmigen Stäbe fehlen, sind die Rädchen in Papillen gehäuft. — Zwitter oder getrenntgeschlechtlich.

1. **Sigmodota** (STUDER).

Die Kalkkörper sind hakenförmige Stäbchen, mit den eingebogenen Enden in 2 rechtwinklig zu einander gestellten Ebenen, ausserdem oft Rädchen, in der Haut verstreut oder in Papillen gehäuft.

Alle Arten mit den als Lokomotionsorgane wichtigen hakenförmigen Stäbchen[1]) haben zweifelsohne ihren Ursprung aus der Gattung Chiridota gemein und bilden demnach eine natürliche Gruppe. Sie dürften also insgesamt von Formen mit Rädchenpapillen herstammen. Die Haken sind ein späterer Erwerb, der

[1]) Vgl. hierüber meinen vorerwähnten Aufsatz im Zool. Anzeiger.

wahrscheinlich jene Reduktion der Rädchenpapillen und Rädchen veranlasste, die wir bei mehreren Arten beobachten können. Diese Reduktion kann unabhängig in getrennten Serien stattgefunden haben, weshalb es unsicher ist, ob diejenigen Arten, welche gegenwärtig auf derselben Stufe stehen (beispielsweise der Rädchen gänzlich ermangeln) unter sich näher verwandt sind, als mit anderen Arten. Die einzelnen Reduktionsstufen sind übrigens meines Erachtens kaum genügend getrennt, um das Aufstellen mehrerer Gattungen zu veranlassen.

Dagegen mag man die Gattung aus diesem Gesichtspunkte in 3 Gruppen einteilen wollen:

A. Nur Haken (*Toxodora* VERRILL.)

Zwei Arten: *ferruginea* (VERR.)[1]) und *japonica* (V. MARENZ).

B. Ausser den Haken einzelne in der Haut zerstreute Rädchen (*Trochodota* LUDW.). Wenn die drei Gruppen etwa als besondere Gattungen aufgestellt werden sollten, wäre diese Gruppe, weil die Studer'sche Art hierhergehört, *Sigmodota* STUDER zu benennen, da dieser Name älter ist als *Trochodota*.

Drei Arten: *dunedinensis* (PARKER), *studeri* (THÉEL) und *venusta* (SEMON).

C. Ausser den Haken Rädchen in Papillen.

Zwei Arten: *australiana* (STIMPS.) und *contorta* (LUDW.).

2. **Chiridota** (ESCHSCHOLTZ).

Rädchen in Papillen; hakenförmige Stäbe fehlen.

Siebzehn Arten: *discolor* ESCHSCH., *dubia* SEMP., *eximia* HAACKE, *incongrua* SEMP., *lævis* (FABR.), *liberata* SLUIT., *panaensis* SEMP., *pisanii* LUDW., *purpurea* (LESS.), *pygmæa* J. MÜLL., *rigida* SEMP., *rotifera* (POURT.), *rubeola* (QUOY u. GAIM.), *rufescens* (BR.), *stuhlmanni* LAMP., *violacea* PETERS und *vitiensis* GRÄFFE.

---

[1]) VERRILL liefert keine Figuren, seine Beschreibung der gekrümmten Stäbchen stimmt aber gut zu den Haken, in gewisser Ansicht gesehen. Deshalb nehme ich mit THÉEL an, dass *Toxodora ferruginea* hinsichtlich der Kalkkörper mit *Sigmodota japonica* übereinstimmt.

III. Myriotrochinæ.

Fühlerstämme mit jederseits 2—8 Nebenästen, welche bedeutend schwächer sind, als bei *Synaptinæ* und *Chiridotinæ*. Die Kalkkörper der Haut nur Rädchen mit 8—24 Speichen und solider, ungedeckelter Nabe. Die Rädchen sind nie in Papillen gehäuft. — Getrenntgeschlechtlich.

1. Myriotrochus STEENSTRUP.

Zwei Arten: *rinkii* STEENSTR. und *vitreus* (SARS).

2. Trochoderma THÉEL.

Eine Art: *elegans* THÉEL.

3. Acanthotrochus DAN. u. KOR.

Eine Art: *mirabilis* DAN. u. KOR.

Betreffs dieser Gattungen schliesse ich mich den von THÉEL in »Challenger»-Report (Zool. Vol. XIV) und LUDWIG in »Bronn's Klassen und Ordnungen» gegebenen Darstellungen an.

Die obige Einteilung der Familie der Synaptiden wurde bereits vor 2 Jahren in einem Vortrag in der zoologischen Sektion des Naturwissenschaftlichen Studentenvereins zu Upsala mitgeteilt. Damals war ich noch hinsichtlich der systematischen Stellung einiger Arten nicht ganz im klaren wegen der Mängel einiger älteren Beschreibungen. Inzwischen habe ich, hauptsächlich Dank des zuvorkommenden Wohlwollens der Herren Professoren T. TULLBERG und HJ. THÉEL die Gelegenheit gehabt, eine so grosse Zahl Synaptiden (darunter nicht wenige neue Arten) zu untersuchen, dass ich zu glauben wage, dass die meinem Systeme zu Grunde gelegten Angaben in allem Wesentlichen richtig sind.

Was nun die Einteilung der früheren Gattung *Synapta* betrifft, dürfte die hier gegebene Gruppierung der Arten sich als eine natürliche erweisen und mithin auch die Bestimmung bedeutend erleichtern. Eine andere Frage ist, ob ich die Gattung in nur 2 Gattungen, die eine *Euapta* und *Chondroclœa*, die zweite die übrigen Gruppen umfassend, teilen sollte, oder in mehr als 5. Ich beabsichtige späterhin die Principien, welche mich zu der vorstehenden Begrenzung veranlassten, darzulegen. Dann werde ich auch noch einige hier (da sie minder wichtig waren) nicht erwähnte Kennzeichen anführen.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 110.)

London. *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 23 (1897): N:o 102–104. 8:o.
Meteorological record. Vol. 16 (1896): N:o 63–64; 17 (1897): 65–66. 8:o.
— *R. Microscopical society.*
Journal. 1897: P. 6. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 62 (1897/98): N:o 381–383. 8:o.
— *Meteorological office.*
Meteorological observations at stations of the second order. Year 1892—1893. 1896—97. 4:o.
Hourly means of the readings obtained from the self-recording instruments . . . 1893. 4:o.
— *Hydrographic-office.*
Monthly current charts for the Atlantic ocean. 1897. Fol.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 29 (1897): N:o 12; 30 (1898): 1. 8:o.
Lyon. *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Mémoires. Sciences et lettres. (3) T. 4. 1896. 8:o.
— *Société d'agriculture, sciences et industrie.*
Annales. (7) T. 4 (1896). 8:o.
— *Société Linnéenne.*
Annales. N. S. T. 43 (1896). 8:o.
Madrid. *R. Academia de ciencias exactas, físicas y naturales.*
Memorias. T. 17. 1897. 8:o.
Discursos. 1897 $^{20}/_{6}$. 8:o.
Magdeburg. *Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung.*
Jahrbuch. Bd. 14 (1895). 4:o.
Manila. *Observatorio.*
Boletín mensual. 1896: 7–12; 1897: 1–5. 4:o.
Mauritius. *R. Alfred observatory.*
Annual report. Year 1895. Fol.
Melbourne. *Observatory.*
Record of results of observations in meteorology and terrestrial magnetism. 1896: 1—12. 8:o.
— *Zoological and acclimatisation society of Victoria.*
Proceedings. Vol. 2 (1873); 4 (1875). 8:o.
Annual report. 22—24 (1885—87); 26—33 (1889—96). 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Boletín de agricultura, mineria é industrias. Año. 6 (1896/97): N:o 9–10. 8:o.
Boletín mensual. 1897: 6–7. 4:o.
Ensayo práctico de repoblacion de Bosques. Ed. M. BÁRCENA. 1897. 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 10 (1896—97): N:o 5—12. 8:o.

Middelburg. *Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen.*
Zelandia illustrata. Vervolg 2. 1897. 8:o.
HOLLESTELLE, A., Geschiedkundige beschrijving van Tholen en Omstreken. Middelburg 1897. 8:o.

Milano. *R. Osservatorio astronomico di Brera.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 1896. 8:o.

Montevideo. *Observatorio meteorológico.*
Boletín mensual. Año 7 (1894/95): N:o 10—12; 8 (1895/96): 4—5. 8:o.
Boletin del observatorio meteorologico. T. 1: N:o 12-14. 1895/96. Fol.
El año meteorológico 1894—95. 8:o.
— *Sociedad meteorológica Uruguaya.*
Resumen de las observaciones pluviométricas. Año 4 (1895): 3—4; 5 (1896): 1—4. Fol. & 8:o.

Moscou. *Société impériale des naturalistes.*
Bulletin. 1896: N:o 4; 1897: 1—2. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-philol. Cl. 1897: Bd 2: H. 1. 8:o.
— *K. Meteorologische Central-Station.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 18 (1896): H. 4; 19 (1897): 1. 4:o.
Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1896: 1—12; 1897: 8—11. Fol.

Nancy. *Académie de Stanislas.*
Mémoires. (5) T. 14 (1896). 8:o.
— *Société des sciences.*
Bulletin (2) T. 14 = Fasc. 31 (1896). 8:o.

Nantes. *Société des sciences naturelles.*
Bulletin. T. 7 (1897): Trim. 1—3. 8:o.

Napoli. *Accademia Pontaniana.*
Atti. Vol. 27. 1897. 4:o.
— *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 3 (1897): Fasc. 11—12. 8:o.

New Haven. *Yale university observatory.*
Report. Year 1896/97. 8:o.

New York. *N. Y. Public Library.*
Bulletin. Vol. 1 (1897): N:o 12. 8:o.
— *Meteorological observatory of the Dep. of Public parks.*
Report. Year 1897. 4:o.
— *N. Y. Microscopical society.*
Journal. Vol. 13 (1897): N:o 4. 8:o.

Nizza. *Société de médecine et de climatologie.*
Nice-médical. Année 21 (1896/97): N:o 7—10, 12. 8:o.

Odessa. *Observatoire magnétique et météorologique de l'Univ. Imp.*
Annales. Année 3 (1896) & Texte Français. 4:o.

O'-Gyalla. *Meteorologisch-Magnetisches Central-Observatorium.*
Beobachtungen. 1896: 2, 5, 9. 8:o.

Ottawa. *Field-Naturalists' Club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 11 (1897/98): N:o 9. 8:o.
— *Geological survey of Canada.*
Palæozoic fossils. Vol. 3: P. 3. 1897. 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 11 (1897): Fasc. 6. 8:o.
Palo Alto. *Leland Stanford junior university.*
Publications. Contributions to biology from the Hopkins seaside laboratory. 12. 1897. 8:o.
Paris. *Bureau central météorologique de France.*
Bulletin mensuel. 1895: N:o 11—12; 1897: 2—8. 4:o.
Bulletin international. Année 1897: 1—22, 24—335, 337—365. 4:o.
Rapport de la conférence météorologique internationale. Réunion de Paris 1896. 8:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux des séances de 1897. 8:o.
— *École polytechnique.*
Journal. (2) Cahier 2. 1897. 4:o.
— *Muséum d'histoire naturelle.*
Nouvelles archives. (3) T. 9. 1897. 4:o.
Bulletin. Année 1897: N:o 2-6. 8:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1897: 12; 1898: 1. 8:o.
— *Rédaction de la Feuille des jeunes naturalistes.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1897/98): N:o 327—328. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 18 (1897): Trim. 2—3. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1897: N:o 16—20. 8:o.
— *Société géologique.*
Bulletin. (3) T. 25 (1897): N:o 7. 8:o.
— *Société météorologique.*
Annuaire. Année 44 (1896): 4—6. 8:o.
— *Société zoologique.*
Mémoires. T. 9 (1896). 8:o.
Perpignan. *Observatoire météorologique et magnétique.*
Bulletin. 24 (1895). 4:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1897: P. 2. 8:o.
— *Geographical society.*
Charter, by laws, list of members. 1898. 8:o.
Pola. *Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine.*
Veröffentlichungen. N:o 1—4. 1897. 4:o.
Meteorologische und magnetische Beobachtungen. 1896: 1—12 & Monats- und Jahresübersicht; 1897: 1—11.
Ponta Delgada. *Observatoire météorologique.*
Résumé des observations de Déc. 1896; de l'année 1896; de Janvier 1897. Fol.
Variation diurne de la pression atmosphérique. Année 1896. Fol.

Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Spisův poctěných jubilejní cenou. 8:o.
7. HORÁK, J., Z konjugace soukláskové. 1896.
8. TADRA, F., Kulturní styky čeck s cizinou až do válek husitských. 1897.
— *K. K. Sternwarte.*
Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 57 (1896). 4:o.

Pressburg. *Verein für Heil- und Naturkunde.*
Verhandlungen. H. 9 (1894—1896). 8:o.

Pulkowa. *Observatoire central Nicolas.*
Publications. (2) Vol. 2. 1896. 4:o.

Regensburg. *K. Bayerische botanische Gesellschaft.*
Flora. Bd 83 (1897): H. 1–3; 84 (1897): 1–3. 8:o.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*
Annuario. 1897. 12:o.

Riposto. *Osservatorio meteorologico.*
Bollettino mensile. Anno 22 (1896): Fasc. 2, 4–5, 7; 23 (1897): 1, 3, 5, 9, 11. 4:o.

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze morali . . . (5) P. 2 (Not. degli Scavi): Vol. 5 (1897). 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 6 (1897): Fasc. 9–11. 8:o.
Atti. Cl. di scienze fisiche . . . (5) Rendiconti. Vol. 6 (1897): Fasc. 10–12; 7 (1898): 1. 8:o.
» Rendiconto dell'adunanza solenne 5/6 1897. 4:o.
— *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*
Atti. Anno 28 (1874/75): Sess. 1–7; 42 (1888/89): 1–7; 50 (1896/97): 1. 4:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Anno 1897: N:o 1—2. 8:o.
— *R. Istituto botanico.*
Annuario. Anno 7: Fasc. 1. 1897. 4:o.
— *Ufficio centrale meteorologico e geodinamico Italiano.*
Annali. (2) Vol. 14 (1892): P. 2; 16 (1894): 1. 4:o.

Rotterdam. *Bataafsch genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*
Nieuwe verhandelingen. (2) D. 4: Stuk 2. 1897. 4:o.

Rousdon. *Observatory.*
Meteorological observations. Vol. 13 (1896). 4:o.

San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Anales. Secc. 2. Observaciones meteorológicas y magnéticas. Año 1895. Fol.

San Francisco. *California academy of sciences.*
Proceedings. (3) Vol. 1: N:o 2, 4. 8:o.
Occasional papers. 5. 1897. 8:o.
— *Astronomical society of the Pacific.*
Publications. Vol. 9 (1897): N:o 54, 56–58. 8:o.

St. Pétersbourg. *Académie impériale des sciences.*
Bulletin. (5) T. 7 (1897): N:o 2. 8:o.
Annuaire du musée zoologique de l'acad. 1897: N:o 3. 8:o.
— *Bibliothèque de l'université impériale.*
Zapiski istoriko-filolog. fakulteta. 41—43. 1896—97. 8:o.
— *Société astronomique de Russie.*
Izvjestija. Bd. 6 (1897): N:o 4. 8:o.
Éphémérides des étoiles (W. DÖLLEN) pour 1898. 8:o.
— *Société Imp. Russe de géographie.*
Izvjestija. T. 32 (1896): 5—6; 33 (1897): 1—3. 8:o.
Otschet. 1896. 8:o.
— *Physikalisches Centralobservatorium.*
Ežemĕsjačnyj meteorologičeskij bjulleten dlja Evropejskoj Rossii. G. 4 (1896): 3—12; 5 (1897): 1—9. 4:o.
Bulletin météorologique. Année 1897 & Suppl. Fol.
San Salvador. *Observatorio meteorológico y astronómico.*
Observaciones meteorológicas. 1897: 1—4. Fol.
Simla. *Meteorological reporter to the government of India.*
Indian meteorological memoirs. Vol. 7 (1896): P. 6; 8 (1897): 2. Fol.
Sofia. *Station centrale météorologique de Bulgarie.*
Bulletin annuaire. 1896: 1—12. Fol.
Stettin. *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 58 (1897): N:o 1—6. 8:o.
Strassburg. *Centralstelle des meteorologischen Landesdienstes in Elsass-Lothringen.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. Jahre 1895. 4:o.
Stuttgart. *Meteorologische Centralstation.*
Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Jahrg. 1895—96. 4:o.
Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 3: N:o 3. 1897. 8:o.
Memoirs. Vol. 3: P. 5. 1897. 8:o.
— *Observatory.*
Results of rain, river, and evaporation observations made in New South Wales during 1895. 8:o.
Meteorological observations. 1896: 1—12. 8:o.
— *Geological survey of New South Wales.*
Records. Vol. 5: P. 3. 1897. 4:o.
Tacubaya. *Observatorio astronomico nacional.*
Boletín. T. 2: N:o 2. 1897. 4:o.
Anuario. Año de 1898. 8:o.
Tokyo. *Geographical society.*
Journal of Geography. Vol. 9: N:o 103—104. 1897. 8:o.
— *Societas zoologica Tokyonensis.*
Annotationes zoologicæ japonenses. Vol. 1: P. 4. 1897. 8:o.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Memorie. (2) T. 47. 1897. 4:o.
— *Musei di Zoologia ed Anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 12 (1897): N:o 296—310. 8:o.

Torino. *Osservatorio centrale.*
Bollettino mensuale. (2) Vol. 17 (1897): N:o 4. 8:o.
Toronto. *Meteorological service.*
Monthly weather review. 1895: 10, 12; 1896: 8—12; 1897: 2, 7. 4:o.
Toulouse. *Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres.*
Mémoires. (9) T. 8. 1896. 8:o.
Trieste. *Osservatorio astronomico-meteorologico.*
Rapporto annuale. Vol. 11 (1894). 4:o.
Troyes. *Société académique d'agriculture, des sciences et belles-lettres*
Mémoires. (3) T. 33 (1896). 8:o.
Utrecht. *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
Onweders in Nederland. D. 17 (1896). 8:o.
Meteorologisch jaarboek voor 1895. Tv. fol.
Washington. *Bureau of ethnology.*
Annual report. 16 (1894—95). 8:o.
— *Weather bureau.*
Monthly weather review. Year 1897: 1—10. 4:o.
Rainfall of the U. S. 1897. 4:o.
— *Department of agriculture.*
Yearbook. 1896. 8:o.
— *U. S. Naval Observatory.*
Report of the superintendent 1893/94; 1896/97. 8:o.
— *Geological survey.*
Annual report. 17 (1895/96): P. 1—2. 8:o.
Bulletin. N:o 87, 127, 130, 135—148. 1896—97. 8:o.
Monographs. Vol. 25—28 (& Atlas. Fol.) 1895—97. 8:o.
Wellington. *New Zealand Institute.*
Transactions and proceedings. Vol. 29 (1896). 8:o.
Wien. *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 39—41 (1894—96). 4:o.
Beobachtungen. 1896: 6—12. 8:o.
— *K. K. Hydrographisches Central-Bureau.*
Jahrbuch. Jahrg. 3 (1895). 4:o.
— *K. K. Geographische Gesellschaft.*
Mittheilungen. Bd 40 (1897). 8:o.
— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 47 (1897): H. 9—10. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1897: N:o 11—16. 8:o.

Af utgifvarne:

Acta mathematica, hrsg. von G. MITTAG-LEFFLER. 20: 3—4. Sthlm 1897. 8:o.
Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. 1897: N:o 2—4. Sthlm. 8:o.
Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT. Separater ur årg. 1897. Lund. 8:o.
Svenska jägarförbundets nya tidskrift utg. af A. WAHLGREN. Årg. 35 (1897): H. 2—4. Sthlm. 8:o.
Tidskrift för skogshushållning. 1897: N:o 3—4. Sthlm. 8:o.

Af författarne:

BRUN, J., Lifvet och elektromagnetismen samt menniskan betraktad såsom fritt personligt väsen. Sthlm 1897. 8:o.

ERIKSSON, J., En allmän öfversigt af den hos oss utförda sädesrostundersökningens förnämsta resultat. Malmö 1897. 8:o.

— 21 st. småskrifter.

HAMBERG, A., Lars Johan Igelström. Sthlm 1897. 8:o.

JÄDERIN, M., Méthode pour la mensuration des bases géodésiques au moyen des fils métalliques. Paris 1897. 4:o.

LINDVALL, C. A., Two papers read at the 7:th geological congress in S:t Petersbourg. Sthlm 1897. 8:o.

MURBECK, S., Contributions à la connaissance de la flore du nord-ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie. Lund 1897. 4:o.

— Om vegetativ embryobildning hos flertalet Alchemillor och den förklaring öfver formbeständigheten inom slägtet, som densamma innebär. Lund 1897. 8:o.

WIJKANDER, A., Untersuchung der Festigkeits-Eigenschaften schwedischer Holzarten. Göteborg 1897. 8:o.

ALBRECHT, TH., Bericht über den gegenwärtigen Stand der Erforschung der Breitenvariation. Lausanne 1896. 8:o.

— Vergleichung der optischen und der photographischen Beobachtungsmethode zur Bestimmung der Breitenvariation. Potsdam 1896. 8:o.

ANGELITTI, F., Sulla data del Viaggio Dantesco desunta dai dati cronologici. Napoli 1897. 8:o.

AUGER, Les lois de la nature et les lois sociales. Lyon 1883. 8:o.

BASHFORTH, F., A mathematical treatise on the motion of projectiles. London 1873. 8:o.

— Tables of remaining velocity, time of flight, and energy of various projectiles. London 1871. 8:o.

— A supplement to a revised account of the experiments made with the Bashforth chronograph to find the resistance of the air to the motion of projectiles. Cambridge 1895. 8:o.

BODE, H., Zur Theorie des Astigmatismus katoptrischer Anamorphosen. Rostock 1897. 8:o.

CARRUTHERS, G. T., The origin of the celestial laws and motions. London 1897. 8:o.

CULLUM, J. E., Climatology of Valencia Island, county Kerry. London 1896. 8:o.

DARWIN, G. H., Periodic orbits. Sthlm 1897. 4:o.

FERGOLA, E., Novella determinazione della costante dell' aberrazione e della latitudine di Napoli. Napoli 1897. 8:o.

FOREL, F. A. & DU PASQUIER, L., Les variations périodiques des glaciers. Genève 1897. 8:o.

FRITSCHE, H., Observations magnétique sur 509 lieux faites en Asie et en Europe pendant la période de 1867—1894. St. Pétersb. 1897. 8:o.

Af författarne:

GROVER, D. A. N., New principles. P. 3. Kansas City 1897. 12:o.

HARTL, H., Meteorologische und magnetische Beobachtungen in Griechenland. Wien 1897. 8:o.

HAECKEL, E., Fritz Müller-Desterro. Jena 1897. 8:o.

— Aufsteigende und absteigende Zoologie. Jena 1898. 8:o.

— Natürliche Schöpfungs-Geschichte. Th. 1—2. 1898. 8:o.

LEAVENWORTH, F. P., Measures of double stars. Boston 1897. 4:o.

LEUSCHNER, A. O., Beiträge zur Kometenbahnbestimmung. Diss. Berlin 1897. 4:o.

MENDIZABAL TAMBORREL, J. DE, La division décimale de la circonférence et du temps. Mexico 1897. 8:o.

— Questionnaire pour la reforme du calendrier. Mexico 1897. 8:o.

NIJLAND, A. A., Uitmeting van den Sterrenhoop G. C 4410. Utrecht 1897. 4:o.

PÉRINGUEY, L., Descriptive catalogue of the coleoptera of South Africa. P. 3. Cape Town 1897. 8:o.

SCHIAPARELLI, G. V., Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte. Roma 1897. 4:o.

— Rubra Canicula. Nuove considerazioni circa la mutazione di colore che si dice avvenuta in Sirio. Rovereto 1897. 8:o.

SCHNAUDER, M., & HECKER, O., Bericht über die am photographischen und am visuellen Zenitteleskop erhaltenen Resultate. Potsdam 1896. 4:o.

SCHUBERT, JOH., Temperatur und Feutigkeit der Luft auf freiem Felde, im Kiefern- und Buchenbestande. 1897. 8:o.

SCHRÖTER, C., Oswald Heer als Gebirgsforscher. Zürich 1889. 8:o.

WASSILTCHIKOW, A., Les Razoumowski. T. 3. Halle a. S. 1897. 8:o.

WILCZYNSKI, E. J., Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Diss. Berlin 1897. 4:o.

WOLF, R., Astronomische Mitteilungen. Zürich 1897. 8:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 3.

Onsdagen den 9 Mars.

INNEHÅLL.

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot, Professorn i zoologi och komparativ anatomi vid universitetet i Leipzig RUDOLF LEUCKART med döden afgått.

Anmäldes, att Doktor O. CARLGREN hade afgifvit berättelse om den resa, som han med understöd från Regnells zoologiska gåfvomedel utfört till England för att i dess museer studera Actinier.

Herr THÉEL redogjorde för innehållet af ofvannämnda reseberättelse af Dr. CARLGREN.

Herr WITTROCK meddelade iakttagelser, som han gjort i afseende på fröodling vid Akademiens botaniska trädgård å Bergielund.

Till införande i Akademiens skrifter antogos följande inlemnade afhandlingar och uppsatser:

i Bihanget till Handlingarna:

1:o) »Diatoms from Franz Josef Land, collected by the Harmsworth-Jackson Expedition», af Professoren P. T. CLEVE.

2:o) »Xyridaceæ brasilienses præcipue goyazenses a Glazion lectæ», af doktor G. O. MALME,

3:o) »Potentialbestämningar i ett vakuumrör. Inledning. Experimentell-anordningar», af Lektor C. A. MEBIUS.

i Öfversigten:

de i innehållsförteckningen uppräknade fem uppsatser.

Den *Fernerska* belöningen för året tilldelades Docenten H. VON KOCH för hans i Bihanget till Akademiens Handlingar införda afhandling: »Sur la convergence des déterminants d'ordre défini».

Den *Lindbomska* belöningen tillerkändes Professorn E. J. WIDMARK för hans i denna tidskrift offentliggjorda uppsats: »Om gränserna för det synliga spektrum».

Den *Flormanska* belöningen skulle öfverlemnas åt Med. Kandidaten K. BERGENDAL och studeranden P. BERGMAN gemensamt för deras i »Skandinavisches Arkiv für Physiologie» offentliggjorda afhandling: »Zur Physiologie der Intercostalmuskeln».

För utförande af vetenskapliga resor inom landet beslöt Akademien utdela följande understöd:

åt Docenten O. JUEL 150 kr. för idkande af cytologiska studier öfver Florideer i Bohuslän:

åt Studeranden R. E. FRIES 150 kr. för mykologiska studier i Jemtland;

åt Läroverksadjunkten K. JOHANSSON 100 kr. för studium af Gotlands hapaxantiska växter;

åt Kandidat K. KJELLMARK 100 kr. för undersökningar af hydrofila växtsamhällen i mellersta Sveriges insjöar;

åt Folkskoleläraren P. LARSSON 100 kr. för bryologiska studier inom Bohuslän;

åt Kandidaten N. H. NILSSON 200 kr. för att i Lule lappmark studera växtformationerna i dervarande myrar;

åt Kandidaten A. ROMANUS 150 kr. för att undersöka förekomsten af anthocyan hos växter i Jemtlands fjelltrakter;

åt Studeranden T. VESTERGREN 100 kr. för mykologiska studier på Gotland;

åt Läroverkskollega W. A. ENGHOLM 100 kr. för studium af sjön Tåkerns djurlif;

åt Läroverksadjunkten C. FRISTEDT 100 kr. för idkande af studier öfver Vermlands land- och sötvattensmollusker; och

åt Konservatorn O. ROTH 150 kr. för idkande af entomologiska och ornitologiska studier i Gellivaratrakten.

Statsanslaget för instrumentmakeriernas uppmuntran skulle lika fördelas mellan matematiska och fysiska instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Entomologiska föreningen.*
Entomologisk tidskrift. Årg. 18 (1897): H. 1—4. 8:o.
ITHACA, N. Y., Agricultural Experiment Station.
Annual Report. 8 (1895). 8:o.
Bulletin. 36, 39—40, 47, 52, 56, 63, 65—66, 82, 85, 88—89, 92, 105, 118, 120, 129—130, 135, 137. 1891—1897. 8:o.
— *Experimentalfältet.*
Meddelanden. N:o 52. 1898. 8:o.
— *Sabbatsbergs sjukhus.*
Årsberättelse 1895—96. 8:o.
— *Svenska sällskapet för Antropologi och Geografi.*
Ymer. 1897: H. 4. 8:o.
Upsala. *Studentkårens bibliotek.*
Katalog. Vårterm. 1898. 8:o.
Östersund. *Jämtlands läns fornminnesförening.*
Tidskrift. Bd 2: H. 2. 1897. 8:o.
Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1897: 40—53 & Reg. 8:o.
— *Centralbureau der internationalen Erdmessung.*
Bericht. 1897. 8:o.
— *K. Botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. 1898: N:o 12. 8:o.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 49 (1897): H. 3. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 17 (1898): N:o 1—3. 8:o.
— *K. Preussisches Meteorologisches Institut.*
Veröffentlichungen. 1896: H. 2. 4:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 33 (1897): N:o 5—8. 8:o.
Brisbane. *Queensland Museum.*
Annals. N:o 1. 1891. 8:o.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 35 (1898): N:o 1. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 44 (1897): Entr. 6; 45 (1898): 1 & Indice general 1—40. 1897. 8:o.

— *Oficina meteorológica Argentina.*
Anales. T. 11. 1897. 4:o.

Buitenzorg. *Jardin botanique.*
Annales. Suppl. 1. 1897. 8:o.
Mededeelingen. 22. 1898. 8:o.

Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*
Journal. Vol. 45: P. 2 Index; 46 (1897): P. 1: N:o 2—3 & Extra N:o; 46 (1897): 1: 2—3. 8:o.
Proceedings. 1897: N:o 5—8. 8:o.
Īçvara-Kaula, The Kaçmīraçabdâmṛta a Kāçmīrī grammar ed. by G. A. GRIERSON. P. 1. 1897. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 6 (1898): N:o 2. 8:o.

Chicago. *Field Columbian museum.*
Publications. 22, 24. 1897. 8:o.

Cincinnati. *Society of natural history.*
Journal. Vol. 19: N:o 3. 1897. 8:o.

Davenport. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Vol. 2: P. 1—2. 1876—78. 8:o.

Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 21: H. 1. 1897. 4:o.

Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 8 (1897): N:o 4. 8:o.

Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 70 (1898): H. 4. 8:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an 10 Stationen 2. Ordnung . . . Jahrg. 19 (1896). 4:o.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Systeme der Deutschen Seewarte für das Dezennium 1886—1895. 4:o.

Indianapolis. *Indiana academy of science.*
Proceedings. 1896. 8:o.

Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Oversigt over Forhandlinger. 1897: N:o 4—5. 8:o.
LORENZ, L., Œuvres scientifiques. T. 1: Fasc. 2. 1898. 8:o.

— *Naturhistorisk Forening.*
Videnskabelige Meddelelser. (5) Aarg. 9 (1897). 8:o.

Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1898: 1. 8:o.

Lawrence. *Kansas university.*
Quarterly. Vol. 6 (1897): N:o 4. 8:o.

(Forts. å sid. 152.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 1.
Stockholm.

Om aplanosporer hos Halosphæra.

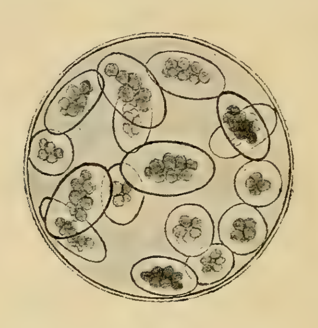
Af P. T. CLEVE.

(Meddeladt den 9 Mars 1898.)

Den encelliga, pelagiska klorofyllalgen *Halosphæra viridis* har af SCHMITZ blifvit utförligt beskrifven i Mittheilungen d. zool. Stat. zu Neapel I, 1877, och i nämnda arbete redogöres noga för algens svärmsporbildning. Denna försiggår i korthet på det sätt, att genom cellkärnans upprepade delning bildas ett stort antal nya kärnor, kring hvilka plasma och klorofyll hopas, så att derigenom uppstår ett stort antal moderceller till svärmsporer. Samtidigt differentieras innanför den ursprungliga cellmembranen en ny och af annan beskaffenhet, hvilken inre membran med inneslutna moderceller till svärmsporer uttränger genom den äldres bristning. Denna nya membran upplöses så småningom till en slemmig substans, och under tiden hafva svärmsporer bildats genom delning af de förut omnämnda modercellerna. De försättas nu i frihet. Dessa svärmsporer hafva en högst ovanlig form, nämligen af käglor, från hvilkas breda bas utgå tvänne lika långa cilier. Beträffande dessa svärmcellers vidare öden är, så vidt jag vet, intet bekant, och det är således ovisst, om de äro gameter, som kopulera, eller om de direkt utbildas till nya celler.

Halosphæra har dock ännu ett reproduktionssätt, nämligen genom aplanosporer. Under vintern 1897 fann jag i planktonprof, insamlade dels vester om Jutska halfön, dels i Gullmarsfjorden, några exemplar af Halosphæra, innehållande aplanosporer,

begränsade af en tjock membran och inneslutande hvar och en klorofyllförande rundade korn till ett antal af sex eller flere. Såsom synes af vidstående bild (200 gånger först.), förekomma i Halosphæracellen äggformiga aplanosporer till ett antal af 16.



Då jag hittills iakttagit endast några få dylika och i alkohol förvarade exemplar, har jag icke kunnat genom mikrokemiska prof undersöka membranernas och de rundade gröna kropparnas beskaffenhet, men det oaktadt synes mig detta egendomliga sporstadium af Halosphæra förtjent att uppmärksammas, då det klargör nämnda algs systematiska ställning.

Det kan nämligen icke förnekas, att denna bildning påminner mycket om aplanosporbildningen hos *Acetabularia*. Den parasoll-lika skärm, som bildar denna algs öfre del, utgöres nämligen af radierande celler, i hvilka bildas ett stort antal aplanosporer, hvilka efter ett par månaders hvila gro på det sätt, att deras innehåll ombildas till ett antal gameter, hvilka frigöras derigenom att aplanosporerna öppnas med ett lock. Det lider väl knappt något tvifvel att Halosphæra-algen motsvarar hos Acetabularia en af de radierande celler, som bilda skärmen.

En viss likhet visar aplanosporbildningen hos Halosphæra äfven med den, som iakttagits hos *Botrydium* och *Gomontia*, och detta häntyder på nära slägtskap mellan dessa alger och den fritt lefvande encelliga, pelagiska Halosphæra.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 176.

Om en generalisering af potensserien.

Af G. Mittag-Leffler.

(Meddeladt den 9 Mars 1898.)

Låt $F(x)$ vara en analytisk funktion af variabeln x, af hvilken en viss gren i närmaste omgifningen af stället $x = 0$, derigenom är definierad att samtliga qvantiteter i raden

$$F(0)\ F'(0)\ F''(0) \ldots F^{(\nu)}(0) \ldots .$$

$$F^{(\nu)}(x) = \frac{\partial^\nu F(x)}{\partial x^\nu}$$

äro entydigt bestämda. I teorien för de analytiska funktionerna, sådan densamma väsendtligen genom Weierstrass blifvit utvecklad, visas, huru den analytiska funktionen i sin helhet är fullständigt och entydigt definierad, sedan bestämningselementen

$$F(0)\ F'(0)\ F''(0) \ldots F^{(\nu)}(0) \ldots$$

en gång blifvit fastställda.

I afseende på framställningen genom analytiska formler af den på detta sätt i sin största allmänhet definierade analytiska funktionen gäller, att man alltid med bestämningselementen $F(0)\ F'(0) \ldots F^{(\nu)}(0) \ldots$ kan konstruera ett analytiskt uttryck, potensserien:

$$F(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} F^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\underline{|\nu}},$$

hvilken framställer en viss del af funktionen, hvilken af WEIERSTRASS benämnes ett *element*, i närmaste omgifningen af stället $x = 0$, och att man från detta element genom en analytisk process, den af WEIERSTRASS benämda *analytiska fortsättningen*, alltid kan erhålla funktionen i sin helhet.

Låt oss tänka det plan, hvilket framställer den oberoende variabeln x genereradt genom en rörlig radie af oändlig utsträckning genom punkten $x = 0$. Om man kontinuerligt genomlöper en dylik radie från $x = 0$, träffar man slutligen på en första punkt, hvilken icke behöfver vara ändlig och som utgör ett singulärt ställe till den gren af den analytiska funktionen, hvilken uppkommer genom analytisk fortsättning längs radien af det ursprungligen gifna elementet. Låt oss nu tänka den återstående delen af radien mellan det närmast $x = 0$ belägna singulära stället samt mot oändligheten, som en *skärning* (»coupure») i planet och låt oss från gebitet för variabeln x utesluta alla på detta sätt uppkomna skärningar.

Inom den del af planet, som återstår, och hvilken vi för att förenkla vårt uttryckssätt benämna X, utgör den från det ursprungliga elementet genom analytisk fortsättning genererade delen af funktionen $F(x)$ en entydig öfverallt regulär analytisk funktion af x. Vi beteckna denna del af funktionen $F(x)$ med $FX(x)$.

Den uppgift, hvars lösning här skall meddelas är följande: *Att af bestämningselementen* $F(0)$ $F'(0) \ldots F^{(\nu)}(0) \ldots$ *konstruera ett enhetligt analytiskt uttryck, hvilket inom hela gebitet X framställer funktionen $FX(x)$.*

Detta analytiska uttryck har följande utseende:

$$FX(x) = F(0) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor m} \left(\frac{sh\frac{\pi}{2}\frac{1+\delta}{\delta} - sh\frac{\pi}{2}}{sh\frac{\pi}{2}\frac{1+\delta}{\delta} - sh\frac{\pi}{2}} \right)^m \left\{ F'(0) \cdot R_{m1}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \frac{\delta x}{\pi} + F''(0) R_{m2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) \left(\frac{\delta x}{\pi}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \ldots + F^{(m)}(0) R_{mm}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) \left(\frac{\delta x}{\pi}\right)^m \right\}$$

hvarest

$$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

och

$$R_{m\,m-k}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right); \qquad \begin{array}{l} m=1, 2, \ldots \\ k=0, 1, 2, \ldots m-1 \end{array}$$

äro gifna rationella funktioner med heltalskoefficienter utaf $e^{\frac{\pi}{2}}$.

Om detta uttryck gäller. Låt X' vara ett område, hvilket som helst inom X. Man kan alltid fastställa en positiv qvantitet δ' sådan, att så snart δ är en positiv qvantitet $\delta \leqq \delta'$, är serien i högra membrum likformigt konvergent för alla värden på x, hvilka tillhöra X'.

Om man låter x längs en viss radie glida från $x = 0$ mot ∞ samt härvid träffar ett första singulärt ställe $\bar{x}$, så karakteriseras detta därigenom, att det icke är möjligt att gifva δ ett sådant värde, att detta ställe kan inryckas inom ett gebit X' för hvilket serien likformigt konvergerar.

Vår framställningsformel löser uppenbarligen uppgiften att framställa funktionen $F(x)$ längs den reella axeln från $x = 0$ och intill närmaste positiva och negativa singulära ställe. Formeln konvergerar likformigt för hvarje sträcka mellan dessa båda singulära ställen, och den upplyser sjelf, derigenom att konvergensen der upphör, om läget af dessa singulära ställen.

Om funktionen $F(x)$ har ett ändligt antal singulära ställen af bekant läge — som t. ex. integralen till en lineer differentialeqvation med rationella koefficienter — så är äfven området X härmed gifvet, och vi ha då erhållit en enhetlig analytisk framställning af $FX(x)$ för hela gebitet X.

Om $F(x)$ är en entydig funktion af x, hvars existensområde begränsas af en linie, som genereras af den rörliga ändpunkten af en radie, hvars andra ändpunkt är en fast punkt inom linien i fråga, om hvarje radie endast en gång träffar denna linie, och om $F(x)$ öfverallt inom sitt existensområde är regulär[1]) fram-

---

[1]) Cf. hvad som säges om funktionerna $C(x)$ och $c(x)$ pag. 78 och 79 uti min afhandling »Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante»! Acta Mathematica, Tome IV.

ställer vår formel funktionen $F(x)$ inom hela dess existens-område.

Jag förbehåller mig att sednare återkomma till andra egenskaper hos min framställningsformel. En hel del af analysens vigtigaste problem framträda, då man vid desamma använder denna formel, i ny dager, och man erhåller enkelt nya satser, hvilka icke förut blifvit uttalade.

Denna framställningsformel är så långt ifrån den enda, hvilken framställer $FX(x)$, att man tvärtom kan uppbygga en oändlighet sådana formler af olika natur. Jag återkommer med det första till denna fråga.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 3.
Stockholm.

ur les points singuliers des équations différentielles.

Par IVAR BENDIXSON.

[Communiqué le 9 Mars 1898 par A. LINDSTEDT.]

I. Dans un mémoire communiqué à l'académie le 9 Fevrier cette année j'ai déterminé la nature des courbes intégrales de l'équation

$$x^m \frac{dy}{dx} = ay + bx + f(x, y)$$

au voisinage de $x = 0$, $y = 0$, quand f désigne une série procédant suivant les puissances entières et positives de x et de y et quand $a \gtrless 0$, et j'ai donné des développements en série de ces courbes intégrales.

Le problème correspondant devient beaucoup plus compliqué dans le cas où $a = 0$.

Dans les pages suivantes je ne veux traiter que le cas où $m = 1$. Envisageons donc l'équation différentielle

$$x \frac{dy}{dx} = bx + f(x, y) \tag{1}$$

où f désigne une série procédant suivant les puissances entières et positives de x et de y, ne contenant que des termes de dimension, plus grande que 1. On sait alors qu'il existe toujours une intégrale holomorphe passant par $x = 0$, $y = 0$. [1])

En désignant par y_1 l'intégrale holomorphe et posant

$$y = y_1 + \eta$$

---

[1]) Voir PICARD Traité d'Analyse, Tome II, Page 37.

on aura une équation de la forme

$$x\frac{d\eta}{dx}=\eta\cdot\varphi(x,\ \eta)$$

$\varphi(x, \eta)$ désignant une série procédant suivant les puissances entières positives de x et de η.

Afin de déterminer la nature des courbes intégrales, il nous suffit donc d'étudier une équation de cette forme, laquelle j'écris, pour plus de simplicité, sous la forme suivante

$$(2)\qquad x\frac{dy}{dx}=ay^{m+1}[1-y\varphi(y)]+xy\psi(x,\ y)$$

$\varphi(y)$ et $\psi(x, y)$ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives des variables, convergentes pour $|x|\leq\varrho_1$ $|y|\leq\varrho_1$. Nous nous proposons dabord d'établir les théorèmes suivants.

Théorème I.

Etant donnée l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}=ay^{m+1}[1-y\varphi(y)]+xy\psi(x,\ y)$$

où $a>0$, $m=$ nombre impair, on peut toujours entourer l'origine $x=0$, $y=0$ par un cercle C $(x^2+y^2=\varrho^2)$ ayant les propriétés suivantes: Par chaque point x_0, y_0, situé audessus de l'axe des x et à l'intérieur de C, il passe toujours une courbe intégrale allant à l'origine, sans sortir jamais de C. Au-dessous de l'axe des x il n'existe au contraire pas d'autres points que ceux situés sur l'axe des y, par lesquels passe une courbe intégrale allant à l'origine.

Pour le cas où m est un nombre impair mais $a<0$, on aura un théorème tout analogue, qu'on obtient en mettant $y=-\eta$.

Théorème II.

Étant donnée l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx}=ay^{m+1}[1-y\cdot\varphi(y)]+xy\psi(x,\ y)$$

où m est un nombre pair et $a > 0$, *on peut entourer l'origine par un cercle* C $(x^2 + y^2 = \varrho^2)$ *tel qu'il passe une courbe intégrale allant à l'origine par chaque point* x_0, y_0, *situé à l'intérieur de* C.

Si au contraire m est un nombre pair et $a < 0$, *il ne passe par l'origine d'autre courbe intégrale que les deux droites* $x = 0$, *et* $y = 0$.

Nous nous bornons ici à démontrer le Théorème I, la démonstration du théorème II étant tout-à-fait analogue.

Pour plus de simplicité nous supposons en outre que $x_0 > 0$, le cas où $x_0 < 0$ s'obtenant de celui-ci par la simple substitution $x = -\xi$.

Faisons à cet effet la substitution

$$x = y^{m+1}\xi$$

dans l'équation (2), ce qui nous donne

$$\xi[1 - y^m\varphi_1(\xi, y)] = y^{m+1}\frac{d\xi}{dy}[a(1 - y\varphi(y)) + y\xi\psi_1(\xi, y)]$$

φ_1 et ψ_1 désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de ξ et de y, convergentes tant que $|\xi| \leqq \varrho_1$, $|y| \leqq \varrho_1$. On peut donc déterminer un nombre positif ϱ_2 tel que l'on ait

$$y^{m+1}\frac{d\xi}{dy} = \xi\left[\frac{1}{a} + f(\xi, y)\right]$$

f désignant une série procédant suivant les puissances entières, positives de ξ et de y, convergente tant que $|\xi| \leqq \varrho_2$, $|y| \leqq \varrho_2$, et s'annulant pour $\xi = 0$, $y = 0$.

Le Théorème I de mon mémoire ci-dessus cité nous apprend alors, que l'on peut entourer l'origine $\xi = 0$, $y = 0$ par un cercle $\xi^2 + y^2 = \delta^2$, tel que par chaque point ξ_0, y_0, situé audessus de l'axe des ξ, passe une courbe intégrale allant à l'origine.

Soit maintenant δ_2 un nombre positif $< \delta$, et déterminons $\delta_1 < \delta_2$ de telle manière que

$$\frac{\delta_1^2}{\delta_2^{2m+2}} + \delta_2^2 < \delta^2 .$$

Je dis alors que par chaque point x_0, y_0, situé au-dessus de l'axe des x et à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=\delta_1^2$, passe une courbe intégrale allant à l'origine.

Soit en effet x_0, y_0 un tel point que l'on ait $x_0^2+y_0^2 \leqq \delta_1^2$.

On sait alors que par le point $x=x_0$, $y=\delta_2$, il passe une courbe intégrale allant à l'origine, car en mettant

$$x = y^{m+1}\xi$$

on aura pour le point correspondant

$$\xi_0 = \frac{x_0}{\delta_2^{m+1}};\ y_0 = \delta_2;$$

ce qui nous donne

$$\xi_0^2 + y_0^2 < \delta^2.$$

Désignons par L_1 la courbe intégrale passant par $x=x_0$, $y=\delta_2$, et par L la courbe intégrale passant par $x=x_0$, $y=y_0$. On sait alors que L est situé entre l'axe des x et L_1 tant que $0<x\leq x_0$.

Or, $\dfrac{dy}{dx}$ n'étant jamais infini pour $0<x\leq x_0$, on sait que y est une fonction holomorphe de x pour chaque valeur de x telle que $0<x\leq x_0$. Il s'en suit que la courbe L peut être prolongée de x_0 aussi près que l'on voudra de $x=0$. Mais cette courbe ne pouvant en outre rencontrer ni L_1 ni $y=0$, il faut que la valeur de y sur L soit située entre 0 et la valeur de y sur L_1, ce qui met en évidence que la valeur de y sur L va vers zéro quand x décroit vers zéro. c. q. f. d.

Afin de prouver la seconde partie du théorème I, nous supposerons qu'il existe une courbe intégrale allant de $x=x_0$, $y=-y_0<0$, à l'origine. La valeur de $\dfrac{dy}{dx}$ n'étant alors jamais infini pour $0<x\leq x_0$, il s'en suit que y peut être exprimé en fonction holomorphe de x pour chaque point de cette courbe.

Soit donc $y=f(x)$ l'équation de cette courbe, et supposons que

$$\lim_{x=+0} f(x) = 0.$$

De l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - f(x)\varphi(f(x))] + xy\psi(x, f(x))$$

à laquelle doit satisfaire $f(x)$, on tire alors

$$(3) \quad \frac{e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x, f(x))dx}}{y^m} = -\frac{1}{y_0^m} - ma\int_{x_0}^{x}\frac{1 - f(x)\cdot\varphi(f(x))}{x} e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x, f(x))dx}\cdot dx\,.$$

Et si x_0 est une valeur suffisamment petite de x, on aura

$$1 - f(x)\cdot\varphi(f(x)) > \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0.$$

L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x}\frac{1 - f(x)\varphi(f(x))}{x} e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x, f(x))dx}\cdot dx$$

étant alors négative entre 0 et x_0, et prenant la valeur $-\infty$ pour $x = 0$, on est assuré qu'il existe une valeur x' de x, située entre 0 et x_0, pour laquelle le membre droit de l'équation (3) s'annulle.

Or on aurait alors

$$y = \infty \qquad \text{pour } x = x'$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.

II. Pour obtenir maintenant une représentation analytique des intégrales qui passent par l'origine, nous ferons usage d'une méthode d'approximations successives analogue à celle que nous avons employé dans notre mémoire cité.

Déterminons dabord la fonction y_1 satisfaisant à

$$x\frac{dy_1}{dx} = ay_1^{m+1} + xy_1\psi(x, 0)$$

de manière qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Ayant formé ensuite l'équation

$$x\frac{dy_2}{dx} = ay_2^{m+1}[1 - y_1 f(y_1)] + xy_2\psi(x, y_1)$$

on en détermine y_2 de manière que $y_2 = y_0$ pour $x = x_0$.

En continuant ainsi, on déterminera la fonction y_ν de manière qu'elle satisfasse à

$$x\frac{dy_\nu}{dx} = ay_\nu^{m+1}[1-y_{\nu-1}f(y_{\nu-1})] + xy_\nu\psi(x, y_{\nu-1})$$

et qu'elle prenne la valeur y_0 pour $x = x_0$.

Je dis alors que la série

$$y = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(y_{\nu+1} - y_\nu) \tag{4}$$

représente une courbe intégrale de l'équation (2), passant par le point x_0, y_0 et par l'origine, pourvu que x_0 et $y_0 > 0$ soient des valeurs suffisamment petites.

En mettant

$$m\int_{x_0}^{x}\psi(x, 0)dx = F_0(x)$$

$$m\int_{x_0}^{x}\psi(x, y_\nu)dx = F_\nu(x) \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

on aura en effet

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{F_0(x)}}{y_1^m} = \dfrac{1}{y_0^m} - ma\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{F_0(x)}}{x}dx \\ \dfrac{e^{F_1(x)}}{y_2^m} = \dfrac{1}{y_0^m} - ma\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{F_1(x)}[1-y_1f(y_1)]}{x}dx \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ \dfrac{e^{F_{\nu-1}(x)}}{y_\nu^m} = \dfrac{1}{y_0^m} - ma\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{F_{\nu-1}(x)}[1-y_{\nu-1}f(y_{\nu-1})]}{x}dx\,. \\ \text{— — — — — — — — — — —} \end{cases}$$

Soit maintenant M la valeur absolue maxima de $\psi(x, y)$ pour $|x| \leq \varrho_1$, $|y| \leq \varrho_1$, et soit $\varepsilon < \varrho_1$ une quantité positive telle que l'on ait

$$1 - yf(y) > \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour } |y| \leq \varepsilon < \varrho_1$$

et déterminons la quantité positive $\varrho_2 < \varrho_1$, telle que

$$\varrho_2 e^{M\varrho_1} < \varepsilon .$$

En prenant alors

$$y_0 < \varrho_2 , \qquad x_0 < \varrho_1 ,$$

je dis d'abord que toutes les fonctions y_ν sont positives et $< \varepsilon$ pour $0 < x \leq x_0$.

La première des équations (5) nous apprend en effet que

$$\frac{e^{F_0(x)}}{y_1^m} > \frac{1}{y_0^m} . \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0 .$$

Or on a

$$| F_0(x) | = m \left| \int_{x_0}^{x} \psi(x,\, 0) dx \right| < mM\varrho_1 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0 ,$$

ce qui nous donne

$$0 < y_1 < y_0 e^{M\varrho_1} < \varepsilon \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0 .$$

La fonction $1 - y_1 f(y_1)$ étant alors positive pour $0 < x \leq x_0$, on conclut que

$$\frac{e^{F_1(x)}}{y_2^m} > \frac{1}{y_0^m} \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0 .$$

Mais y_1 étant plus petit que ϱ_1, on conclut que

$$| F_1(x) | < Mm\varrho_1$$

ou que $y_2 < y_0 e^{M\varrho_1} < \varepsilon$.

En continuant ainsi on obtient pour toute valeur de ν

$$0 < y_\nu < \varepsilon \qquad \text{tant que } 0 < x \leq x_0 .$$

Or l'équation

$$\frac{e^{F_\nu(x)}}{y_\nu^m} = \frac{1}{y_0^m} - ma \int_{x_0}^{x} \frac{[1 - y_{\nu-1} f(y_{\nu-1})]}{x} e^{F_\nu(x)} dx$$

nous apprend alors que

$$\frac{e^{F_\nu(x)}}{y_\nu^m} < \frac{1}{y_0^m} - \frac{ma}{2} e^{Mm\varrho_1} \cdot \log \frac{x}{x_0}$$

ou que

$$(6)\qquad \frac{x^\alpha}{y_\nu^m} < \frac{x^\alpha e^{mM\varrho_1}}{y_0^m} - \frac{ma}{2} e^{2Mm\varrho_1} x^\alpha \log\frac{x}{x_0} \quad \text{pour } 0 < x \leq x_0$$

α désignant une quantité positive quelconque.

Mais la dérivée du membre droit étant égale à

$$e^{mM\varrho_1} x^{\alpha-1}\left[\frac{\alpha}{y_0^m} - \frac{mae^{mM\varrho_1}}{2}\cdot\alpha\log\frac{x}{x_0} - \frac{ma}{2}e^{mM\varrho_1}\right]$$

on conclut, qu'ayant choisi y_0 de telle manière que

$$\frac{\alpha}{y_0^m} > \frac{ma}{2} e^{mM\varrho_1}$$

le membre droit de l'inégalité (6) ira en décroisant, quand x va de x_0 vers zéro.

On aura donc constamment

$$(7)\qquad \frac{x^\alpha}{y_\nu^m} < \frac{x_0^\alpha}{y_0^m} e^{mM\varrho_1} \quad \text{pour} \begin{cases} 0 < x \leq x_0 \\ y_0 < \left[\dfrac{2\alpha}{ma}\right]^{\frac{1}{m}} \cdot e^{-M\varrho_1}. \end{cases}$$

Envisageons maintenant les deux équations

$$x\frac{dy_{\nu+1}}{dx} = ay_{\nu+1}^{m+1}[1 - y_\nu f(y_\nu)] + xy_{\nu+1}\psi(x, y_\nu)$$

$$x\frac{dy_\nu}{dx} = ay_\nu^{m+1}[1 - y_{\nu-1}f(y_{\nu-1})] + xy_\nu\psi(x, y_{\nu-1})$$

on en conclut que

$$\begin{aligned} x\frac{d(y_{\nu+1}-y_\nu)}{dx} = {} & a\left[y_{\nu+1}^{m+1} - y_\nu^{m+1}\right][1 - y_\nu f(y_\nu)] + x(y_{\nu+1} - y_\nu)\psi(x, y_\nu) \\ & - ay_\nu^{m+1}[y_\nu f(y_\nu) - y_{\nu-1}f(y_{\nu-1})] + \\ & + xy_\nu[\psi(x, y_\nu) - \psi(x, y_{\nu-1})] \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$(8)\qquad x\frac{d(y_{\nu+1}-y_\nu)}{dx} = H_\nu(x)[y_{\nu+1} - y_\nu] - K_\nu(x)[y_\nu - y_{\nu-1}]$$

H_ν et K_ν désignant des fonctions continues de x pour $0 < x \leq x_0$.

Soit maintenant

$$yf(y) = y^q \cdot b + y^{q+1} b_1 + \ldots + y^{q+\nu} b_\nu + \ldots$$

où $b \neq 0$, on peut donner à x_0 une valeur suffisamment petite, pour que $K_\nu(x)$ soit de même signe que b, tant que $0 < x \leq x_0$.

Remarquons en effet que

$$y_\nu f(y_\nu) - y_{\nu-1} f(y_{\nu-1}) = \left(y_\nu^q - y_{\nu-1}^q\right)\left[b + \frac{y_\nu^{q+1} - y_{\nu-1}^{q+1}}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q} b_1 + \ldots\right].$$

On pourra donc déterminer $\varepsilon_1 < \varepsilon$ tel que

$$\left|\frac{y_\nu f(y_\nu) - y_{\nu-1} f(y_{\nu-1})}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q} - b\right| < \left|\frac{b}{2}\right| \qquad \text{pour} \begin{cases} |y_\nu| \leq \varepsilon_1 \\ |y_{\nu-1}| \leq \varepsilon_1 . \end{cases}$$

Mais l'inégalité (7) nous apprend que

$$K_\nu(x)[y_\nu - y_{\nu-1}] = y_\nu^{m+1}\left[y_\nu^q - y_{\nu-1}^q\right]\left[a \frac{y_\nu f(y_\nu) - y_{\nu-1} f(y_{\nu-1})}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q} - \right.$$

$$\left. - \theta \frac{x_0^\alpha}{y_0^m} \cdot e^{Mm\varrho_1} \cdot x^{1-\alpha} \left(\frac{\psi(x, y_\nu) - \psi(x, y_{\nu-1})}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q}\right)\right]$$

où $\theta < 1$.

Observons de plus que

$$\left|\frac{\psi(x, y_\nu) - \psi(x, y_{\nu-1})}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q}\right| < \frac{N}{y_\nu^{q-1} + y_\nu^{q-2} y_{\nu-1} + \ldots + y_{\nu-1}^{q-1}}$$

$$< \frac{N}{q \cdot \dfrac{x^{\frac{\alpha}{m}(q-1)}}{x_0^{\frac{\alpha}{m}(q-1)}} y_0^{q-1}} \cdot e^{M\varrho_1(q-1)}$$

N désignant la valeur absolue maxima de $\dfrac{\partial}{\partial y}[\psi(x, y)]$ pour $|x| \leq \varrho_1$, $|y| \leq \varepsilon$.

En faisant

$$\frac{\alpha}{m}(q-1) = 1 - \alpha$$

ou

$$\alpha = \frac{m}{m+q-1}$$

on aura

$$K_\nu(x)[y_\nu - y_{\nu-1}] = y_\nu^{m+1}\left[y_\nu^q - y_{\nu-1}^q\right]\left[a\cdot\frac{y_\nu f(y_\nu) - y_{\nu-1}f(y_{\nu-1})}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q} - \right.$$

$$\left. - \theta_1 \frac{x_0}{y_0^{m+q-1}} \cdot \frac{e^{M\varrho_1[m+q-1]}}{q}\cdot N\right]$$

où $|\theta_1| < 1$.

En déterminant donc x_0 suffisamment petit pour que l'on ait

$$N\cdot\frac{x_0}{y_0^{m+q-1}}\,\frac{e^{M\varrho_1[m+q-1]}}{q} < \left|\frac{ab}{2}\right| \tag{9}$$

on peut être sûr que $K_\nu(x)$ est du même signe que b, pour toute valeur de x entre 0 et x_0.

Maintenant il n'offre pas de difficulté de prouver que la série (4) est convergente et satisfait à l'équation différentielle (2).

Deux cas sont alors à distinguer suivant que $b > 0$ ou $b < 0$

Supposons d'abord qu'on ait $b > 0$.

En observant que $y_2 - y_1 = 0$, pour $x = x_0$, l'équation

$$x\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} = (y_2 - y_1)H_1(x) - y_1K_1(x) \tag{10}$$

nous donne

$$y_2 - y_1 = -e^{\int_{x_0}^{x}\frac{H_1(x)}{x}dx}\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{y_1K_1(x)}{x}e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{H_1(x)}{x}dx}dx.$$

Mais y_1 étant positif ainsi que K_1, on conclut que $y_2 - y_1 > 0$ pour $0 < x \leq x_0$.

Cela étant établi, l'équation

$$x\frac{d(y_3 - y_2)}{dx} = (y_3 - y_2)H_2(x) - (y_2 - y_1)K_2(x) \tag{11}$$

où $y_2 - y_1 > 0$, $K_2 > 0$, nous permet de la même manière de conclure que

$$y_3 - y_2 > 0.$$

En continuant ainsi on aura

$$y_{\nu+1} - y_\nu > 0 \qquad\qquad \nu = 3, 4, \ldots.$$

Tous les y_ν étant en outre $< \varrho_1$, il est evident que la série (4) est convergente.

À l'aide du Théorème III de mon mémoire »Sur la convergence uniforme des séries», [1]) on prouve aisément que cette série est uniformément convergente et satisfait à l'équation différentielle, tant que

$$\delta \leq x \leq x_0$$

δ désignant un nombre positif aussi petit que l'on voudra. La série nous donnera donc la valeur de l'intégrale pour $0 < x \leq x_0$.

Dans le cas au contraire où $b < 0$, il faut procéder d'une manière différente.

L'équation (10), où $K_1(x) < 0$, nous apprend alors que

$$y_2 - y_1 < 0$$

et en suite on tire de l'équation (11) que $y_3 - y_2 > 0$.

En continuant ainsi on aura

$$y_{2\nu} - y_{2\nu-1} < 0$$
$$y_{2\nu+1} - y_{2\nu} > 0\,.$$

Mais $y_{\nu+2}$, y_ν satisfont évidemment à une équation

$$x\frac{d(y_{\nu+2} - y_\nu)}{dx} = (y_{\nu+2} - y_\nu)\overline{H}_\nu(x) - (y_{\nu+1} - y_{\nu-1})\overline{K}_\nu(x)$$

tout analogue à l'équation (8), et dans laquelle on prouve, de la même manière que ci-dessus, que $\overline{K}_\nu(x)$ est du même signe que b, quand x_0 satisfait à l'inégalité (9). On aura donc

$$x\frac{d(y_3 - y_1)}{dx} = (y_3 - y_1)\overline{H}_1(x) - y_2\overline{K}_1(x)$$

ce qui nous donne

$$y_3 - y_1 < 0\,.$$

Alors l'équation

$$x\frac{d(y_4 - y_2)}{dx} = (y_4 - y_2)\overline{H}_2(x) - (y_3 - y_1)\overline{K}_2(x)$$

---

[1]) Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förhandlingar, Stockholm 1897, page 615.

nous apprend que

$$y_4 - y_2 > 0 .$$

Les y à indices paires forment alors une suite croissante et les y à indices impaires une suite décroissante. Il est donc évident que chacune de ces suites a une limite déterminée.

Mettons

$$\lim_{\nu=\infty} y_{2\nu+1} = u$$

$$\lim_{\nu=\infty} y_{2\nu} = v .$$

Les séries

$$u = y_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (y_{2\nu+1} - y_{2\nu-1})$$

$$v = y_2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} [y_{2\nu} - y_{2(\nu-1)}]$$

seront alors uniformément convergentes, à cause du Théorème III de mon mémoire ci-dessus cité, et on aura

$$x\frac{du}{dx} = au^{m+1}[1 - vf(v)] + xu\psi(x, v)$$

$$x\frac{dv}{dx} = av^{m+1}[1 - uf(u)] + xv\psi(x, u) .$$

Ces deux équations nous donnent

$$x\frac{d(u-v)}{dx} = a[u^{m+1} - v^{m+1}][1 - vf(v)] + x[u - v]\psi(x, v)$$
$$- av^{m+1}[vf(v) - uf(u)] + xv[\psi(x, v) - \psi(x, u)]$$

ce que l'on peut écrire

$$x\frac{d(u-v)}{dx} = [u - v] \cdot H(x)$$

$H(x)$ désignant une fonction continue de x pour $0 < x \leq x_0$.

Or on sait que $u - v = 0$, pour $x = x_0$, et il s'en suit que

$$u - v = 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leq x_0$$

ce qui met en évidence que la série (4) est convergente et satisfait à l'équation (2). c. q. f. d.

Résumons enfin les inégalités auxquelles doivent satisfaire y_0 et x_0, pour que la série (4) soit convergente:

D'abord on déterminera ε tel que

$$1 - yf(y) > \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour } |y| \leq \varepsilon$$

$$\left| \frac{y_\nu f(y_\nu) - y_{\nu-1} f(y_{\nu-1})}{y_\nu^q - y_{\nu-1}^q} - b \right| < \frac{b}{2} \quad \text{pour } y_\nu \leq \varepsilon;\ y_{\nu-1} \leq \varepsilon .$$

Ayant déterminé en suite ϱ_2 de telle manière que

$$\varrho_2 e^{M\varrho_1} < \varepsilon$$

et que

$$\varrho_2 < \left[\frac{2}{(m+q-1)a}\right]^{\frac{1}{m}} \cdot e^{-M\varrho_1}$$

la série (4) sera convergente tant que

$$y_0 \leq \varrho_2 , \text{ et que } x_0 < \frac{|ab|}{2} \cdot \frac{q y_0^{m+q-1} e^{-M\varrho_1(m+q-1)}}{N} .$$

La démonstration ne nous permet donc pas à décider, si la méthode d'approximations successives donne toutes les intégrales qui passent par $x = 0$, $y = 0$, excepté dans des cas speciaux.

Un tel cas est par exemple quand $N = 0$;

Un autre cas où l'on obtient toutes les intégrales, est celui, où l'équation a la forme:

$$x \frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + xy[\varphi(y) + y^m \psi(x, y)] .$$

Il semble assez probable qu'on pourra obtenir toutes les intégrales de l'équation (2), passant par l'origine, en donnant à x_0, y_0 des valeurs convenables, mais la démonstration de la convergence semble offrir des difficultés considerables, quand les valeurs de x_0, y_0 ne satisfont pas aux conditions ci-dessus écrites.

Toutefois il est évident que la série (4) est toujours convergente au voisinage de $x = x_0$.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 132.)

Leeds. *Philosophical and literary society.*
Annual report. 77 (1896—97). 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 24: N:o 3. 1898. 8:o.
Berichte. Philol.-hist. Cl. 1897: 2. 8:o.
Lisboa. *Academia Real das sciencias.*
Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. (2) T 5 (1897): N:o 18. 8:o.
— *Direcção dos trabalhos geologicos de Portugal.*
Mémoires. 1897. 4:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15: P. 6. 1898. 8:o.
List of members. 1898. 8:o.
— *Nautical Almanac office.*
The nautical Almanac for the year 1901. 8:o.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol 58 (1897/98): N:o 3. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 73—74 (1898): N:o 2. 8:o.
Proceedings. Session 1897/98: N:o 188—189. 8:o.
— *Geographical society.*
Year-Book and Record 1898. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 54 (1898): P. 1. 8:o.
Geological literature added to the society's library, during the year 1897. 8:o.
— *Royal Microscopical society.*
Journal. 1898: P. 1. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 62 (1898): N:o 384—385. 8:o.
Year-book. 1897—98. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 14: P. 5. 1898. 8:o.
— *Meteorological office.*
Daily weather reports. 1897. 4:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1897: N:o 131; 1898: App. 2. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 3. 8:o.
Madrid. *R. Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales.*
Anuario. 1898. 32:o.

(Forts. å sid. 163.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 177.

Sur les nombres transcendants. II.

Par Hakon Grönwall.

(Communiqué le 9 Mars 1898 par G. Mittag-Leffler.)

Après la publication de ma note: Deux théorèmes sur les nombres transcendants (ce recueil, année 1897, p. 623), j'ai trouvé une démonstration du premier de ces théorèmes beaucoup plus simple que celle exposée dans ladite note. Elle repose sur le théorème général suivant.

Si l'on peut approcher au nombre irrationnel x par des fractions rationnelles

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

de sorte que

$$q_\nu^\mu \left| x - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right|$$

tend vers zéro quand ν augmente indéfiniment, et cela quelque grand que soit l'entier μ, x est un nombre transcendant.

Supposons en effet que x satisfasse à une équation algébrique

$$f(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m = 0 \tag{1}$$

$c_0, \ldots, c_m$ étant des entiers. Par hypothèse, x est un nombre irrationnel; nous pouvons par suite supposer $f(x) = 0$ dépourvue de racines rationnelles. Posons

$$x = \frac{p_\nu}{q_\nu} + h_\nu; \tag{2}$$

le produit $q_\nu^\mu h_\nu$ tend, pour ν infini, vers zéro quelque grand que soit μ et par conséquent pour $\mu = m$. Nous avons l'identité

$$f(x) = f\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right) + h_\nu f'\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right) + \ldots + \frac{h_\nu^m}{\underline{|m}} f^{(m)}\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right);$$

en multipliant par q_ν^m, il vient

$$q_\nu^m f(x) = q_\nu^m f\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right) + q_\nu^m h_\nu \left(f'\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right) + \ldots + \frac{h_\nu^{m-1}}{\underline{|m}} f^{(m)}\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)\right).$$

Ici $q_\nu^m f\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)$ est un entier qui est différent de zéro, l'équation (1) n'ayant pas de racines rationnelles; d'où

$$\left|q_\nu^m f\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)\right| \geqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Or en posant

$$\varphi(x) = |c_0| x^m + |c_1| x^{m-1} + \ldots + |c_m|$$

nous voyons que, pour chaque valeur de ν

$$\left|f^{(\lambda)}\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)\right| \leqq \varphi^{(\lambda)}(x_0) \qquad (\lambda = 1, \ldots m)$$

x_0 désignant la limite supérieure des quantités $\left|\frac{p_\nu}{q_\nu}\right|$, d'où s'ensuit que

$$\left|f'\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right) + \ldots + \frac{h_\nu^{m-1}}{\underline{|m}} f^{(m)}\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)\right|$$

est inférieur à un nombre fixe M pour toutes les valeurs de ν. Par suite

$$\left\{\begin{aligned} |q_\nu^m f(x)| &\geqq \left|q_\nu^m f\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)\right| - |q_\nu^m h_\nu| \cdot \left|f'\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right) + \ldots + \frac{h_\nu^{m-1}}{\underline{|m}} f^{(m)}\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}\right)\right| \\ &\geqq 1 - |q_\nu^m h_\nu| M \end{aligned}\right. \tag{4}$$

si ν est assez grand pour que le dernier membre soit positif. L'expression $|q_\nu^m h_\nu| \cdot M$ tendant vers zéro pour ν infini, nous

voyons donc que $f(x)$ est différent de zéro, c'est à dire x est un nombre transcendant. C. Q. F. D.

Nous pouvons appliquer ce théorème au nombre

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{a^{n_\nu}} \tag{5}$$

où les entiers a et a_ν satisfont aux conditions $a > 1$, $-a < a_\nu < a$, $a_\nu \gtreqless 0$ et où, pour une infinité de valeurs de l'indice ν, les entiers croissants n_ν vérifiant l'inegalité

$$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} > \varphi(\nu) \tag{6}$$

$\varphi(\nu)$ tendant vers l'infini avec ν. Ce nombre est en effet irrationnel (voir ma note citée, p. 627) et de plus, en posant

$$q_\nu = a^{n_\nu}, \quad \frac{p_\nu}{q_\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{a_\mu}{a^{n_\mu}},$$

on aura

$$|h_\nu| \leqq \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{|a_\mu|}{a^{n_\mu}} \leqq \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{a-1}{a^{n_\mu}} < \frac{1}{a^{n_{\nu+1}}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a-1}{a^\mu} = \frac{1}{a^{n_{\nu+1}-1}};$$

par suite, l'expression

$$\left| q_\nu^m h_\nu \right|$$

tend vers zéro quelque grand que soit m, si ν va vers l'infini en parcourant les valeurs pour lesquelles l'inégalité (6) est remplie. Par conséquent le nombre (5) est transcendant, ce qui est le théorème I de ma note déjà mentionnée.

On pourrait se servir du théorème général pour établir la transcendance des nombres représentés par beaucoup d'autres expressions, par exemple la suivante:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_\nu}$$

où α est un nombre rationnel quelconque, $a_1, a_2, \ldots$ des entiers tels que, quel soit l'entier μ

$$a_{\nu+1} > \alpha^{\nu+1} \cdot (a_1 \cdot a_2 \ldots a_\nu)^\mu$$

pour une infinité de valeurs de l'indice ν.

Au lieu d'insister sur ces applications, nous allons, avant de finir, faire l'observation suivante: Le théorème général subsiste encore si les p_ν et q_ν, ainsi que $c_0, \ldots, c_m$ sont des nombres entiers du domaine de rationnalité $(1, \sqrt{-m})$, m désignant un entier ordinaire positif sans diviseur quadratique autre que l'unité. En effet, un tel entier a toujours l'une des deux formes:

$$a + b\sqrt{-m}$$

si $m \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$, ou

$$a + b \cdot \frac{1 + \sqrt{-m}}{2}$$

si $m \equiv 3 \pmod{4}$, a et b étant deux entiers ordinaires, et il ne peut par suite avoir une valeur absolue moindre que l'unité sans être égal à zéro. L'inegalité (3) subsiste donc dans le cas actuel, et la démonstration du théorème s'achève comme précédemment.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 3.
Stockholm.

En anmärkning angående s. k. divergenta summerbara serier.

Af Henrik Oldenburg.

(Meddeladt den 9 Mars 1897 genom M. Falk.)

I andra tomen af Liouville's »Journal de Mathématiques pures et appliquées» för år 1896 har Borel i en afhandling med titeln »Fondements de la théorie des séries divergentes sommables» generaliserat limesbegreppet och sedan tillämpat detta på teorien för divergenta serier.

Han definierar *generaliserad limes* till en oändlig följd af kvantiteter på följande sätt:

Låt oss ha en oändlig följd af kvantiteter

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Definiera en funktion af reela variabeln a, $x(a)$, genom likheten

$$x(a) = x_0 + x_1 \frac{a}{1} + \ldots + x_n \frac{a^n}{\underline{|n}} + \ldots.$$

Den gifna följden förutsätta vi vara sådan, att $x(a)$ är en hel funktion af a.

Då säges den gifna följden tendera mot en *generaliserad limes*, x, om

$$\lim_{a=\infty} \left[e^{-a} x(a)\right] = x$$

är en ändlig, bestämd kvantitet.

Han härleder sedan åtskilliga egenskaper hos kvantiteten x, och till sist uppställer han följande sats, på hvilken han lägger stor vigt:

Om följden

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

tenderar mot en generaliserad limes, x, så tenderar följden

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots \tag{2}$$

äfven mot en generaliserad limes, som är lika med x.

Detta är felaktigt. Om följden (1) tenderar mot en generaliserad limes, så följer ej deraf att följden (2) tenderar mot en generaliserad limes. Det är lätt att visa ett exempel härpå. Betrakta följden

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots,$$

der elementen äro definierade genom likheten

$$\sin e^a = x_0 + x_1 \frac{a}{1} + \ldots + x_n \frac{a^n}{\underline{|n}} + \ldots;$$

denna följd tenderar mot en generaliserad limes, som är lika med noll. Men följden

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots$$

tenderar ej mot någon generaliserad limes, som man lätt finner

Den riktiga formuleringen af satsen är denna:

Om följden

$$x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots \tag{1}$$

tenderar mot en generaliserad limes, x, och om följden

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots \tag{2}$$

tenderar mot en generaliserad limes, så är denna lika med x

Ty sätt

$$\varphi(a) = e^{-a} x(a), \tag{3}$$

der

$$x(a) = x_0 + x_1 \frac{a}{1} + \ldots + x_n \frac{a^n}{\underline{|n}} + \ldots.$$

Deriveras (3), så erhålla vi

$$\varphi'(a) = e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)\,, \tag{4}$$

der

$$x'(a) = x_1 + x_2\frac{a}{1} + \ldots + x_{n+1}\frac{a^n}{|\underline{n}} + \ldots.$$

Integrera (4) mellan a_0 och a, så få vi

$$\varphi(a) - \varphi(a_0) = \int_{a_0}^{a}\{e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)\}da\,. \tag{5}$$

Låt här a gå mot oändligheten. Då är enligt antagande $\lim_{a=\infty}\varphi(a)$ ändlig, bestämd. Således måste integralen

$$\int_{a_0}^{\infty}\{e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)\}da$$

vara ändlig, bestämd. Då måste, om ett gränsvärde existerar,

$$\lim_{a=\infty}\{e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)\} = 0\,. \tag{6}$$

Men för att detta gränsvärde skall existera, är tydligen nödvändigt och tillräckligt, att

$$\lim_{a=\infty}[e^{-a}x'(a)] \tag{7}$$

existerar, alldenstund

$$\lim_{a=\infty}[e^{-a}x(a)] = x$$

existerar. Antaga vi då, att gränsvärdet (7) existerar, så är detta alldeles detsamma som att antaga, att följden (2) tenderar mot en generaliserad limes; ty om gränsvärdet (7) existerar, definierar det generaliserade limes till följden (2). Om således följden (2) tenderar mot en generaliserad limes, så erhålla vi af (6)

$$\lim_{a=\infty}[e^{-a}x'(a)] = \lim_{a=\infty}[e^{-a}x(a)] = x\,.$$

Således är generaliserade limes till följden (2), om den existerar, lika med x. h. s. b.

Det fel, BOREL begår och som orsakar den felaktiga formuleringen af satsen är följande: han påstår, att eftersom

$$\int_0^\infty \{e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)\}da$$

är ändlig, bestämd, så skulle

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)] = 0 .$$

Men detta gränsvärde kan, som bekant, vara obestämdt och integralen ändock ha ett ändligt, bestämdt värde. (Se t. ex. PICARD, Traité d'Analyse, första tomen sid. 26).

BOREL betraktar nu en oändlig (divergent) serie och uppställer följande definition:

Låt oss ha en serie

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Låt s_n vara summan af de n första termerna; $s_0 = 0$. Om då följden

$$s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$$

tenderar mot en generaliserad limes, s, så säges serien vara *generaliseradt summerbar* och kvantiteten s kallas dess *generaliserade summa.* [1])

Han bevisar sedan åtskilliga satser om generaliseradt summerbara serier. Till följd af det förut begångna felet *blir dock hans formulering af det nödvändiga villkoret för en series generaliserade summerbarhet oriktig.* Han påstår, att det nödvändiga villkoret för, att en serie skall vara generaliseradt summerbar, är, att följden af seriens termer skall tendera mot en generaliserad limes lika med noll.

Det är lätt att visa exempel på en serie, som är generaliseradt summerbar, men der följden af termerna ej tenderar mot någon generaliserad limes. Betrakta serien

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

---

[1]) BOREL kallar kvantiteten s för seriens *summa;* som det ej är fråga om summa i vanlig mening, torde det vara lämpligt att använda en annan benämning.

der termerna äro definierade af likheten

$$e^a \cos e^a - \sin e^a = u_0 + u_1 \frac{a}{1} + \ldots + u_n \frac{a^n}{\lfloor n} + \ldots.$$

Man finner lätt, att denna serie är generaliseradt summerbar; men det oaktadt tenderar ej följden

$$u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$$

mot en generaliserad limes lika med noll; man finner nämligen lätt, att ifrågavarande följd ej tenderar mot en generaliserad limes.

Den riktiga formuleringen af det nödvändiga villkoret för en series generaliserade summerbarhet är följande:

För att en serie skall vara generaliseradt summerbar, är nödvändigt, att, om följden af seriens termer tenderar mot en generaliserad limes, denna är lika med noll.

Ty låt oss ha en generaliseradt summerbar serie

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{1}$$

Låt kvantiteterna

$$s_0, s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots \tag{s}$$

vara definierade på samma sätt som förut. Denna följd (s) tenderar då mot en generaliserad limes, s, eftersom serien (1) är generaliseradt summerbar. Vidare, om följden

$$s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}, \ldots \tag{s'}$$

tenderar mot en generaliserad limes, så är denna lika med s.

Bilda genom subtraktion af elementen i (s') och (s) följden

$$s_1 - s_0, s_2 - s_1, \ldots s_{n+1} - s_n, \ldots,$$

som tydligen ingenting annat är än följden

$$u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots. \tag{u}$$

Om denna tenderar mot en generaliserad limes, u, så är

$$u = 0.$$

Ty följden (s') kan sättas under formen

$$(s') \quad s_1 = s_0 + u_0,\ s_2 = s_1 + u_1,\ \ldots,\ s_{n+1} = s_n + u_n,\ \ldots.$$

Elementen i följden (s') äro således bildade genom addition af motsvarande element i följderna (s) och (u). Men då måste generaliserad limes till följden (s') nödvändigt existera och vara lika med $s + u$. Men den måste också vara lika med s, om den existerar. Således

$$s + u = s,$$

hvaraf

$$u = 0.$$

h. s. b.

Vi kunna föröfrigt finna det nödvändiga villkoret för en series generaliserade summerbarhet enklare på en något annan väg, om vi observera, att Borel visat, att det *nödvändiga och tillräckliga* villkoret är, att integralen

$$\int_0^\infty e^{-a} u(a) da,$$

der

$$u(a) = u_0 + u_1 \frac{a}{\underline{|1}} + \ldots + u_n \frac{a^n}{\underline{|n}} + \ldots,$$

är ändlig, bestämd. Men härför är *nödvändigt*, om ett gränsvärde existerar, att

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a} u(a)] = 0.$$

Om således följden af seriens termer

$$u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

tenderar mot en generaliserad limes, måste denna vara noll, för att serien skall vara generaliseradt summerbar.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 152.)

Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 42 (1897—98): P. 1. 8:o.
Mauritius. *R. Alfred observatory.*
Annual report. Year 1896. Fol.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Resumenes mensuales 1891/92. 4:o.
Boletín mensual. 1897: 11. 4:o.
Milano. *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 37 (1898): Fasc. 2. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philos.-philol. Cl. Bd 20: Abth. 3. 1897. 4:o.
Almanach für das Jahr 1897. 8:o.
Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1897: H. 3. 8:o.
» Philos.-philol. u. hist. Cl. 1897: H. 2. 8:o.
Festreden. 3 st. 1897. 4:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 4 (1898): Fasc. 1. 8:o.
Newcastle-upon-Tyne. *Natural history society of Northumberland, Durham, and Newcastle-upon-Tyne.*
Natural history transactions. Vol. 13: P. 2. 1898. 8:o.
New York. *Microscopical society.*
Journal. Vol. 14 (1898): N:o 1. 8:o.
— *Meteorological observatory of the Dep. of Public Parks.*
Report. 1897: 3—12. 4:o.
Nizza. *Société de médecine et de climatologie.*
Nice-médical. Année 21: N:o 6, 11. 1897. 8:o.
Ottawa. *Meteorological service.*
Report. 1890, 1895. 8:o & 4:o.
Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 2. 8:o.
— *Rédaction de la Feuille des jeunes naturalistes.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1897/98): N:o 329. 8:o.
Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*
Processi verbali. Vol. 10 (1895/97): Pag. 243—292; 11 (1897/98): 1—10. 8:o.
Pola. *Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1897: 12. Fol.
Monats- u. Jahresübersicht 1897. Fol.
Riga. *Naturforscher-Verein.*
Korrespondenzblatt. 40. 1898. 8:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze morali . . . (5) P. 1—2: Vol. 4 (1896). 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 6 (1897): Fasc. 12 & Indice; 7 (1898). 8:o.

Atti. Cl. di scienze fisiche . . . (5) Rendiconti Vol. 7 (1898): Sem. 1: Fasc. 2—3. 4:o.

Roma. *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*
Atti. Anno 51 (1897/98): Sess. 1—2. 4:o.

— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino (3) Vol. 8 (1897): Trim. 3. 8:o.

— *Ministero di agricoltura, industria e commercio.*
Rivista meteorico-agraria. Anno 18 (1897): N:o 1—33, 35. Fol.

S:t Petersburg. *Institut Imp. de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 6: N:o 1. 1897. 4:o.

— *Laboratoire biologique.*
Bulletin. T. 2: B. 3. 1898. 8:o.

— *Musée zoologique.*
Annuaire. 1897: N:o 4. 8:o.

— *Société Imp. Russe de géographie.*
Izvjestija. T. 33 (1897): B. 4. 8:o.

— *K. Universitetet.*
Godičnyj akt 1897. 8:o.

— *Physikalisches Central-Observatorium.*
Ežeměsjačnyj meteorologičeskij bjulleten dlja Evropejskoj Rossii. G. 5 (1897): N:o 10—12. 4:o.

Tōkyō. *Geographical society.*
Journal of geography. Vol. 9 (1897): N:o 108. 8:o.

Torino. *Osservatorio centrale.*
Bollettino mensuale (2) Vol. 17 (1897): N:o 1—12. 8:o.

Washington. *Weather bureau.*
Monthly weather review. Year 1897: 11. 4:o.

Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1897: N:o 17—18. 8:o.

Af utgifvarne:

Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT. Separater ur årg. 1896—98. Lund. 8:o.

Svenska jägareförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 36 (1898): H. 1. Sthlm. 8:o.

AUGUSTE DAUBRÉE $^{25}/_{6}$ 1814—$^{29}/_{5}$ 1896. (De la part de ses enfants). Paris 1896. 8:o.

Af författarne:

MALM, A. H., Berättelse öfver Göteborgs och Bohus läns hafsfisken under 1896—97. Göteborg 1898. 8:o.

NILSON, L. F., Kulturförsök med sockerbetor på gotländsk myrjord. Visby 1896. 8:o.

STENSTRÖM, K. O. E., Några Hieracia macrolepidea från sydvestra Sverige. Lund 1896. 8:o.

ALBERT I, prince de Monaco. Sur la quatrième campagne scientifique de la »Princesse-Alice». Paris 1898. 4:o.

— Sur les observations météorologiques de l'Océan Atlantique. Paris 1898. 4:o.

— Sur le développement de Tortues (T. caretta). Paris 1898. 8:o.

BLYTT, A., Nye bidrag til kundskaben om karplanternes udbredelse i Norge. Kra 1897. 8:o.
CABREIRA, A., Sur les vitesses sur la spirale. Lisbonne 1898. 8:o.
— Sur l'aire de Polygones. Lisbonne 1897. 8:o.
KRIECHBAUMER, J., Neue oder wenig bekannte Icheneumoniden in der Sammlung des ung. National-Museums. Budapest 1896. 8:o.
— 8 st. småskrifter. Berlin 1896—98. 8:o.
LACROIX, A., Des Cloizeaux 1817—1897. Notice nécrologique. Paris 1897. 4:o.
LE SOUËF, D., A trip to the Bloomfield river district, North Queensland. Melbourne 1897. 8:o.
— Ascent of Mt. Peter Botte, North Queensland. Melbourne 1897. 8:o.
SCHUBE, TH., Die Verbreitung der Gefässpflanzen in Schlesien nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse. Breslau 1898. 8:o.
VOLANTE, A., Strenna polare 1898. Invocazione ed auguri mondiali a favore di Andrée. Torino 1898. Fol.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 4.

Onsdagen den 13 April.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot Justitierådet CARL GUSTAF HAMMARSKJÖLD med döden afgått.

Anmäldes, att de föreskrifna inspektionsberättelserna för de under Akademien lydande särskilda institutioner blifvit afgifna.

Från Professorn vid universitetet i Freiburg, Baden, A. MITSCHERLICH hade ingått skrifvelse med erbjudande att till ett Berzeliskt museum, som Akademien stode i begrepp att anordna, öfverlemna en bemälde Professor tillhörig samling af föremål, som antingen tillhört BERZELIUS eller på annat sätt stode i nära förbindelse med hans minne; och beslöt Akademien att med största tacksamhet mottaga detta erbjudande, hvarom Professor MITSCHERLICH skulle genom skrifvelse underrättas.

På derom af Professor W. LILLJEBORG gjord ansökan beslöt Akademien att utaf sina egna medel åt honom anvisa ett bidrag

af 2,000 kronor för utgifvande från trycket af ett utaf honom nyligen fullbordadt stort arbete öfver de i Sveriges färska och salta vatten förekommande krustacéer af Clodocerernas grupp.

Herr SMITT öfverlemnade för offentliggörande i Akademiens skrifter en af Filos. Licentiaten GABRIEL ANDERSSON författad afhandling med titel: »Comparison of Cottus poecilopus Heckel with Cottus gobio L.», samt redogjorde för densammas innehåll.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

dels i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) Ofvannämnda afhandling af Licentiat G. ANDERSSON; 2:o) »Mykologische Studien I. Beiträge zur Kenntniss der parasitischen Pilze», af Professor G. LAGERHEIM; 3:o) »Ex herbario Regnelliano, Adjumenta ad floram phanerogamicam Brasiliæ terrarumque adjacentium cognoscendam. Particula prima», af Doktor G. O. MALME; 4:o) »Ueber einige von C. A. M. LINDMAN in Brasilien und Paraguay gesammelte Gamopetolen», af Doktor K. FRITSCH; 5:o) »Faunan i Skånska kritformationens Saltholms- och Faxekalk. I. Echiniderna», af Docenten A. HENNIG;

och dels i Öfversigten: 1:o) »Sur les points singuliers des équations différentielles», af Doktor I. BENDIXSON; 2:o) »Ueber das Verhältniss der Spannung, des elektrischen Stromes und der Stärke der Strahlung der Spektra reiner Gase in Vakuumröhren», af Herr E. S. FERRY; 3:o) »Der elektrische Widerstand beim Uebergang des Stromes zwischen Stahlkugeln», af Doktor A. MEYER.

Genom anställda val kallades dels till inländsk ledamot Bruksegaren och Konsuln GÖRAN FREDRIK GÖRANSON, och dels till utländsk ledamot Professorn i matematik vid universitetet i Berlin LAZARUS FUCHS.

Genom val utsågs Professor V. B. WITTROCK till Præses under det ingående akademiska året, hvarefter afgående Præses Professor CHR. LOVÉN nedlade præsidium med ett föredrag afhandlande några drag ur bakterielifvet i jorden.

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Vitterhets-, historie- och antiqvitetsakademien.*
Månadsblad. Årg. 22(1893)—23(1894). 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 3 häften. 4:o.
— *Karolinska mediko-kirurgiska institutet.*
Berättelse. 1896/97. 8:o.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. Årg. 18(1898): 1. 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1898: N:o 2—3. 8:o.
— *Svenska turistföreningen.*
Årsskrift. 1898. 8:o.
— *Generalstaben.*
Karta öfver Sverige i skalan 1 : 100,000. Bl. 79. 1897. Fol.
Bergen. *Museum.*
Aarbog for 1897. 8:o.
Berlin. *K. Preussische geologische Landesanstalt.*
Abhandlungen. N. F. H. 26—28. 1897. 8:o.
— *Centralbureau der internationalen Erdmessung.*
Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im December 1897 von TH. ALBRECHT. 1898. 4:o.
Bordeaux. *Observatoire.*
Annales. T. 7. 1897. 4:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 35 (1898): N:o 2. 8:o.
— *Société entomologique de Belgique.*
Annales. T. 41. 1897. 8:o.
Mémoires. 6. 1897. 8:o.
— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*
Bulletin. T. 10(1896): Fasc. 2—3; 11(1897): 2—3. 8:o.
Budapest. *Musée National Hongrois.*
Természetrajzi füzetek. K. 21 (1898): P. 1—2. 8:o.
— *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtani közlöny. K. 27 (1897): F. 8—12. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 11: H. 6—7. 1897—98. 8:o.
— *K. Ungarische Reichs-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 25(1895); 27(1897): Th. 2. 4:o.
Publicationen. Bd 1. 1898. 4:o.
Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Bulletin. (4) Vol. 10(1896). 8:o.
Cambridge. *University Library.*
CAYLEY, A., The collected mathematical papers. Suppl. vol. 1898. 4:o.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 31: N:o 6. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 6 (1898): N:o 3—4. 8:o.
Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*
Journal. Vol. 14 (1897): P. 1. 8:o.
Coimbra. *Observatorio meteorologico.*
Observações meteorologicas e magneticas. Vol. 35 (1896). Fol.
Danzig. *Westpreussisches Provinzial-Museum.*
Amtlicher Bericht über die Verwaltung der Sammlungen. 18 (1897). 4:o.
Dresden. *K. Zoologisches und Anthropologisch-ethnographisches Museum.*
Abhandlungen und Berichte. Bd 6 (1896/97). 4:o.
MEYER, A. B., Abbildungen von Vogel-Skeletten. Lief. 22—24. Berlin 1897. 4:o.
Dublin. *Royal Dublin society.*
Scientific transactions. (2) Vol. 5: 13; 6: 2—13. 1896—97. 4:o.
Scientific proceedings. N. S. Vol. 8: P. 5. 1897. 8:o.
Edinburgh. *Geological society.*
Transactions. Vol. 7: P. 3. 1897. 8:o.
Roll of the Edinburgh geological society and lists of corresponding societies and institutions. 1897. 8:o.
The laws of the Edinburgh geological society. 1897.
Firenze. *Società entomologica italiana.*
Bullettino. 1897: Trim. 1—4. 8:o.
's-Gravenhage. *Commission géodésique Neerlandaise.*
Publications. 3. 1897. 4:o.
Greenwich. *R. observatory.*
Assumed mean right ascensions of clock stars and circumpolar stars, for 1898·0. 4:o.
Cape observatory.
Annals. Vol. 3, 6—7. 1896—97. 4:o.
Appendix to meridian observations, 1890—91. 4:o.
Results of meridian observations during the years 1861—65. 1897. 8:o.
Güstrow. *Verein der Freunde der Naturgeschichte.*
Systematisches Inhaltsverzeichniss und alphabetisches Register zu den Jahrg. 31—50 des Archivs des Ver. 1897. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Phil.-Hist. Kl. N. F. Bd 2: N:o 5—6. 1898. 4:o.
Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 19 (1896). 4:o.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Systeme der Deutschen Seewarte für das Dezennium 1886—1895. 4:o.
— *Sternwarte.*
Mittheilungen. N:o 4. 1898. 8:o.

(Forts. å sid. 216.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 4.
Stockholm.

Sur les points singuliers des équations différentielles.

Par IVAR BENDIXSON.

[Communiqué le 13 Avril 1898 par D. G. LINDHAGEN.]

Dans deux mémoires communiqués à l'académie le 9 Février et le 9 Mars cette année, j'ai étudié la nature des courbes intégrales satisfaisant à l'équation

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay + bx + \psi(x, y) \tag{1}$$

$\psi(x, y)$ désignant une fonction, laquelle pour de petites valeurs de x, y est développable en série de TAYLOR, ne contenant que des termes de dimension plus grande que 1. Dans le cas où $a \neq 0$ ainsi que où $a = 0$, $n = 1$, j'ai donné le développement analytique des intégrales réelles passant par l'origine, et j'ai énoncé des théorèmes, déterminant complètement la nature des courbes intégrales au voisinage de l'origine ($x = 0$, $y = 0$).

Pour le cas au contraire où $a = 0$, $n =$ un nombre quelconque, il offre beaucoup plus de difficulté de donner un développement analytique des intégrales, mais quant à la partie *qualitative* de la recherche, elle peut être menée au bout assez aisément.

On peut en effet démontrer les théorèmes suivants.

Théorème I.

Étant donnée l'équation

$$x^{2n}\frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + x \cdot \psi(x, y)$$

où $a > 0$, $m =$ *nombre impair,* f *et* ψ *étant des fonctions holomorphes au voisinage de* $x = 0$, $y = 0$, *il passe toujours par l'origine à droite de l'axe des* y *une courbe intégrale* L, *et à gauche de cet axe une courbe intégrale* L', *possédant les propriétés suivantes: On peut entourer l'origine par un cercle* C, $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ *tel qu'il passe une courbe intégrale allant à l'origine par chaque point* x_0, y_0 *de* C, *situé entre* L *et l'axe des* y *positifs, ou entre* L' *et l'axe des* y *negatifs.*

Si au contraire x_0, y_0 *est un point de* C *situé entre* L *et l'axe des* y *négatifs, ou entre* L' *et l'axe des* y *positifs, la courbe intégrale passant par* x_0, y_0 *n'ira pas à l'origine.*

On doit observer ici qu'il existe des cas speciaux, où L se réduit à l'axe des y positifs, et d'autres où L' se réduit à l'axe des y négatifs.

Théorème II.

Étant donnée l'équation différentielle

$$x^{2n+1}\frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + x\psi(x, y)$$

où $a > 0$, $m =$ *nombre impair,* f, ψ *étant des fonctions holomorphes au voisinage de* $x = 0$, $y = 0$, *il passe toujours par l'origine, à droite de l'axe des* y *une courbe intégrale* L, *et à gauche de cet axe une courbe intégrale* L', *possédant les propriétés suivantes: On peut entourer l'origine par un cercle* C $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ *tel qu'il passe une courbe intégrale allant à l'origine par chaque point* x_0, y_0 *de* C, *situé audessus de* L *et* L'. *Si au contraire* x_0, y_0 *est un point de* C, *situé audessous de* L *ou de* L', *la courbe intégrale passant par* x_0, y_0, *n'ira pas à l'origine* (excepté quand $x_0 = 0$).

Ici on doit observer que L ou L' peuvent, dans des cas speciaux, se réduire à l'axe des y positifs.

Pour le cas enfin où $a < 0$, $m =$ nombre impair, on aura des théorèmes analogues en faisant la substitution $y = -\eta$.

Théorème III.

Étant donnée l'équation différentielle

$$x^{2n}\frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + x \cdot \psi(x, y)$$

où $a > 0$, $m =$ *nombre pair,* f *et* ψ *désignant des fonctions holomorphes au voisinage de* $x = 0$, $y = 0$, *il passe toujours par l'origine à gauche de l'axe des* y *deux courbes intégrales* L' *et* L'_1, *possédant les propriétés suivantes: On peut entourer l'origine par un cercle* C, $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ *tel qu'il passe une courbe intégrale allant à l'origine par chaque point* x_0, y_0 *de* C *situé, ou à droite de l'axe des* y, *ou à gauche de cet axe entre* L' *et* L'_1. *Si au contraire* x_0, y_0 *est un point de* C *à gauche de l'axe des* y, *mais qui n'est pas situé entre* L' *et* L'_1, *la courbe intégrale passant par* x_0, y_0 *n'ira pas à l'origine.*

Ici on doit observer que L' et L'_1 peuvent dans des cas speciaux se réduire à une seule courbe. Cela a par exemple lieu quand $m = 0$. [1])

Pour le cas où $a < 0$, on aura un théorème analogue en mettant $x = -\xi$.

Théorème IV.

Étant donnée l'équation différentielle

$$x^{2n+1}\frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + x\psi(x, y)$$

où $a > 0$, $m =$ *nombre pair,* f *et* ψ *étant des fonctions holomorphes au voisinage de* $x = 0$, $y = 0$, *on peut entourer l'origine par un cercle* C, $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ *tel qu'il passe une courbe intégrale allant à l'origine par chaque point* x_0, y_0 *de* C.

Théorème V.

Étant donnée l'équation différentielle

$$x^{2n+1}\frac{dy}{dx} = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + x\psi(x, y)$$

---

[1]) Voir mon mémoire: »Sur les points singuliers des équations diff.». Öfversigt af Kongl. Vet.-Akad. Förh., Febr. 9 1898.

où $a < 0$, $m =$ *nombre pair,* f *et* ψ *désignant des fonctions holomorphes au voisinage de* $x = 0$, $y = 0$, *il passe toujours par l'origine, à droite de l'axe des* y, *deux courbes intégrales* L *et* L_1, *et à gauche de cet axe, deux courbes intégrales* L' *et* L'_1 *possédant les proprietés suivantes:*

On peut entourer l'origine par un cercle C, $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ *tel qu'il passe une courbe intégrale, allant à l'origine, par chaque point* x_0, y_0 *de* C, *situé entre* L *et* L_1, *ou entre* L' *et* L'_1. *Si au contraire* x_0, y_0 *est un point de* C *qui n'est situé, ni entre* L *et* L_1, *ni entre* L' *et* L'_1, *la courbe intégrale passant par* x_0, y_0 *n'ira pas à l'origine* (excepté évidemment quand $x_0 = 0$).

Ici on doit observer qu'il existe des cas où L et L_1 se réduisent à une seule courbe, et d'autres où L' et L'_1 ne sont aussi pas des courbes différentes, comme on sait qu'il a lieu quand $m = 0$. [1])

Nous procéderons maintenant à la démonstration des Théorèmes.

Démonstration du Théorème I.

Nous pouvons ici nous borner au cas où x_0, y_0 est un point tel que $x_0 > 0$, car la substitution $x = -\xi$, $y = -\eta$ réduit le cas où $x_0 < 0$ à celui où $x_0 > 0$.

Mettons maintenant

$$F(x\,,\,y) = ay^{m+1}[1 - yf(y)] + x\psi(x\,,\,y) \tag{2}$$

et envisageons les courbes satisfaisant à

$$F(x\,,\,y) = 0\,. \tag{3}$$

Deux cas sont alors à distinguer, suivant qu'il existe ou non une courbe, satisfaisant à l'équation (3), qui est située à droite de l'axe des y.

Nous supposerons d'abord qu'il n'existe pas de courbe, satisfaisant à l'équation (3), *et située à droite de l'axe des* y.

On peut donc entourer l'origine par un cercle C $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ tel que $\dfrac{dy}{dx}$ soit > 0 pour chaque point de C, situé à droite de

[1]) Voir mon mémoire cité.

l'axe des y. On fera en outre ϱ suffisamment petit pour que

(4) $$1 - yf(y) > 0 \qquad \text{tant que } |y| < \varrho.$$

Soit maintenant $y = y_\alpha(x)$ la courbe intégrale de l'équation donnée, passant par le point $x = \alpha < \varrho$, $y = 0$. On sait alors que y ira constamment en décroissant, quand x va en décroissant, tant que $|y| < \varrho$. Il s'en suit que la courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$ finira par s'éloigner de C.

On en conclut que la courbe intégrale passant par x_0, y_0, où $y_0 \leq 0$, n'ira pas à l'origine.

De l'autre coté il est évident que $y_\alpha(x)$ ira en augmentant, quand x va en croissant de $x = \alpha$. On conclut que la courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$ coupe nécessairement le cercle $x^2 + y^2 = \varrho^2$. Soient

$$x = \varrho \operatorname{Cos} \varphi_\alpha ; \qquad y = \varrho \operatorname{Sin} \varphi_\alpha ;$$

les coordonnées du point de rencontre entre le cercle et la courbe intégrale.

L'angle φ_α est donc une fonction de α. Mais deux courbes intégrales ne pouvant pas se couper à l'intérieur de C, on aura

$$\frac{\pi}{2} > \varphi_\alpha > \varphi_{\alpha_1} \qquad \text{quand } \alpha < \alpha_1 .$$

Quand α va en décroissant vers zéro, φ_α ira donc constamment en croissant, d'où l'on conclut que

$$\lim_{\alpha=0} \varphi_\alpha = \varphi_0$$

φ_0 désignant une quantité déterminée telle que $0 < \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Je dis alors que la courbe intégrale $y = y_0(x)$, passant par le point $x = \varrho \operatorname{Cos} \varphi_0$, $y = \varrho \operatorname{Sin} \varphi_0$, ira à l'origine.

On sait en effet que $y_0(x)$ ira en décroissant, quand x va en décroissant de $x = \varrho \operatorname{Cos} \varphi_0$ à zéro. Or $y_0(x)$ ne peut pas s'annuler pour une valeur de $x > 0$, car on n'aurait alors pas

$$\lim_{\alpha=0} \varphi_\alpha = \varphi_0 .$$

On sait donc que

$$\lim_{x=0} y_0(x) = a$$

a étant une quantité déterminée positive ou nulle. Mais la relation (4) nous apprend, qu'une courbe intégrale ne peut pas couper l'axe des y en un point dont l'ordonnée est > 0 à l'intérieur de C. On aura donc

$$\lim_{x=0} y_0(x) = 0 .$$

Soit maintenant x_0, y_0 un point de C, situé entre la courbe intégrale $y = y_0(x)$, et l'axe des y positifs, et envisageons la courbe intégrale $y = y(x)$, passant par ce point. Il est évident que $y(x)$ ira en décroissant en même temps que x, et la courbe étant tout entière comprise entre $y = y_0(x)$ et l'axe des y, on conclut de la même manière que ci-dessus que

$$\lim_{x=0} y(x) = 0 .$$

Si au contraire x_0, y_0 est un point de C, situé entre la courbe $y = y_0(x)$ et l'axe des x, il est evident que la courbe intégrale, passant par x_0, y_0, n'ira pas à l'origine, car on n'aurait alors pas

$$\lim_{\alpha=0} \varphi_\alpha = \varphi_0 .$$

La courbe $y = y_0(x)$ est donc la courbe L du théorème I.

Supposons maintenant qu'il existe des courbes, satisfaisant à l'équation (3), *et situées à droite de l'axe des y.*

D'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS [1]) on sait que toutes les valeurs de x, y, satisfaisant à l'équation (3), et situées au voisinage de $x = 0$, $y = 0$, doivent satisfaire à une certaine équation

$$ay^{m+1} + f_1(x)y^m + \ldots + f_{m+1}(x) = 0$$

$f_1, f_2, \ldots, f_{m+1}$, désignant des fonctions holomorphes de x.

Si cette équation contient des facteurs multiples, on peut la réduire à une autre équation

---

[1]) Voir WEIERSTRASS: »Einige auf die Theorie d. Analyt. Funct. sich bezieh. Sätze.» Mathem. Werke Tome II.

$$ay^{q+1} + \varphi_1(x)y^q + \ldots + \varphi_{q+1}(x) = 0 \tag{5}$$

ne contenant pas de facteur multiple, et où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}$ sont des fonctions holomorphes de x au voisinage de $x = 0$.

On obtiendra donc les points de ces courbes, où la tangente est parallèle à l'axe des x, en éliminant y entre cette équation et la suivante

$$\varphi'_1(x)y^q + \ldots + \varphi'_{q+1}(x) = 0\,.$$

Si $y = 0$ ne satisfait pas à l'équation (3), le resultat de cette élimination sera donnée par une équation

$$H(x) = 0$$

H désignant une fonction holomorphe au voisinage de $x = 0$.

En prenant ϱ suffisamment petit, pour que $H(x)$ ne s'annulle pour aucune valeur de x, de module > 0 mais $< \varrho$, on sait alors qu'aucune des courbes, satisfaisant à l'équation (3), ne possède à l'intérieur de C une tangente parallèle à l'axe des x.

Si au contraire $y = 0$ satisfait à l'équation (3), on déterminera d'une manière tout analogue la quantité ϱ telle qu'aucune des autres courbes, satisfaisant à l'équation (3), n'ait une tangente parallèle à l'axe des x, tant que $x^2 + y^2 \leq \varrho^2$.

On doit toujours observer que le cercle C $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ doit être tel que ϱ satisfasse à l'inégalité (4).

Soint maintenant $K_1, K_2, \ldots, K_r$ celles des courbes satisfaisant à l'équation (3), et situées à droite de l'axe des y, qui sont telles que $F(x, y)$ change de signe en les traversant. Nous les supposons en outre rangées de telle manière que l'on ait

$F(x\,, y) > 0$ entre l'axe des y negatifs et K_1
$F(x\,, y) < 0$ entre K_1 et K_2
— — — — — — —
$F(x\,, y) > 0$ entre K_r et l'axe des y positifs.

On prouve alors aisément que la partie d'une courbe intégrale qui est située tout entière à l'intérieur de C ne peut couper aucune des courbes K_ν plus d'une fois. Soit en effet K_ν l'une quelconque de ces courbes, on sait qu'une droite pa-

rallèle à l'axe des x ne peut couper K_ν plus d'une fois, car autrement K_ν aurait une tangente parallèle à cet axe, ce qui n'a pas lieu.

Si K_ν est situé audessus de l'axe des x, cette droite en coupant K_ν, sortira, quand x va en décroissant, de la partie de C, limitée par K_ν et $K_{\nu-1}$, et entrera dans la partie du cercle limitée par $K_{\nu+1}$ et K_ν.

De même, chaque courbe intégrale qui coupera K_ν, sortira alors, quand x va en décroissant, de la partie de C limitée par K_ν et $K_{\nu-1}$, et entrera dans la partie de C limitée par $K_{\nu+1}$ et K_ν.

Mais $\frac{dy}{dx}$ n'étant jamais infini à l'intérieur de C, toute la courbe située à l'intérieur de ce cercle, pourra être parcourue de telle manière que x va toujours en décroissant. Il n'est donc pas possible que cette courbe peut couper K_ν plus d'une fois.

Si K_ν est au contraire situé audessous de l'axe des x, la démonstration se fait de la même manière.

Pour la détermination de la courbe L et la démonstration du théorème nous distinguerons maintenant trois cas

1) K_1 et K_r sont tous les deux situés audessous de l'axe des x.

Envisageons alors une courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$, passant par un point $x = \alpha$, $y = K_1(\alpha)$ de K_1. Quand x va en décroissant de $x = \alpha$, cette courbe entrera dans la partie de C située entre K_1 et l'axe des y négatifs et y restera donc, tant que la courbe sera située à l'intérieur de C. Pour toutes ces valeurs on aura donc $\frac{dy}{dx} > 0$.

On en conclut que $y_\alpha(x)$ ira en décroissant en même temps que x, et la courbe finira alors par s'éloigner de C.

Soit maintenant $x = b$, $y = K_1(b)$ le point, où la courbe K_1 coupe le cercle $x^2 + y^2 = \varrho^2$, et menons dans le plan des x, y les droites $y = b$ et $x = b$, dont la dernière rencontrera la courbe K_r dans le point $x = b$, $y = K_r(b) > K_1(b)$.

Quand x va en croissant de $x = \alpha < b$, la courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$, passant par $x = \alpha$, $y = K_1(\alpha)$, entrera dans la partie du plan située entre les droites $x = 0$, $y = b$, $x = b$ et la courbe K_1, et ne pouvant pas couper K_1 ou $x = 0$, elle coupera nécessairément, ou la droite $x = b$ pour une valeur de $y < b$, ou la droite $y = b$ pour une valeur de $x < b$.

Désignons par $x = b(\alpha)$, $y = b_1(\alpha)$ le point, où la courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$ vient couper la ligne brisée

$$\left.\begin{matrix} x = b \\ y \leq b \end{matrix}\right\} \qquad\qquad \left.\begin{matrix} y = b \\ x \leq b \end{matrix}\right\}.$$

Les quantités $b(\alpha)$ et $b_1(\alpha)$ sont alors des fonctions de α et on aura

$$\left.\begin{matrix} b \geq b_1(\alpha_1) \geq b_1(\alpha) > K_1(b) \\ 0 \leq b(\alpha_1) \leq b(\alpha) \leq b \end{matrix}\right\} \quad \text{quand } \alpha_1 < \alpha$$

deux courbes intégrales ne pouvant pas se couper à l'intérieur de C. On en conclut que

$$(6) \qquad \lim_{\alpha=0} b(\alpha) = \overset{0}{b}\,; \qquad \lim_{\alpha=0} b_1(\alpha) = \overset{0}{b}_1$$

$\overset{0}{b}$ et $\overset{0}{b}_1$ désignant des quantités déterminées.

Je dis donc que la courbe intégrale $y = y_0(x)$, passant par $x = \overset{0}{b}$, $y = \overset{0}{b}_1$, va à l'origine.

Il est d'abord évident que $y = y_0(x)$ ne peut pas couper K_1, à cause des équations (6).

Si le point $x = \overset{0}{b}$, $y = \overset{0}{b}_1$ est situé entre K_1 et K_r, la courbe intégrale passant par ce point ne peut pas couper K_r, quand x va en décroissant de $x = \overset{0}{b}$, car une courbe intégrale qui coupera K_r, passera, quand x va en décroissant, de la partie du plan, située entre l'axe des y positifs et K_r, à celle située entre K_r et K_1. Quand x va en décroissant, $y = y_0(x)$ sera donc toujours compris entre K_1 et K_r, ce qui met en évidence que

$$\lim_{x=0} y_0(x) = 0\,.$$

Si le point $x = \overset{0}{b}$, $y = \overset{0}{b}$, est situé entre K_r et l'axe des y positifs, et $y = y_0(x)$ va couper K_r pour une valeur de $x < b$, on prouve de la même manière que

$$\lim_{x=0} y(x) = 0 .$$

Si enfin le point $x = \overset{0}{b}$, $y = \overset{0}{b}_1$ est situé entre K_r et l'axe des y positifs, mais $y = y_0(x)$ ne rencontre jamais K_r, on aura constamment $\frac{dy}{dx} > 0$, quand x va vers zéro. La valeur de $y_0(x)$ ira donc constamment en décroissant, et cette valeur étant en outre toujours plus grande que $K_r(x)$, on aura

$$\lim_{x=0} y(x) = a$$

où a est une quantité positive ou nulle. Une courbe intégrale ne pouvant pas couper l'axe des y dans d'autre point que l'origine, à l'intérieur de C, on conclut enfin que la courbe va à l'origine.

La courbe $y = y_0(x)$ sera donc la courbe L de notre théorème. En effet si x_0, y_0, $(x_0 < b)$ est un point de C, situé entre $y = y_0(x)$ et l'axe des y positifs, on n'aura rien à changer dans la démonstration donnée ci-dessus pour prouver que la courbe intégrale passant par x_0, y_0 ira à l'origine.

Au contraire si $x_0 < b$, y_0, est un point de C, situé entre $y = y_0(x)$ et l'axe des y négatifs, il est évident que la courbe intégrale passant par x_0, y_0, ira couper la ligne brisée en un point situé entre la courbe $y = y_0(x)$ et l'axe des y négatifs, ce qui met en évidence qu'elle ne peut pas passer par l'origine.

2) K_1 est situé audessous de l'axe des x, mais K_r est situé audessus de cet axe.

Soit alors $y = K_r(x)$ l'équation de K_r, et envisageons la courbe intégrale

$$y = y_\alpha(x)$$

passant par $x = \alpha$, $y = K_r(\alpha)$. Il est évident que cette courbe ira à l'origine. Car quand x va en décroissant de α, $y = y_\alpha(x)$ entrera dans la partie du plan, située entre K_r et l'axe des y

positifs, et ne pouvant plus en sortir, on aura constamment $y'_\alpha(x) > 0$, ce qui fait voir que

$$\lim_{x=0} y_\alpha(x) = a$$

a étant une quantité positive ou nulle. On prouve enfin de la même manière qu'au cas précédent que $a = 0$.

De l'autre côté on prouve de la même manière qu'au cas 1) que la courbe intégrale $y=y_\alpha(x)$, passant par $x=\alpha$, $y=K_1(\alpha)$, n'ira pas à l'origine.

Soit enfin $x = b$ une droite qui coupe K_1 et K_r à l'intérieur de C, il est facile à voir que la courbe intégrale $y=y_\alpha(x)$ $(\alpha < b)$ doit couper la droite $x=b$ dans un point $x=b$, $y=b(\alpha)$, situé entre les points où $x = b$ coupe les deux courbes K_1 et K_r, car on sait que $y = y_\alpha(x)$ ne peut pas rencontrer K_r sans aller à l'origine, ce qui n'a pas lieu.

On aura alors

$$\lim_{a=0} b(\alpha) = b_0$$

b_0 désignant une quantité déterminée, située entre $K_1(b)$ et $K_r(b)$. Maintenant on prouve de la même manière qu'au cas précédent que la courbe L, passant par $x = b$, $y = b_0$, ira à l'origine et qu'elle possède les propriétés que nous avons énoncées dans notre théorème.

3) K_1 et K_r sont tous les deux situés audessus de l'axe des x.

Soit alors $x = b$ une droite coupant K_1 et K_r à l'intérieur de C, et envisageons la courbe intégrale

$$y = y_\alpha(x)$$

passant par $x = \alpha$, $y = 0$. Cette courbe n'ira pas à l'origine, quand x va en décroissant, et coupera la droite $x = b$ dans un point $x = b$, $y = b(\alpha)$ situé entre 0 et $K_1(b)$. On aura alors

$$\lim_{\alpha=0} b(\alpha) = b_0$$

et on prouve que la courbe L passant par $x = b$, $y = b_0$ ira à l'origine, et sera la courbe L de notre théorème.

Le théorème I est ainsi complètement prouvé.

La démonstration du théorème II se fait d'exactement la même manière pour les courbes situées à droite de l'axe des y. Pour les courbes situées à gauche de cet axe on n'a qu'à faire la substitution $x = -\xi$ pour réduire ce cas au cas précédant.

Démonstration du Théorème III.

Soient alors $K_1, K_2, \ldots, K_r$ les courbes satisfaisant à

$$F(x, y) = 0$$

situées à droite de l'axe des y, et rangées de telle manière que l'on ait

$F(x, y) < 0$ entre l'axe des y négatifs et K_1
$F(x, y) > 0$ entre K_1 et K_2
— — — — — — —
$F(x, y) > 0$ entre K_r et l'axe des y positifs.

On peut alors, de la même manière qu'à la page 177, déterminer ϱ suffisamment petit, pour qu'aucune des courbes K_ν n'ait une tangente parallèle à l'axe des x à l'intérieur de $x^2 + y^2 \leq \varrho^2$, et on sait alors que la partie d'une courbe intégrale qui est située tout entière à l'intérieur de C, ne peut couper K_ν plus d'une fois.

Soit maintenant $x = b$ une droite, coupant K_1 et K_r à l'intérieur de C, et envisageons la courbe intégrale $y = y(x)$ passant par un point x_0, y_0, situé à l'intérieur de C, et tel que $x_0 < b$.

Nous supposerons d'abord que le point x_0, y_0 soit situé entre K_r et l'axe des y positifs. On sait alors que y ira en décroissant en même temps que x, jusqu'à ce que la courbe intégrale va rencontrer K_r.

Si K_r est situé audessus de l'axe des x, cela ne peut pas arriver car une courbe intégrale, coupant K_r, ira, quand x va en décroissant, de la partie du plan située entre K_1 et K_r à celle, située entre K_r et l'axe des y positifs. La courbe $y = y(x)$ n'ayant en outre pas de point commun avec l'axe des y, on aura

$$\lim_{x=0} y(x) = 0\,.$$

Si K_r est au contraire situé audessous de l'axe des x, il peut bien arriver que $y = y(x)$ va rencontrer K_r pour une certaine valeur α de x. La courbe entrera donc dans la partie du plan située entre K_r et K_1, et ne pouvant plus couper K_r, elle doit rester toujours entre K_r et K_1, si elle ne rencontre pas la courbe K_1 pour une valeur β de x.

Dans le premier cas il est évident que

$$\lim_{x=0} y(x) = 0\,.$$

Dans le second cas la courbe intégrale entrera dans la partie du plan située entre K_1 et l'axe des y negatifs, et ne pouvant plus rencontrer K_1, il est certain que $\frac{dy}{dx} < 0$ pour chaque valeur de $x < \beta$. On en conclut que $y(x)$ va en croissant quand x va vers zéro, ce qui nous donne enfin

$$\lim_{x=0} y(x) = a\,.$$

L'inégalité (4) nous apprend enfin, que $a = 0$, deux courbes intégrales ne pouvant pas se couper à l'intérieur de C.

Si le point $x_0 < b$, y_0 *est situé entre* K_1 *et* K_r, la courbe intégrale $y = y(x)$, passant par x_0, y_0 peut couper K_r, et on retombe alors sur le cas précédent, ou elle peut rester tout entière entre K_1 et K_r et alors elle ira évidemment à l'origine, ou enfin elle peut couper K_1 et entrer dans la partie du plan située entre K_1 et l'axe des y négatifs, dans quel cas on pourra conclure comme cidessus que

$$\lim_{x=0} y(x) = 0\,.$$

Si enfin le point est situé entre K_1 et l'axe des y négatifs la courbe intégrale peut couper K_1 et on retombe alors sur le cas précédent, ou elle sera toujours comprise entre K_1 et l'axe des y négatifs, ce qui fait voir qu'elle ira à l'origine.

Nous pouvons donc affirmer que par chaque point x_0, y_0, à l'intérieur de C et tel que $x_0 < b$, il passe une courbe intégrale allant à l'origine.

Nous passerons maintenant à l'étude des courbes intégrales allant à gauche de l'axe des y.

Soient à cet effet $K'_1, \ldots, K'_r$ les courbes satisfaisant à

$$F(x, y) = 0$$

et rangées de telle manière que $F(x, y) < 0$ entre l'axe des y négatifs et K'_1, $F(x, y) > 0$ entre K'_1 et $K'_2, \ldots, F(x, y) > 0$ entre K'_r et l'axe des y positifs. Nous déterminerons ϱ suffisamment petit pour qu'aucune courbe intégrale ne rencontre une des courbes K'_ν plus d'une fois à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = \varrho^2$, et que l'inégalité (4) soit satisfaite. Nous distinguerons alors deux cas, suivant que K'_1 et K'_r sont situés du même côté de l'axe des x ou non.

Nous pouvons dans le premier cas supposer que K'_1 et K'_r sont tous les deux situés audessous de l'axe des x, car la substitution $y = -\eta$ réduit le cas où ils sont situés audessus de cet axe à celui-ci. Soit $x = -b$ une droite, coupant K'_1 et K'_r à l'intérieur de C $(x^2 + y^2 \leq \varrho^2)$ et envisageons la courbe intégrale

$$y = y_\alpha(x)$$

passant par $x = -\alpha > -b$, $y = K'_1(-\alpha)$; $y = K'_1(x)$ désignant l'équation de K'_1.

On sait alors qu'on aura constamment $\frac{dy}{dx} < 0$ pour $x > -\alpha$, tant que la courbe est située à l'intérieur de C. La courbe $y = y_\alpha(x)$ finira donc par s'éloigner de C pour des valeurs suffisamment petites de $-x$.

De l'autre côté il est évident que $y = y_\alpha(x)$ doit rencontrer $x = -b$ dans un point $x = -b$, $y = -b(\alpha) < 0$. Car si la courbe est tout entière située entre K_1 et K_r pour $-b \leq x \leq -\alpha$, cela est évident. Si au contraire la courbe va rencontrer K_r en un point dont l'abscisse est égal à $-a > -b$, on aura $y'_\alpha(x) > 0$ pour toute valeur de x située entre $-a$ et $-b$, ce qui fait voir que $-b(\alpha) < 0$. On prouve donc aisément que

$$\lim_{\alpha=0} (-b(\alpha)) = -b_0$$

où b_0 est une quantité déterminée positive ou nulle.

La courbe intégrale L', passant par $x = -b$, $y = -b_0$, ira donc à l'origine. Car s'il n'était pas ainsi, elle finirait par être située audessus de K'_r pour des valeurs suffisamment petites de $-x$; et $\frac{dy}{dx}$ étant alors constamment > 0, on voit que la courbe finirait par s'éloigner de C dans la direction de l'axe des y positifs. A cause de la continuité on pourrait donc conclure que, pour une valeur de $b(\alpha)$ très rapprochée de b_0, la courbe intégrale, passant par $x = b$, $y = -b(\alpha)$ finirait aussi par s'éloigner de C dans la direction de l'axe des y positifs, ce qui n'a jamais lieu quand $b(\alpha) > b_0$.

Il s'en suit donc que L' va à l'origine.

Envisageons maintenant la courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$, passant par $x = -\alpha > -b$, $y = 0$. On voit aisément que cette courbe ne va pas à l'origine, $\frac{dy}{dx}$ étant > 0 pour toute valeur de $x > -\alpha$. Mais cette courbe coupera la droite $x = -b$ en un point $x = -b$, $y = -b_1(\alpha) < 0$, et on voit aisément que

$$\lim_{\alpha=0} b_1(\alpha) = b'_0$$

b'_0 désignant une quantité positive déterminée. Il est alors facile à démontrer, que la courbe intégrale L'_1, passant par $x = -b$, $y = -b'_0$ va à l'origine.

Dans le cas où $b_0 = b'_0$, il n'y a plus d'une seule courbe intégrale à gauche de l'axe des x, qui passe par l'origine. Dans le cas au contraire où $b'_0 < b_0$, on voit qu'il passe une courbe intégrale allant à l'origine par chaque point, situé entre L' et L'_1. c. q. f. d.

Dans le second cas, où K'_1 est situé audessous de l'axe des x et K'_r audessus de cet axe, nous envisageons la courbe intégrale $y = y_\alpha(x)$ passant par $x = -\alpha$, $y = K'_r(-\alpha)$. Cette courbe ne pouvant couper K'_r plus d'une fois, il s'en suit que $y'_\alpha(x) > 0$ pour $-\alpha < x < 0$, d'où l'on conclut que la courbe finira par s'éloigner de C. Il est aussi évident que cette courbe ira rencontrer la droite $x = -b$ en un point $x = -b$, $y = -b(\alpha)$.

En faisant varier α vers zéro, on prouve maintenant d'une manière, tout analogue à celle employée ci-dessus, qu'il existe une courbe L'_1, allant à l'origine.

En étudiant de la même manière les courbes intégrales $y = y_\alpha(x)$, passant par un point de K'_1, on prouve l'existence de l'autre courbe intégrale L'.

Notre Théorème III est ainsi complètement démontré.

Pour la démonstration du Théorème IV on doit observer, que pour les courbes, situées à droite de l'axe des y, cela se fait exactement de la même manière qu'au théorème III, et par la substitution $x = -\xi$ on traite aussi les courbes à gauche de l'axe des y de la même manière.

Pour la démonstration du Théorème V enfin, on procédera de la même manière que pour les courbes du Théorème III, situées à gauche de l'axe des y.

Nous avons ci-dessus fait la remarque, qu'il existe des cas où la courbe L des théorèmes I et II se réduit à l'axe des y positif.

Il n'est en effet pas difficile d'en donner un exemple.

Envisageons en effet l'équation

$$x^{n+3}\frac{dy}{dx} = ay^2 + bx^2 \tag{6}$$

où a et b sont positifs. Je veux démontrer, que la courbe intégrale y_1, passant par le point x_0, y_0, ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$) coupera nécessairément l'axe des x en un point dont l'abscisse est > 0.

Soit en effet z_1 la courbe intégrale de l'équation

$$x^{n+3}\frac{dz}{dx} = bx^2$$

passant par le point x_0, y_0, on aura

$$z_1 - y_0 = -\frac{b}{n}\left[\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}\right].$$

Pour une valeur $\alpha > 0$ mais $< x_0$ de x, on aura alors $z_1 = 0$. En formant maintenant

$$x^{n+3}\frac{d(y_1 - z_1)}{dx} = ay_1^2$$

on aura $\frac{d(y_1 - z_1)}{dx}$ constamment > 0 pour $x_0 > x \geq \alpha$, ce qui met en évidence que $y_1 - z_1 < 0$ pour $x_0 > x \geq \alpha$, ou enfin que $y_1 < 0$ pour $x = \alpha$. Comme $\frac{dy}{dx}$ est constamment > 0, quand $x > 0$, on s'assure donc que y_1 ne peut pas aller à l'origine.

A droite de l'axe des y il n'existe donc pas de courbe intégrale allant à l'origine. Et la substitution $x = -\xi$, ou $x = -\xi$, $y = -\eta$ (suivant que n est pair ou impair) nous apprend alors, qu'il n'y a aussi pas de courbe intégrale, passant par l'origine, et située à gauche de l'axe des y.

Il est aussi très facile à donner des exemples, où L' et L'_1 du théorème III sont des courbes distinctes.

On s'assure en effet aisément que l'équation

$$(7) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = ay^{m+1} + xy[b + x\psi(x)] \qquad (m = \text{nombre pair})$$

a les deux courbes L' et L'_1 distinctes, ou non, suivant que $mb - 1 > 0$, ou non. En effectuant l'intégration de l'équation (7), on obtient en effet

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{mb} e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x)dx} \cdot \frac{1}{y^m} = \frac{1}{y_0^m} - ma \int_{x_0}^{x} \frac{x^{mb-2}}{x_0^{mb}} e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x)dx} \cdot dx$$

ce qui nous donne

$$e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x)dx} \cdot \frac{1}{y^m} = \frac{1}{x^{mb}}\left[\frac{x_0^{mb}}{y_0^m} - ma \cdot e^{m\int_{x_0}^{\xi}\psi(x)dx}\left(\frac{x^{mb-1}}{mb-1} - \frac{x_0^{mb-1}}{mb-1}\right)\right]$$

ξ désignant une quantité comprise entre x_0 et 0.

Si l'on a $x_0 > 0$, on voit bien ici que le membre droit est toujours positif, tant que $0 < x < x_0$, et on en conclut aisément que chaque courbe intégrale ira à l'origine, comme nous l'avons énoncé. Si au contraire x_0 est < 0, nous écrivons notre équation de la manière suivante

$$e^{m\int_{x_0}^{x}\psi(x)dx} \cdot \frac{1}{y^m} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{mb}\left[\frac{1}{y_0^m} - \frac{ma}{(mb-1)x_0} e^{m\int_{x_0}^{\xi}\psi(x)dx}\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{mb-1} - 1\right)\right].$$

Si $mb - 1 < 0$, on voit que le membre droit est d'abord positif pour $x = x_0$, mais négatif pour des valeurs négatives très petites de x. On en conclut qu'il existe une valeur négative de x entre x_0 et 0, pour laquelle on a $y = \infty$. Il n'y a donc pas dans ce cas de courbe intégrale, passant par l'origine, et située à gauche de l'axe des y, (excepté évidemment $y = 0$).

Si enfin $mb - 1 > 0$, on peut faire $|y_0|$ suffisamment petit, pour que le membre droit soit toujours positif, et pour de telles valeurs de y_0 il est certain que la courbe intégrale correspondante ira à l'origine. Pour des valeurs plus grandes de $|y_0|$ le membre droit peut s'annuler, et il est alors évident qu'il ne passe pas par les points correspondants une courbe intégrale allant à l'origine.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 4.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Über das Verhältniss der Spannung, des elektrischen Stromes und der Stärke der Strahlung der Spektra reiner Gase in Vakuumröhren.

Von Ervin S. Ferry.

[Mitgeteilt den 13 April 1898 durch K. Ångström.]

Infolge unserer fast gänzlichen Abhängigkeit von dem Gebrauche des Spektrokops sowohl bei den Erforschungen der Geschichte und des gegenwärtigen Zustandes der Himmelskörper, wie für das Studium der Beschaffenheit von Materien, ist eine Kenntniss der in Spektra durch verschiedene Umstände hervorgerufenen Verschiedenheiten von grösstem theoretischen Wert. Und gleichzeitig giebt die Verwendung der Spektrophotometrie zur Messung hoher Temperaturen und zur Bestimmung der quantitativen Zusammensetzung von Mischungen dem Gegenstand ein erhöhtes Interesse vom praktischen Gesichtspunkt aus.

Die von K. Ångström [1]) angestellten bolometrischen Messungen zeigen, dass die Strahlung eines durch Elektricität leuchtend gemachten Gases der Stärke des Stromes proportional ist, — wenigstens in den weiten Grenzen seiner Experimente. Gleichzeitig hat er nachgewiesen, dass diese Proportionalität nicht nur für die Gesamtstrahlung, sondern auch für die leuchtenden Teile der strahlenden Energie gilt. Hiernach möchte man erwarten,

---

[1]) Nova Acta Reg. Soc. Ups. III, 1892.

dass dasselbe Gesetz auch für die Stromstärke und die Strahlung der einzelnen Spektrallinien giltig sei. Resultate, die LAGARDE [1]) über das Spektrum des Wasserstoffs erhalten hat, scheinen dieser Ansicht zu widersprechen. LAGARDE kommt zu dem Schlusse, dass sich bei konstanter Spannung die sichtbare Strahlung einer Linie des Wasserstoffspektrums wie der Logarithmus der Stromstärke ändert, wenn die Basis des Logarithmus annähernd gleich der Einheit ist. Aber es muss hervorgehoben werden, dass LAGARDE, um die Strahlung des Gases hervorzurufen, ein Ruhmkorffinduktorium verwendete, und, wie bereits E. WIEDEMANN [2]) bemerkt hat, hängt die Grösse und Verteilung der Energie in diesen Spektra in hohem Grade von der Thätigkeit des Interruptors, dem Widerstande der Entladungsröhre und verschiedenen ähnlichen Umständen ab. Andererseits ist die Bestimmung der Stromstärke bei einer solchen Entladung mit grossen Schwierigkeiten verbunden, und die Verwendung eines Galvanometers bei dieser Messung in der Art, wie LAGARDE es thut, kann natürlich kein Resultat ergeben, dass sich an Genauigkeit mit denen vergleichen liesse, die bei der Messung der anderen Grössen dieses Experimentes erreichbar sind. In Anbetracht unserer Unsicherheit in dieser sehr wichtigen Frage schien mir ein detaillierteres Studium desselben von Wert zu sein.

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist das photometrische Studium der Veränderungen gewesen, die in den Spektra reiner Gase durch verschiedene Stromstärke und bei verschiedenem Druck hervorgerufen werden. Da diese Untersuchung als Ergänzung zu K. ÅNGSTRÖMS »Bolometrische Untersuchung über die Stärke der Strahlung verdünnter Gase unter dem Einflusse der elektrischen Entladung» gedacht ist, so wurde derselbe Apparat und die gleiche Methode wie bei ihm angewandt, mit Ausnahme der Veränderungen, natürlich, die die

[1]) Recherches Photométriques de la spectre de l'hydrogène. Ann. de Chim. et de Phys. VI, 4, p. 248 (1885).

[2]) Über das thermische und optische Verhalten von Gasen unter dem Einflusse electrischer Entladung. Pogg. Ann. X, p. 202 (1880).

Substitution eines Bolometers durch ein Spektrophotometer erforderlich machte.

Die Entladungsröhre würde beständig mit einer Quecksilberpumpe in Verbindung gehalten, die mit MAC LEODSCHEN Manometer versehen war, so dass die Spannung beliebig geändert und gemessen werden konnte. Nach CORNUS Vorgang [1]) war zwischen die Pumpe und die Entladungsröhre eine Barometerröhre eingeschaltet, die zur Einführung der zu untersuchenden Gase diente, und weiter eine Anzahl mit Phosphorsäure Anhydrid, Schwefel und Kupfer gefüllter Röhren zur Entfernung der Wasser- Quecksilber- und Schwefeldämpfe. Am Apparat befand sich kein Krahn, und alle Verbindungen waren durch Zusammenschmelzung der einzelnen Teile hergestellt worden.

Ehe der Apparat hergestellt wurde, wurde jedes Glasrohr mit Alkohol, Salpetersäure und destilliertem Wasser gereinigt, und nachdem die Arbeit mit dem Lötrohr vollendet war, wurden die fertig gestellten Teile wiederum in derselben Weise gereinigt und durch einen Strom filtrierter trockner Luft sorgfältig getrocknet. Die Entladungsröhren wurden ausserdem auf folgende Weise behandelt: sie wurden zum Teil mit destilliertem Wasser und gereinigtem Sand gefüllt und dann ungefähr 6 Stunden lang in einem Rotationsapparat rotieren gelassen, in der Hoffnung, durch Reibung die festen Kohlenverbindungen zu entfernen, die durch die Flamme des Lötrohres eingeführt sein können. Dann wurden sie mit destilliertem Wasser und hierauf mit einem Dampfstrom aus einem gläsernen Destillationsapparat ausgespült. Nachdem der Apparat zusammengesetzt worden war, wurde das ganze Röhrensystem wiederholt mit reinem, getrockneten, elektrolytisch präparierten Wasserstoff ausgespült, dieses selbst sorgfältig ausgepumpt und dann durch Sauerstoff ersetzt. Als der Apparat mit Sauerstoff gefüllt war, wurde eine elektrische Entladung durch den ganzen Apparat geführt, indem die Poldrähte einer Induktionsrolle mit Stücken von Zinnfolie verbunden wurden, die ungefähr in einem halben Meter Abstand

[1]) A. CORNU, Journal de Physique V, p. 100 (1886).

um Teile des Röhrensystems gewickelt worden waren. Hierdurch entsteht Ozon, das auf Verunreinigungen, die der bisherigen Behandlung widerstanden haben, eine stark oxydierende Wirkung ausübt. In einigen Fällen würde die Reaktion dadurch erhöht, dass die evakuierten Röhren mit Hülfe eines Bunsenbrenners zu einer schwachen Rotglühhitze erhitzt wurden. Da das durch diese Behandlung erreichte Resultat den Übelstand, dass die Röhren beim Eintreten der Elektroden wiederholt zersprangen, nicht aufzuwiegen schien, so blieb diese Methode auf einige wenige Fälle beschränkt.

Um zu verhindern, dass die Bestandteile des Glases die Spektra beeinflussten, hatten die verwendeten Entladungsröhren ungefähr 1 cm Durchmesser. Für die Zuleitung des erregenden elektrischen Stromes waren sie mit Aluminium-Elektroden versehen. Um die Potentialdifferenz zwischen zwei bestimmten Punkten messen zu können, waren etwa 5 cm von einander zwei kleine Platinadrähte eingeschmolzen worden. Um das Gas in der Entladungsröhre leuchtend zu machen, wurde eine von Klingelfuss in Basel verfertigter Akkumulator von 1200 Elementen verwendet. Ein d'Arsonvalscher Galvanometer und ein von einer 10 procentigen Jodkadmiumlösung in Amyl-Alkohol gebildeter Widerstand dienten dazu, die Stromstärke zu bestimmen und nach Belieben zu verändern. Das Spektroskop war mit 2 Prismen und einem Vierordtschen Doppelspalt von Fuess in Berlin versehen. Durch den einen Spalt konnte man die Axe der Entladungsröhre entlang sehen, der andere erhielt sein Licht von der Vergleichslampe aus, mit Hülfe eines versilberten Glasspiegels, der in einem Winkel von 45° zur Axe des Kollimators aufgestellt war. Der Apparat würde so aufgestellt, dass die beiden zu vergleichenden Spektra mit einer kaum bemerkbaren Trennungslinie dazwischen am Fokus des Beobachtungsfernrohres neben einander gebildet wurden. Das für die Hervorbringung des Vergleichungsspektrums nötige Licht lieferte ein Argandgasbrenner in Verbindung mit einem Gasdruckregulator, der, wie vorausgehende Experimente ergeben hat-

ten, den Druck des Gases lange Zeitabschnitte hindurch konstant auf 2 Procent erhielt. In der Fokalebene des Fernrohrs befand sich ein Diaphragma mit einem Spalt, dessen Breite nach der zu beobachtenden Spektrallinie eingestellt werden konnte.

Die Beobachtungsmethode bestand darin, dass der Apparat zunächst so weit ausgepumpt wurde, bis die Spannung ungefähr 0,01 mm Quecksilber betrug. Dann würden durch die Barometerröhre Gasblasen eingeführt, bis die Spannung ungefähr 4,0 mm betrug. Die sichtbare Strahlung der einzelnen Linien des Spektrums würde dann im Verhältniss zum Spektrum der Vergleichungslichtquelle für verschiedene Stromstärken von 1 Milliampère bis zu 6 Milliampères gemessen. Die Potentialdifferenz in der Entladungsröhre würde gleichfalls beobachtet. Dann würde ein wenig Gas ausgepumpt, die verringerte Spannung gemessen, die sichtbare Strahlung derselben Spektrallinien dann wiederum für verschiedene Stromstärken bestimmt. Ähnliche Beobachtungsreihen würden bei verschiedenen abnehmenden Spannungen bis zu ungefähr 0,25 mm ausgeführt.

In dieser Weise wurden die Bandenspektren von Wasserstoff und Stickstoff untersucht. Ausserdem wurde der Apparat einmal unter Beiseitelassung der Schwefel- und Kupferröhren zusammengesetzt, so dass die Quecksilberdämpfe aus der Pumpe in die Entladungsröhre eintraten und ihr glänzendes Spektrum neben dem des Stickstoffs zu sehen war. Die sichtbare Strahlung der grünen Quecksilberlinie würde dann für verschiedene Stromstärken gemessen. Trotz der ausserordentlichen Mühe, die angewendet wurde, um Verunreinigungen aus dem Apparate zu entfernen, bot sich ferner nur zu häufig Gelegenheit, das »zweite Wasserstoffspektrum» zu studieren. Es ist verhältnismässig leicht, Spektra von Stickstoff, Sauerstoff und einigen anderen Gasen zu erhalten, in welchen dieses Spektrum fehlt, selbst wenn man die Verdünnung bis zu der untersten Grenze treibt, bei anderen Gasen mag es bei einer Spannung von 1—2 mm praktisch unsichtbar bleiben, reduciert man die Spannung aber, dann kommt es oftmals glänzend zum Vorschein.

Der Wasserstoff wurde aus eben gekochtem destillierten Wasser hergestellt, das mit Phosphorsäure Anhydrid angesäuert worden war. Der Stickstoff wurde durch die Einwirkung von Natriumnitrid auf Ammoniumchlorid gewonnen, das zur Reinigung durch eine lange, fast horizontale mit koncentrierter Schwefelsäure gefüllte Röhre hindurch gegangen war.

Infolge des unseren Augen eigenen Mangels an Empfindlichkeit für die Veränderungen in der sichtbaren Strahlung von kürzeren Wellenlängen wurden nur Linien vom roten bis zum grünen Teile des Spektrums für die photometrischen Untersuchungen ausgewählt. Infolge der weiteren Schwierigkeit, die sichtbare Strahlung zweier in der Reinheit stark von einander abweichenden Spektra genau zu vergleichen, war es ferner nötig, die Stärke der Vergleichungslichtquelle so zu wählen, dass man allzugrosse Verschiedenheiten in der beiden Spaltöffnungen des Spektrophotometers vermeiden konnte.

Unsere Reihe von Beobachtungen über die Wasserstofflinie $\lambda = 6563$ ist in Tabelle I wiedergegeben. Hier ist die Stärke der Strahlung durch die Ablesungen der Teilung der zur Vergleichsquelle gehörigen Mikrometerschraube gegeben. Die Breite des anderen Spaltes, d. h. desjenigen gegenüber der Entladungsröhre, war immer dieselbe. Die Stromstärken betrugen 1—6 Milliampères; ein stärkerer Strom würde eine Schmelzung der Elektroden bewirkt haben. Die in dieser Tabelle gegebenen Werte sind graphisch dargestellt auf Fig. *A*. In dieser, und in den folgenden Figuren bilden die Stärken der Strahlung die Ordinaten und die Spannungen der Gase die Abscissen. Es werden 3 Kurven von 2, 4 und 6 Milliampères gegeben.

Tabelle I.

Stärke der Wasserstofflinie $\lambda = 6563$ für verschiedene Stromstärken und Spannungen.

Spannung des Gases in mm.	3.8	2.7	1.4	0.7
Elektrometer-Ablesungen	140	110	80	65
Stärke der Strahlung. Strom = 1 M.A.	2	3	4	5
» » = 2 »	4	6	8	10
» » = 4 »	8	12	16	20
» » = 6 »	13	18	23	29

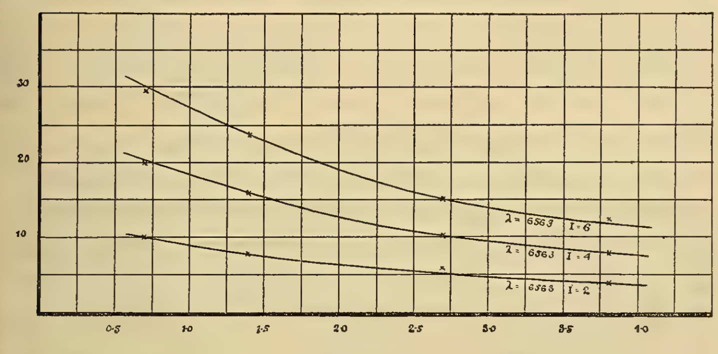


Fig. *A.*

Tabelle II giebt ähnliche Beobachtungen für Stickstoffbande $\lambda = 6701$; 6622; 6542 und 6465, während Tafel *B* die Beziehungen zwischen der Stärke der Strahlung, der Spannung und dem Strom der Bande 6701, 6542, und 6465 graphisch veranschaulicht.

Tabelle II.

Stärke der Stickstoffbande für verschiedene Stromstärken und Spannungen.

$\lambda = 6701.$

Spannung der Gase in mm.	4.4	2.2	1.3	0.7	0.3
Elektrometer-Ablesungen	300	200	120	100	50
Stärke der Strahlung. Strom = 1 M.A.	22	24	26	30	35
» » = 2 »	44	49	53	61	68
» » = 3 »	66	73	79	93	105
» » = 4 »	88				
» » = 6 »	133	145	160	178	215

$\lambda = 6622.$

Stärke der Strahlung. Strom = 1 M.A.	23	25	28	33	43
» » = 2 »	47	48	56	65	83

Stärke der Strahlung.	Strom = 3 M.A.	75	75	83	97	128
»	» = 4 »	100				
»	» = 6 »	145	148	168	193	257

λ = 6542.

Stärke der Strahlung.	Strom = 1 M.A.	13	15	18	22	26
»	» = 2 »	26	29	35	45	51
»	» = 3 »	40	45	53	66	78
»	» = 4 »	53				
»	» = 6 »	78	88	108	133	158

λ = 6465.

Stärke der Strahlung.	Strom = 1 M.A.	8	10	12	14	18
»	» = 2 »	17	20	25	27	35
»	» = 3 »	27	31	36	43	54
»	» = 4 »	36				
»	» = 6 »	54	61	73	83	109

Fig. *B*.

In derselben Weise geben Tabelle III und Tafel *C* Beobachtungen über die Bande des »zweiten Wasserstoffspektrums» λ = 6198, 6069, 6052 und 5735.

Tabelle III.

Stärke des »zweiten Wasserstoffspektrums» für verschiedene Stromstärken und Spannungen.

λ = 6198.

Spannung des Gases in mm.		4.25	2.75	1.85	1.1	0.65	0.275
Elektrometer-Ablesungen		60	55	48	35	25	15
Stärke der Strahlung.	Strom = 2 M.A.	2	3	4	5	8	11
»	» = 4 »	4	7	8	10	15	23
»	» = 6 »	6	10	12	15	24	

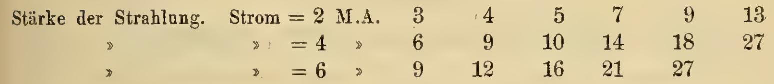
λ = 6069.

Stärke der Strahlung.	Strom = 2 M.A.	3	4	5	6	9	13
»	» = 4 »	7	9	10	13	18	26
»	» = 6 »	9	12	16	21	27	

λ = 6052.

Stärke der Strahlung.	Strom = 2 M.A.	3	3	6	7	9	14
»	» = 4 »	7	8	10	14	19	27
»	» = 6 »	9	12	17	21	27	

λ = 5735.



Stärke der Strahlung.	Strom = 2 M.A.	3	4	5	7	9	13
»	» = 4 »	6	9	10	14	18	27
»	» = 6 »	9	12	16	21	27	

Fig. *C.*

Obschon ich keine Bestimmungen der Spannung des Quecksilbers ausgeführt habe, führe ich doch unten in Tabelle IV einige Messungen für verschiedene Stromstärken an, weil mir diese Reihe typisch zu sein scheint. Die Röhre war mit Stickstoff gefüllt, und Quecksilber war die einzige sichtbare Verunreinigung. Die Spannung der Gasmischung, welche durch Messung der Quecksilberhöhe in einer Barometerröhre bestimmt würde, betrug ungefähr 0,6 mm.

Tabelle IV.

Stärke der Quecksilberlinie $\lambda = 5460$.

Strom	Stärke der Strahlung
Strom = 1 M.A.	Stärke der Strahlung = 18
» = 2 »	» = 36
» = 3 »	» = 55
» = 4 »	» = 73
» = 5 »	» = 90

Eine Prüfung der voranstehenden Tabellen und Kurven führt zu folgenden Schlüssen:

I. Bei einer bestimmten Gasspannung zwischen 0,25 mm und 4,0 mm Quecksilber und einer Stromstärke von 1 Milliampère bis zu 6 Milliampères ist die Stärke der Strahlung der einzelnen Spectrallinien der Stromstärke direkt proportional. Das stimmt mit den Beobachtungen von K. ÅNGSTRÖM überein, wonach sowohl die Energie der leuchtenden Strahlung wie die gesamte strahlende Energie der Stromstärke direkt proportional ist.

II. Bei konstanter Stromstärke nimmt die Strahlung einer Spektrallinie eines Gases in dem Masse zu, wie die Spannung abnimmt — zunächst langsam und dann in rascherem Massstabe. Die Kurve, welche das Verhältniss zwischen der Spannung des Gases und der Stärke einer Spektrallinie veranschaulicht, ist eine regelmässige, aber für verschiedene Linien verschieden.

Diese Untersuchung wurde im Physikalischen Institut der Universität Upsala ausgeführt, und ich fühle bei ihrem Abschlusse das Bedürfens, Herrn Professor KNUT ÅNGSTRÖM meinen aufrichtigen und warmen Dank für die Unterstützung und Ermutigung auszusprechen, die er mir während der ganzen Dauer dieser Experimente zu Teil werden liess.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 4.
Stockholm.

Der elektrische Widerstand beim Übergang des Stromes zwischen Stahlkugeln.

Von Dr. Ad. Meyer.

[Mitgeteilt den 13. April 1898 durch R. Rubenson.]

Die Versuche, die dem nachstehenden Aufsatze zu Grunde liegen, sind auf Veranlassung des Herrn Prof. F. Auerbach in Jena vorgenommen, und sind als eine Fortsetzung einiger seiner Arbeiten anzusehen. Die vorbereitenden Versuche wurden im Sommer 1896 im physikalischen Institute zu Jena, die definitiven aber im Jahre 1897 an der Hochschule von Stockholm vorgenommen. Dem Vorstande des physikalischen Instituts dieser Hochschule, Herrn Professor S. Arrhenius, sowie dem Professor Auerbach, die Beide meiner Arbeit mit grossem Interesse gefolgt sind, und denen ich viele Rathschläge verdanke, will ich hiermit meinen besten Dank aussprechen.

I. Übersicht über die einschlägige Litteratur.

Der elektrische Widerstand in einem nicht kohärirenden festen Körper, oder mit anderen Worten, zwischen sich berührenden festen Körpern, ist, trotz seiner grossen Bedeutung für das Telephon und auch als Fehlerquelle bei manchen elektrischen Untersuchungen, nur zum Gegenstand sehr weniger wissenschaftlichen Untersuchungen gemacht worden.

Mir sind nicht mehr als fünf hierher gehörige Abhandlungen bekannt, und diese sind von sehr geringem Umfang. Es sind folgende:

1) BIDWELL: On Electrical Resistance of Carbon Contacts. (Proc. Roy. Soc. 1883).

2) UPPENBORN: Über den Widerstand einer Messingskette. (Elektrotechn. Zeitschrift 1890).

3) und 4). CALZECCHI-ONESTI: »Über die elektrische Leitungsfähigkeit von Metallfeilen« und »Über die Abhandlung über die Elektricitätsleitung von Metallpulvern von F. AUERBACH«. (Nuovo Cimento 1884 und 86).

5) AUERBACH: Elektr. Leitung von Metallpulvern. (Wiedemanns Annalen 1886).

Hierher gehört noch eine während der Ausarbeitung des vorliegenden Aufsatzes erschienene Abhandlung desselben Verfassers: »Über Widerstandsverminderung durch elektrische und akustische Schwingungen« (Wiedemanns Annalen 1898).

Unter diesen sucht CALZECCHI, ohne quantitative Versuche anzustellen, zu beweisen, dass die Leitungsfähigkeit eines Metallpulvers bei einem gewissen Dünnigkeitsgrade ganz aufzuhören scheint, dass dieselbe jedoch durch Stimmgabelschwingungen, durch Extraströme oder dergleichen diese Fähigkeit wieder annehmen kann.

Hr. AUERBACH dagegen hat mittels genauer Messungen [1]) gezeigt, dass dies Aufhören der Leitungsfähigkeit nur ein scheinbares sei, dass dagegen wirklich, an einem gewissen Punkte der Verdünnung, das Gesetz, nach welchem der Leitungswiderstand wächst, ein ganz andres wird, so dass die graphische Darstellung, wenn man als Abscissen das Verhältniss der Dichtigkeit des Pulvers zu der des festen Silbers und als Ordinaten den Logarithmus des Widerstandes einführt, hauptsächlich aus zwei Geraden besteht, von denen die erste (für grössere Dichtigkeiten), den Winkelkoefficient 5,3, die andere dagegen 83 hat.

---

[1]) an Silberpulver.

Dieser eigenthümliche Sprung, der fast ohne Vermittelung eintrat, schien mir aber ein sicheres Zeichen zu sein, dass das Phänomen ein komplicirtes wäre, das heisst, dass die Ursache der Widerstandserhöhung mit wachsender Verdünnung wenigstens von zweifacher Art sei, möglicher Weise z. B., dass anfänglich nur die Zahl der Berührungsflächen, nachher aber auch deren Ausdehnung sich vergrössere.

Ich beschloss darum Versuche vorzunehmen, wo die eine dieser Ursachen ausgeschlossen sein sollte.

Freilich ist dies auch mit sowohl BIDWELLS, wie auch vielleicht mit UPPENBORNS Versuchen der Fall. Die letzteren, die offenbar nur in rein praktischer Hinsicht vorgenommen worden sind, bieten aber überhaupt keine Stütze für eine Theorie, da hier eine grosse Zahl von Kontakten ziemlich verschiedenen Drucken ausgesetzt ist, weil die Kette in vertikaler Stellung gespannt und nur der gesammte Widerstand gemessen wurde.

BIDWELLS Versuche aber, die sehr gewissenhaft ausgeführt zu sein scheinen, würden wohl die besten Resultate geben, und an seinen Curven fehlt auch, wenn man sie logarithmisch darstellt, gänzlich der oben erwähnte Knix. Diese Versuche würden zwar auch die beste Stütze für eine Theorie abgeben, wenn nur die sich berührenden Körper daselbst geometrisch, mechanisch und chemisch gut definirt wären. Dies ist aber gar nicht der Fall. Betreffs der chemischen Beschaffenheit der Körper erwähnt er bloss, dass sie »electric light carbon» sind. Da es aber viele Arten von solchen giebt, und da es besonders zu der Zeit, als diese Abhandlung hervortrat, noch recht gewöhnlich war, Retortenkohle dazu zu gebrauchen, so ist die *chemische* Beschaffenheit sehr unbestimmt, und über die *elastischen* Eigenschaften dieser Kohlen sind, so viel ich weiss, gar keine Forschungen gemacht worden. Über die geometrische Form derselben sagt BIDWELL nur, dass sie »two short rods 6 mm. in diameter» wären, und aus der Figur scheint hervorzugehen, dass diese zwei Stäbe senkrecht auf einander gelegt waren, aber auch, dass der eine eine Aushöhlung besass, in welche der an-

dere so ziemlich zu passen scheint. BIDWELL hat indessen auch einige Versuche mit metallenen Kontakten (sp. Vismut) gemacht, doch sind die darauf sich beziehenden Curven, wie auch BIDWELL selbst zugiebt, so unregelmässig, dass sich daraus überhaupt nichts ergeben kann. Ich glaube, dass der Grund dafür der ist, dass er mit zu geringen Drucken gearbeitet hat, und auch dass er mit wachsendem statt mit abnehmendem Drucke arbeitet, wie aus meinen Untersuchungen hervorgehen wird.

Um also die Fehler meiner Vorgänger so viel wie möglich zu vermeiden, und nicht nur ganz empirische Formeln geben, sondern auch die Ergebnisse mit der Elasticitätstheorie zusammenstellen zu können, bin ich von folgenden Principien ausgegangen:

1) Die sich berührenden Körper müssen eine ganz bestimmte geometrische Form besitzen — hierzu eignet sich ganz natürlich die Kugelform — auch Cylinder, die sich mit den ebenen Flächen berühren, wären vielleicht anwendbar, aber einerseits ist es leichter, eine hinreichend gute Kugelfläche, als eine wirkliche Ebene zu erhalten, anderseits war auch zu befürchten, dass die Cylinder mehr als die Kugeln durch den Luftdruck an einander haften würden, und endlich würde ganz gewiss der Anfangswerth bei ziemlich grossem Drucke zu klein sein. Ich entschied mich also für die Kugelform.

2) Der Stoff muss chemisch wohl definirt, nicht zu selten, und für die vorkommenden Drucke absolut elastisch sein. Auch ist es am besten, wenn der Elasticitätskoefficient im voraus wenigstens annähernd bekannt ist. Alle diese Bedingungen befriedigt kein anderer Stoff so gut wie der *Stahl*. Dazu kommt noch, dass man ohne eigentliche Kosten bei jedem Fahrradhändler sehr gute Stahlkugeln bekommen kann. Ich entschied mich also für Stahlkugeln.

3) In dem Falle, wo mehrere Kugeln angewendet werden, muss der Druck zwischen allen genau derselbe sein. Die Kugeln müssen also in horizontaler Richtung gepresst werden,

wenn auch dadurch nothwendiger Weise die Reibung etwas grösser wird.

4) Jede Erschütterung des Apparates während der Änderung der Belastung ist sorgfältig zu verhüten.

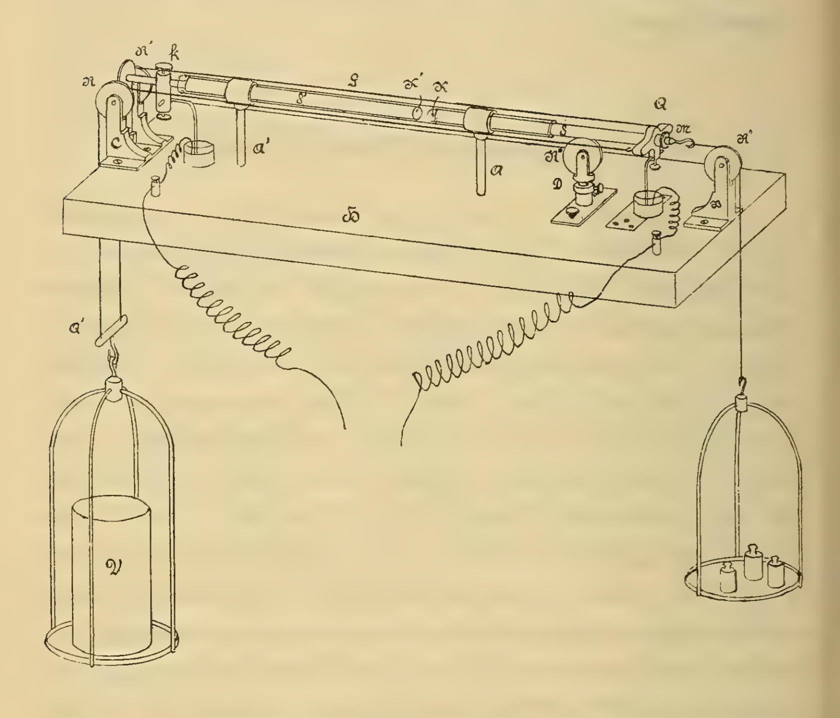
5) Der benutzte Strom muss ziemlich schwach, das Galvanometer dagegen sehr empfindlich und so weit wie möglich aperiodisch sein.

Von diesen Principien ausgehend, habe ich den folgenden Apparat konstruirt.

II. Der Apparat und dessen Anwendung.

Eine Glasröhre G ist in zwei Messinghülsen eingekittet, die in zwei andere Hülsen genau passen, welche von zwei in einer hölzernen Unterlage H befestigten Ständern A und A' getragen werden. Diese Unterlage trägt ferner ein metallenes Stück C, das als Stütze des einen Stempels dient und ausserdem zwei Rollen R und R' trägt. In der Unterlage sind weiter noch zwei Ständer B und D befestigt, welche Rollen R'' und R''' tragen. In der Glasröhre bewegen sich zwei Stempel S und S', die die zu untersuchenden Kugeln K und K' tragen. S' stützt sein eines Ende gegen das Stück C, an das andere ist die Kugel K' festgelöthet. Nahe dem erstgenannten Ende ist eine Klemmschraube k, von wo aus ein kupferner Draht in einen Quecksilberbecher eintaucht. Der Stempel S, der die Kugel K trägt, ist beweglich und geht über die Rolle R''' und endigt in einer Schraube, an welcher ein Querstück Q und eine gewöhnliche Schraubenmutter M festzuschrauben sind. Das Querstück Q trägt zwei kleine Haken, an welchen zwei seidene Schnüre befestigt sind, die horizontal laufend über die Rollen R und R' gehen und in ein gemeinschaftliches Querstück Q' enden, an dem eine Waagschaale V hängt. An seiner unteren Seite trägt das Querstück Q eine Klemmschraube, von welcher aus ein Kupferdraht in eine kleine Quecksilberschale hineintaucht. Die Schraubenmutter M trägt auch

ein kleines Häkchen, woran eine seidene Schnur befestigt ist, die über die Rolle R'' geht und ein Gegengewicht trägt. Die Rolle R''' dient dazu, den Stempel S immer in genau horizontaler Lage zu erhalten, auch wenn der Stempel ziemlich weit aus der Glasröhre hinaussteckt, und ist darum in allen Richtungen verschiebbar. Das Gegengewicht ist nothwendig, um das Gewicht der Schaale V und des auf ihr stehenden Bechers auszugleichen. Die Elektroden tauchen in die Quecksilberbecher ein.



Die Belastung geschah in der Weise, dass der Becher an der Schaale V mit 1000 Gr. Wasser belastet wurde, das nachher nach und nach mit einer Pipette weggehoben wurde. Dieses zeigte sich als das einzige Mittel, um Erschütterungen des Apparats während der Änderung der Belastung zu vermeiden.

Die gesammte Reibung bezog sich auf ca. 35 gr., weshalb ich immer dieses Gewicht zu allen Drucken, ausser dem ersten (1000 gr.), addirt habe.

Die Batterie bestand aus zwei gewöhnlichen Leclanché-Elementen.

Das Galvanometer war von CHARPENTIER in Paris und bestand aus einer beweglichen Drahtspule, die sich zwischen den Schenkeln eines starken Magnetes bewegte, und innerhalb welcher ein eiserner Cylinder placirt war.

Das Leitungsschema war eine gewöhnliche Brückenanordnung mit einem besonderen Nebenschluss, zur direkten Verbindung der Enden der Drahtspule des Galvanometers unter einander, um die Spule damit zur Ruhe bringen zu können, auch wenn der Strom nicht geschlossen war. Sonst wurde die Batterie und das Galvanometer mittelst eines Doppelschliessers unmittelbar nach einander in die Leitung eingeführt.

Die erste Schwierigkeit bei der Anwendung bestand darin, einen bestimmten Anfangswerth zu bekommen. Es zeigte sich nämlich, dass man, wenn man durch eine gegebene Belastung die Kugeln zusammengehen liess, alle möglichen Werthe zwischen ca. 0,1 und mehreren Ohm bekommen konnte, und dass dieses auch, wenn auch in etwas geringerem Grade, sogar nach sorgfältiger Reinigung der Kugeln der Fall war. Diese Reinigung geschah nachher immer so, dass die Kugeln zuerst mit Eisenoxyd in Öl geputzt wurden, das Öl nachher in Cloroform gelöst wurde, und dass die Kugeln endlich mit reiner Leinwand abgetrocknet wurden. Es zeigte sich, dass auch das allergeringste mikroskopische Staubkörnchen eine enorme Steigerung des Widerstandes bewirken konnte.

Auch bei der sorgfältigsten Reinigung konnte doch immerhin die geringste Erschütterung des Apparats grosse Änderungen des Widerstands hervorrufen, und man bekam, auch bei der grössten anwendbaren Belastung, 1 kg., nie zwei Mal denselben Anfangswerth.

Ich bemerkte aber, dass in diesem Falle die regelmässigen Schwingungen einer an dem Fusse des Apparats angebrachten Stimmgabel immer eine *Senkung* des Widerstands herbeiführten, so dass man durch wiederholte Schwingungen endlich zu einem

Minimum des Widerstandes gelangte, um welches er nachher bei wiederholten Anschlägen sich nur ein kleines bischen hin und zurück bewegte. Zuweilen waren 50 bis 70 Anschläge nothwendig, um den Widerstand auf dieses Minimum herabzubringen.

Dieses Minimum war aber ganz gut konstant, es hielt sich nämlich immer zwischen 0,01 und 0,02 Ohm, welches auch der kleinste Werth ist, der überhaupt mit irgend einem Mittel erzielt werden konnte. Dieses habe ich deshalb als Anfangswerth benutzt.

Dies gilt aber nur bei grossen Drucken. Jeder Versuch, die Stimmgabel zwischen jeder Ablesung anzuwenden, ist immer gescheitert. Dies ist auch die Ursache, warum ich immer mit *fallenden*, nie mit steigenden Drucken gearbeitet habe.

Die Stahlkugeln waren gewöhnliche Fahrradkugeln. Diese habe ich in 4 Grössen verwendet.

Der Durchmesser der kleinsten schwankte zwischen 4,64 mm. und 4,73 mm.;

der zweiten zwischen 6,30 mm.—6,32 mm.;

der dritten ca. 7,89 mm.;

der vierten ca. 9,43 mm.

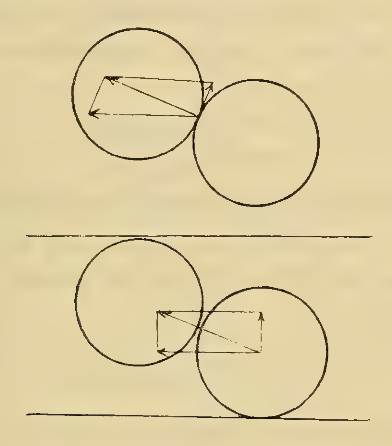
Die beiden ersteren, und ins besondere die von 6,3 mm. Durchmesser, waren unbedingt die besten, das heisst die, die am besten fehlerfrei zu bekommen waren; die beiden letzten, im Handel nicht so couranten, fehlerfrei zu bekommen, war sehr schwierig, weshalb ich mit diesen nur relativ wenige Versuche gemacht habe. Die Kugeln wurden vor und nach jedem Versuche mittelst einer Loupe genau untersucht.

Die Fehler der Kugeln sind jedenfalls ganz unberechenbar. Um sie zu vermeiden, giebt es wohl kein anderes Mittel, als bessere, für diesen Zweck speciell angefertigte Kugeln anzuwenden. Dies beabsichtige ich auch, wenn meine Zeit es mir erlaubt, in der Zukunft zu thun.

Von übrigen möglichen Fehlern will ich hier die folgenden erwähnen:

1) Die Verdunstung und Verschütterung von Wasser während des Versuches bezog sich ungefähr auf 2—5 Gr., eine ganz unbedeutende Quantität.

2) Excentrische Berührung der Kugeln kann, wie aus nebenstehenden Figuren ersichtlich ist, von zweierlei Art sein: entweder berühren die Kugeln nicht die Röhre, sondern der schiefe Druck wird durch die Reibung in Gleichgewicht gehalten, oder die Wände der Röhre werden berührt, und ihr Gegendruck vermittelt das Gleichgewicht. Im ersteren Falle wird der Druck mit dem Cosinus des Excentricitätswinkels multiplicirt, im zweiten durch denselben Cosinus dividirt.



Da aber die Excentricität, in so weit ich sie nach dem Augenmaass beurtheilen konnte, nicht viel mehr als ca. 10° ausmachen konnte, so bezog sich die aus dieser Ursache herrührende Unsicherheit auf nicht mehr als 1 bis 2 % der Belastung, und war immer während einer ganzen Beobachtungsreihe konstant. Dieser Einfluss kann darum vernachlässigt werden.

3) Der Luftdruck kann nach den in folgendem Abschnitt zu erwähnenden Formeln nicht mehr als 0,2 Gram ausmachen, und ist darum zu vernachlässigen.

4) Der Erwärmung der Drähte und Kugelflächen habe ich nur in so fern entgehen können, als es durch möglichst kurze Schliessungen und ziemlich schwachen Strom möglich war.

III. Theoretisches.

Wenn zwei elastische Kugeln gegen einander gepresst werden, so deformiren sie sich bekanntlich so, dass der ursprüngliche Berührungspunkt in einen kleinen Kreis übergeht. Es war jetzt mein Hauptziel zu untersuchen, ob die Verminderung des Widerstandes nur von der Grösse dieses Kreises abhinge, in welchem Falle der Widerstand demselben umgekehrt proportional sein musste, oder ob er auch von dem in den verschiedenen Theilen des Kreises herrschenden Drucke abhinge, und im letzteren Falle in welcher Weise.

Von rein mechanischen Principien ausgehend, hat HERTZ in seiner Abhandlung »Über die Berührung fester elastischer Körper» (Journ. f. die reine u. angew. Math. Bd. 92) folgende Formeln deducirt

$$1) \qquad a = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16(\varrho_1 + \varrho_2)}}$$

wo a den Radius des Druckkreises, p den Gesammtdruck, ϱ_1 und ϱ_2 die inversen Radien der Kugeln und ϑ_1 und ϑ_2 gewisse von den elastischen Eigenschaften der Kugeln abhängige Konstanten bedeuten.

$$2) \qquad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a},$$

wo α die Annäherung der Kugeln ist, und

$$3) \qquad z = \frac{3p}{2\pi}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^3}$$

wo z den Druck im Abstand x vom Mittelpunkte des Druckkreises bedeutet.

Diesen Formeln können wir die für unsern Zweck genügende einfachere Form geben:

$$1) \qquad a = k\sqrt[3]{pR}$$

$$2) \qquad \alpha = \frac{2a^2}{R}$$

$$3) \qquad z = \frac{3p}{2\pi a^3}\sqrt{a^2 - x^2},$$

wo R den gemeinschaftlichen Radius der beiden Kugeln bedeutet.

Die erste Formel ist von Herrn SCHNEEBELI (»Sur les déformations, que subissent les sphères en caoutchouc par des forces extérieurs». Archive des sciences phys. et nat. de Genève 1886) mit genügender Genauigkeit an Gummikugeln experimentell bestätigt worden. Über die zweite Formel giebt es, so viel ich weiss, keine Versuche. Ich versuchte die Annäherung mittelst eines Mikroscopes an meinen Stahlkugeln zu messen, was jedoch wegen der Kleinheit der Deformationen nicht gelang. Die dritte Formel entzieht sich aus natürlichen Gründen jeder experimentellen Bestätigung. Da aber in HERTZ's Untersuchungen die beiden letzten Formeln sich auf ganz dieselben Voraussetzungen gründen, wie die erste, so können wir auch diese als durch SCHNEEBELIS Versuche indirekt bestätigt ansehen.

Gehen wir also von diesen Formeln aus, so finden wir:

1) Wenn die Erhöhung des Widerstandes mit fallendem Druck nur von der Verkleinerung der Berührungsfläche herrührt, so muss der Widerstand derselben umgekehrt proportional sein, also, wenn W der ganze Widerstand bedeutet,

$$W = \frac{c}{\pi a^2} = c' \cdot p^{-2/3} \cdot R^{-2/3} \tag{4}$$

also für konstanten Druck

$$W \cdot R^{2/3} = \text{konstant},$$

und für dieselben Kugeln bei verschiedenen Drucken

$$W \cdot p^{2/3} = \text{konstant}.$$

2) Wenn aber der Widerstand nicht nur von der Druckfläche, sondern auch von den verschiedenen z in derselben abhängt, so können wir, analog dem Ohmschen Gesetze

$$\frac{1}{W} = \sum \frac{1}{w}$$

setzen, wo w der Widerstand in einem kleinen Ringe bedeutet, wo der Druck z ist, woraus folgt

$$\frac{1}{W} = \int_0^a \frac{1}{\frac{c}{xdx} \cdot f(z)} = \int_0^a \frac{c' x dx}{f(z)}.$$

Poniren wir nun $f(z) = z^{-\mu}$, so bekommen wir

$$\frac{1}{W} = \int_0^a c' z^\mu \cdot x dx = \int_0^a c'' \frac{p^\mu}{a^{3\mu}} (a^2 - x^2)^{\mu/2} x dx = \frac{c''' p^\mu \cdot a^{\mu+2}}{a^{3\mu}} =$$

$$= C \cdot p^{\frac{\mu+2}{3}} \cdot R^{\frac{2-2\mu}{3}},$$

wo c, c', c'', c''', und C verschiedene Konstanten sind, und gilt die Formel (mit verschiedenen Werthen von C) für alle μ ausser $\mu = -2$, wo die Constante unendlich werden würde.

Setzen wir nun für μ verschiedene Zahlenwerthe ein, so wird

für $\mu = 0$	$\frac{1}{W} = C \cdot p^{2/3} \cdot R^{2/3}$
1	$C \cdot p^1 \cdot R^0$
2	$C \cdot p^{4/3} \cdot R^{-2/3}$
3	$C \cdot p^{5/3} \cdot R^{-4/3}$
— — —	— — — —
$\mu = 1/2$	$\frac{1}{W} = C \cdot p^{5/6} \cdot R^{1/3}$
$1/3$	$C \cdot p^{7/9} \cdot R^{4/9}$
$1/4$	$C \cdot p^{3/4} \cdot R^{1/2}$
— — —	— — — —
$\mu = -1$	$\frac{1}{W} = C \cdot p^{1/3} \cdot R^{4/3}$
-2	∞
-3	$C \cdot p^{-1/3} \cdot R^{8/3}$
— — —	— — — —
$-1/2$	$C \cdot p^{1/2} \cdot R^1$
$-1/3$	$C \cdot p^{5/9} \cdot R^{8/9}$
$-1/4$	$C \cdot p^{7/12} \cdot R^{5/6}$
— — —	— — — —

u. s. w.

Die Versuche sollen jetzt zeigen, ob eine von diesen Formeln gilt, und in diesem Falle welche, woraus man also sehen kann,

welcher Werth dem Konstanten μ beizulegen ist; doch muss im voraus bemerkt werden, dass negative Werthe von μ a priori sehr unwahrscheinlich sind, da ein solcher voraussetzen würde, dass der Widerstand, abgesehen von der Vergrösserung der Druckfläche (also z. B. wenn die sich berührenden Flächen Ebnen wären, deren Ausdehnung vernachlässigt werden könnte), nicht einmal konstant wäre, sondern sogar mit wachsendem Drucke zunehmen würde.

IV. Ergebnisse der Versuche.

Bei den Versuchen habe ich bald gemerkt, dass die erhaltenen Curven von zwei wesentlich verschiedenen Typen waren, der eine mit grosser, der andre mit kleiner Erhöhung des Widerstandes, zwischen welchen nur sehr wenige Zwischenformen vorkamen, wie aus folgender Tafel ersichtlich ist:

Zahl der Versuche.

Diameter der Kugeln.	Erhöhung des Widerstandes in Ohm zwischen 1000 und 110 gr. Belastung.		
mm.	0.01—0.03	0.04—0.06	0.07—0.4
4.64—4.73	10	4	15
6.30—6.33	5	2	15
7.89	4	2	3
9.43	3	3	5
Summe	22	11	38
D:o in %	30.99 %	15.49 %	53.52 %

In Quotient des Anfangswerthes gerechnet, werden die Procentzahlen ungefähr dieselben.

Hieraus ersieht man also, dass die mittelgrossen Steigerungen relativ sehr selten sind, diese würden jedoch, wenn der Unterschied aus zufälligen Beobachtungsfehlern herrührte, gerade die zahlreichsten sein. Es muss also für das Erscheinen des einen oder des andren Typus eine bestimmte Ursache vorhanden sein, und es kann darum nicht erlaubt sein, schlichtweg das Medium

zwischen allen Versuchen zu nehmen, man muss im Gegentheil hinter die genannte Ursache zu kommen suchen.

Meiner Ueberzeugung nach kann die Ursache des Hervortretens der Curven mit kleiner Steigung nichts als das Vorhandensein eines gewöhnlich unmerkbaren Rostfleckchens im Berührungspunkte der Kugeln sein. Dieses stütze ich auf folgende Gründe:

1) Die Zahl dieser Curven ist bei den Kugeln, die am vollkommensten im Handel zu beziehen waren ($d = 6{,}3$ mm.), am kleinsten, bei den schlechtesten (7,9 mm.) am grössten.

2) Jedesmal wenn ein Rostfleck wirklich entdeckt werden konnte, ist ohne Ausnahme eine Curve mit kleiner Steigung zum Vorschein gekommen.

3) Wenn man die Mittelwerthe der Curven mit kleiner und mittelgrosser Steigung nimmt, so kommt eine Curve hervor, deren Form ganz nahe mit derjenigen übereinstimmt, die BIDWELL mit Kohlenkontakten erhalten hat, wobei ja eine genaue Politur der Kontakten unmöglich war; man bekommt nämlich in diesem Falle für die verschiedenen Kugeln:

für $d = 4.6 \qquad \log W + 0.51 \log p = \text{konstant}$

$d = 6.3 \qquad \log W + 0.54 \log p = \text{konstant}$

$d = 7.9 \qquad \log W + 0.31 \log p = \text{konstant}$

$d = 9.4 \qquad \log W + 0.53 \log p = \text{konstant},$

während BIDWELL für die Kohlenkontakten

$$\log W + 0.42 \log p = \text{konstant}$$

erhalten haben würde, wenn er seine Curve in dieser Form berechnet hätte.

Hier habe ich die Curven mit kleiner und mit mittelgrosser Steigung zusammengenommen, weil für jedes Kugelpaar die Zahl der Beobachtungen sonst zu klein wäre, um gute Schlüsse daraus zu ziehen. Nehme ich aber nur die Curven mit *kleiner* Steigung, aber für alle Kugelpaare zusammen (18 Beobachtungen), so bekomme ich

$$\log W + 0{,}36 \log p = \text{konstant},$$

was auch mit BIDWELLS Werth ganz gut übereinstimmt.

Aus allen diesen Ursachen habe ich bei der Berechnung der Steigung des Widerstandes durch verminderten Druck nur die Curven mit relativ grosser Steigung mitgenommen, und die übrigen, obgleich sie eine ziemlich grosse Procentzahl ausmachen, ausser Acht gelassen. Bei der Berechnung des absoluten Widerstandes bei der grössten Belastung (1000 gr.) wird es dagegen aber, wie sich zeigen wird, ziemlich gleichgültig, ob ich das Medium nur von diesen, oder von allen nehme.

Erstens habe ich also μ dadurch zu bestimmen, dass ich den Widerstand bei verschiedenen Durchmessern der Kugeln für konstanten Druck (1000 gr.) nehme, und ergiebt sich dann:

Durchmesser der Kugeln. mm.	Zahl der Berührungspunkte.	Zahl der Versuche.	Medium des Widerstands pr. Berührungspunkt. Ohm.	Gemeinschaftliches Medium.	
1) für alle Versuche.					
4.64	1	21	0.0142	0.0147	
»	2	5	0.0169		
6.30	1	14	0.0150		
»	2	5	0.0149	0.0153	0.0140
»	4	2	0.0189		
7.89	1	9	0.0127	0.0127	
9.43	1	12	0.0110	0.0110	
2) für die Kurven mit grosser Steigung.					
4.64	1	11	0.0155	0.0148	
»	2	2	0.0218		
6.30	1	9	0.0169		
»	2	4	0.0151	0.0167	0.0152
»	4	2	0.0189		
7.89	1	4	0.0159	0.0159	
9.43	1	5	0.0113	0.0113	

Aus diesen Versuchen geht also hervor:

1) Der Widerstand ist der Zahl der Berührungspunkte nahezu proportional, d. h. der Widerstand pr. Berührungspunkt ist bei konstantem Drucke konstant, was auch aus der Theorie vorauszusehen war.

2) Der Widerstand bei constantem Drucke ist vom Radius der Kugeln nahezu unabhängig.[1]) Dieses stimmt nur mit dem Werthe 1 von μ zusammen. μ kann also von 1 nur ganz wenig verschieden sein, was durch die folgende Tafel auch bestätigt wird.

3) Der Widerstand bei 1000 gr. Belastung wird durch das Vorhandensein eines mikroskopischen Rostfleckens nur sehr wenig erniedrigt.

Zweitens soll μ durch die Erhöhung des Widerstandes bei abnehmendem Drucke bestimmt werden, und dabei habe ich die folgenden Resultate gewonnen, wo p der Druck in Gramm, W der Widerstand in Ohm und d der Durchmesser der Kugeln bedeutet.

		d = 4.64 mm.		d = 6.30 mm.		d = 7.89 mm.		d = 9.43 mm.	
p	log p	log W	log p + log W	log W	log p + log W	log W	log p + log W	log W	log p + log W
1000	3.000	— 1.809	1.191	— 1.791	1.209	— 1.892	1.108	— 1.962	1.038
935	2.971	— 1.805	1.166	— 1.780	1.191	— 1.889	1.082	— 1.953	1.018
835	2.922	— 1.796	1.126	— 1.765	1.157	— 1.876	1.046	— 1.903	1.019
735	2.866	— 1.750	1.116	— 1.726	1.140	— 1.840	1.026	— 1.813	1.053
635	2.803	— 1.712	1.091	— 1.668	1.135	— 1.789	1.014	— 1.726	1.077
535	2.728	— 1.677	1.051	— 1.607	1.121	— 1.725	1.003	— 1.638	1.090
435	2.638	— 1.602	1.036	— 1.511	1.127	— 1.640	0.998	— 1.556	1.082
335	2.525	— 1.505	1.020	— 1.383	1.142	— 1.557	0.968	— 1.441	1.084
235	2.371	— 1.358	1.013	— 1.211	1.160	— 1.361	1.010	— 1.222	1.149
185	2.267	— 1.132	1.135	— 1.089	1.178	— 1.255	1.012	— 1.073	1.194
135	2.130	— 0.971	1.159	— 0.897	1.233	— 1.068	1.062	— 0.866	1.264
110	2.041	— 0.848	1.193	— 0.792	1.249	— 1.009	1.032	— 0.777	1.264
85	1.929	[— 0.799	1.130]	[— 0.710	1.219]	— 0.910	1.019	— 0.598	1.331

[1]) Es scheint mir nämlich ganz sicher, dass die geringe Abnahme des Widerstandes nicht vom Wachsen des Radius abhängt, sondern davon, dass man durch Übung im Handhaben der Stimmgabel den Widerstand etwas mehr herunterpressen kann. Er wurde nämlich, unabhängig von den Radien der Kugeln, während des Fortganges der Versuche immer ein klein Bischen kleiner für denselben Druck.

Werden diese Werthe mittelst der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, so bekommt man

$$\begin{aligned} \text{für } d &= 4.64 & \log W &= 1.136 - 1.010 \log p \\ &= 6.30 & \log W &= 1.340 - 1.065 \log p \\ &= 7.89 & \log W &= 0.950 - 0.969 \log p \\ &= 9.43 & \log W &= 1.820 - 1.271 \log p \end{aligned}$$

oder als Medium

$$\log W = 1.312 - 1.079 \log p.$$

Mit Ausschliesung der Werthe für 85 gr., die weniger sicher sind, weil sie bei gewissen Versuchen nur durch Extrapolation gefunden sind, werden die entsprechenden Zahlen:

$$\begin{aligned} \text{für } d &= 4.64 & \log W &= 1.117 - 1.003 \log p \\ &= 6.30 & \log W &= 1.334 - 1.063 \log p \\ &= 7.89 & \log W &= 0.902 - 0.951 \log p \\ &= 9.43 & \log W &= 1.770 - 1.253 \log p \end{aligned}$$

oder als Medium

$$\log W = 1.281 - 1.068 \log p.$$

Der vorstehenden Theorie gemäss sollen wir also haben:

$$W = C \cdot p^{-\frac{\mu+2}{3}} = C \cdot p^{-1.07}$$

woraus also $\mu = 1.2$, oder innerhalb der Fehlergrenzen

$$\mu = 1$$

zu setzen ist.

Wir haben also als Resultat unsrer Beobachtungen gefunden, dass der Widerstand beim Übergang des Stromes zwischen festen Körpern nicht nur den sich berührenden Flächen, sondern ausserdem auch dem daselbst herrschenden Drucke nahezu inverse proportional ist.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 170.)

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. VI: 27. 1897. 8:o.
— *Institut météorologique central de la société des sciences de Finlande.*
Observations météorologiques faites à Helsingfors. Vol. 15 (1896) & Résumé des années 1881—90. 4:o.
Kharkow. *Société des naturalistes à l'Univ. Imp.*
Travaux. T. 31 (1897). 8:o.
Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Oversigt over Forhandlinger. 1897: N:o 6; 1898: 1. 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Acta rectoralia almae universitatis studii Cracoviensis inde ab anno 1469. T. 1: Fasc. 4. 1897. 8:o.
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej. T. 32. 1897. 8:o.
Materyały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne. T. 2. 1897. 8:o.
Biblioteka pisarzów Polskich. 34—35. 1897. 8:o.
Lud Białoruski na Rusi Litewskiej. T. 1. 1897. 8:o.
— *K. K. Sternwarte.*
Resultate. 1897: 1—12. 8:o.
Kristiania. *Universitets-Bibliotheket.*
Aarbog 1894—1895. 8:o.
Norsk bogfortegnelse for 1894. 8:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 33: N:o 126. 1897. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Berichte. Math.-phys. Cl. 1897: 5—6. 8:o.
— *Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.*
Jahresbericht 1897/98. 8:o.
Lisboa. *Direcção dos serviços geodesicos e topographicos.*
Nivelamentos de precisão em Portugal. 1898. 4:o.
London. *British association for the advancement of science.*
Report. Meeting 67 (1897). 8:o.
— *British museum.*
Catalogue of the Madreporarian corals 1897. 4:o.
— *Meteorological office.*
Report 1897. 8:o.
Weekly weather report. Vol. 14: N:o 1—28, 30—52. 1897—98. 4:o.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 58: N:o 4. 1898. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 73—74 (1898): N:o 3. 8:o.
Proceedings. Vol. 13 (1897): Tit. & Reg.; Session 1897/98: N:o 190—192. 8:o.

(Forts. å sid. 240.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 4.
Stockholm.

Berättelse om hvad sig tilldragit inom Kongl. Vetenskaps-Akademien under året 1897—1898. Af Akademiens ständige Sekreterare afgifven på högtidsdagen den 31 Mars 1898.

Då svenska Vetenskaps-Akademien efter ett års förlopp i dag, den 160:de årsdagen af hennes stiftelse, åter är församlad för att offentligen afgifva berättelse om sin verksamhet under detta sistförflutna tidskede, framträder för henne i första rummet erinran derom, att under detta samma år ett fjerdedels århundrade gått till ända af vår vördade Konungs för fäderneslandet välsignelserika fridsälla regering, och således äfven ett fjerdedels århundrade af Högstdensammes egenskap af Akademiens höge Beskyddare, — en erinran förbunden med den djupaste känsla af tacksamhet för den under denna långa tiderymd oafbrutet åtnjutna Konungsliga ynnest och bevågenhet. Såsom ett yttre tecken af denna sin tacksamhet har Akademien tillåtit sig att i underdånighet tillegna Hans Majestät en på den nämnda minnesvärda tilldragelsen syftande, särskildt präglad minnesmedalj.

Äfven under det nu sednast tillryggalagda året har Akademien och henne underlydande institutioner fått röna förnyade vedermälen af det välvilliga hägn, hvarmed hon och hennes verksamhet i den allmänna och särskildt den fosterländska odlingens tjenst städse varit af Konung och Riksdag omfattad, bland hvilka vedermälen följande här må tacksamt omförmälas:

på Kongl. Maj:ts framställning har Riksdagen på extra stat för innevarande år anvisat:

till upprätthållande af fullständigt ordnad väderlekstjenst vid statens under Akademiens inseende ställda Meteorologiska Centralanstalt ett belopp af 7,950 kronor, hvarjemte Kongl. Maj:t fastställt Riksdagens på grund af enskild motion fattade beslut om anvisande af 300 kronor för skötandet af de meteorologiska observationerna i Gellivara;

till inköp och insamling af naturalier samt andra behof vid det Naturhistoriska Riksmuseets afdelning för arkegoniater och fossila växter 2,000 kronor;

till vård, underhåll och förkofran af Riksmuseets Etnografiska samling dels det äldre anslaget 2,800 kronor, och dels dessutom 4,500 kronor afsedda till arfvode åt en särskild föreståndare för samlingen, detta senare anslag dock med det dervid af Riksdagen fästade vilkor, att detsamma ej finge utgå förr än visadt blifvit, att tillräckliga medel blifvit genom enskilda bidrag samlade för uppförande af en väl behöflig särskild byggnad för denna dyrbara samlings ändamålsenliga inrymmande.

På Kongl. Maj:ts framställning och efter af Akademien afgifvet förord har Riksdagen derjemte för fortsatt utgifvande under innevarande år af tidskriften Acta mathematica anvisat ett anslag af 3,000 kronor till förfogande af tidskriftens hufvudredaktör Professor G. Mittag-Leffler.

Dessutom har Kongl. Maj:t, efter af Akademien afgifvet förord, af under hand hafvande medel anvisat 4,000 kronor för fortsättning under innevarande år af de hydrografiska undersökningarne af de Sverige omgifvande hafven under ledning af Professorerne O. Petterson och A. Wijkander samt Ingeniören G. Ekman, hvilka på grund af Kongl. Maj:ts uppdrag dertill blifvit af Akademien utsedda.

På Kongl. Maj:ts befallning eller på anmodan af vederbörande Statsdepartement har Akademien under året haft att afgifva utlåtanden i åtskilliga ärenden, rörande hvilka någon vetenskaplig utredning varit erforderlig, såsom bland annat:

rörande de svenska hydrografiska undersökningarnes fortsättande och åstadkommande af samverkan mellan Sverige,

Norge, Danmark och England för deras utsträckning till aflägsnare haf;

angående en framställning af härvarande Kongl. Belgiska Minister om meddelanden rörande organisationen af de meteorologiska undersökningarne i Sverige;

i fråga om ombud vid en internationel geologisk kongress i S:t Petersburg;

rörande flere ansökningar om understöd för vetenskapliga arbetens utgifvande.

Öfver resor, som för vetenskapliga ändamål blifvit under året utförda på bekostnad eller med understöd af Akademien utaf medel, som hon för sådana ändamål egt till förfogande, har Akademien mottagit och låtit sig föredragas följande berättelser:

af Docenten S. MURBECK, som i egenskap af Letterstedtsk stipendiat utfört resor i Algeriet och dess omnejd för botaniska forskningars anställande;

af Docenten A. HENNIG, som i Sydvestra Skåne undersökt skrifkritans fauna;

af Docenten H. WALLENGREN, som vid Kristinebergs Zoologiska station fortsatt förut påbörjade undersökningar öfver de ciliata infusorierna och derjemte studerat Gullmarens Sipunculider;

af Doktor O. BORGE, som anställt undersökningar af algfloran i norra delen af Bottniska viken;

af Fil. Licentiat F. E. AHLFVENGREN, som idkat växtfysiognomiska studier i Jemtland och Lappland;

af Fil. Kandidat O. ROSENBERG, som anställt fysiologiska undersökningar öfver Halofyter vid Sveriges vestkust;

af Fil. Kandidat H. BORG, som i Ångermanland, Vesterbotten och Lappland insamlat och studerat Neuroptera och Orthoptera;

af Fil. Kandidat J. ARVIDSSON, som vid Kosteröarne och Kristineberg idkat studier öfver vissa grupper af polychœta maskar; och

af Studeranden J. G. ANDERSSON, som jemväl vid Koster-öarne och Kristinebergs Zoologiska station studerat Bohusläns Ostracoder.

Utgifvandet från trycket af Akademiens skrifter har under året i regelbunden ordning fortskridit. Af Akademiens Handlingar har det 29:de bandet af den nya följden fullständigt utkommit, innehållande fem mestadels mycket omfattande afhandlingar, hvarjemte någon del af det 30:de bandet äfven lemnat pressen. — Af Bihanget till Handlingarne har det 22:dra bandet för år 1896, omfattande 30 afhandlingar, fullständigt, samt äfven större delen af det 23:dje bandet utkommit. — Af Öfversigten af Akademiens förhandlingar har 54:de årgången, eller den för år 1897, innehållande 38 större och mindre afhandlingar, i sin helhet utkommit, hvarjemte tryckningen af innevarande års Öfversigt blifvit påbörjad. — Af arbetet »Meteorologiska iakttagelser i Sverige» har 34:de bandet lemnat pressen.

På Akademiens *Observatorium* har verksamheten under året företrädesvis varit egnad åt fullföljandet och beräkningen af de zonobservationer som sedan en längre följd af år tillbaka med Observatoriets meridiancirkel fortgått för åstadkommande af en stjernkatalog öfver en viss zon af himmelssferen. Dessa arbeten hafva nu så långt framskridit, att de inom de närmaste par åren torde vara afslutade, hvarföre ock förberedelser för stjernkatalogens offentliggörande redan vidtagits genom en slutrevision af beräkningarne och genom härledande af definitiva värden på katalogstjernornas precession och sekulära variation. — Den astrofotografiska mätapparat, som är förbunden med Observatoriets refraktor, har af Amanuensen D:r K. G. OLSSON blifvit undersökt och äfven använd för uppmätning af Pleiadernas stjerngrupp. — Meridiancirkeln har varit använd, förutom i och för ofvannämnda zonobservationer, jemväl för fortgående tidsbestämningar, hvilka under senare tid erhållit en utvidgad praktisk betydelse genom de tidssignaleringar, som på elektrisk väg regelbundet aflåtas dels till Kongl. Flottans station i Karlskrona och dels till härvarande Central-Telegrafstation. — Åt frågan

om det praktiska anordnandet af beräkningen af de små planeternas störingar har Akademiens Astronom egnat fortsatta undersökningar. Sålunda hafva, utom kompletteringsarbeten till den redan utförda beräkningen af störingarne för en grupp af dessa planeter, äfven beräkningar pågått för ett nytt tabellverk, omfattande en annan grupp af dessa små planeter, hvartill sjelfva grundtabellerna föreligga till tryckning färdiga. — Såsom Observatoriets Amanuens har Doktor V. CARLHEIM-GYLLENSKÖLD varit anställd intill 1897 års slut, hvarefter Doktor K. G. OLSSON innehaft samma befattning. Såsom räknebiträde har Fil. Kandidat H. VON ZEIPEL under året fortfarande tjenstgjort. Likakasom under föregående år hafva äfven under detta år elever från Stockholms Högskola fått på Observatorium sysselsätta sig med astronomiska observationer och deras beräkning.

Vid Akademiens *Fysiska Institution* har den serie af undersökningar öfver metallernas spectra, som under flera år derstädes pågått, blifvit af Akademiens Fysiker fortsatt och en fjerde afdelning deraf, nämligen rörande Mangan, afslutats och publicerats i Akademiens Handlingar; och härmed föreligger nu en fullständig undersökning af de metaller, som tillhöra jerngruppen. Närmast i ordningen komma de sällsynta metallerna, och bland dessa har undersökningen af Vanadin fortskridit derhän, att inom den närmaste tiden en monografi öfver detta spectrum torde komma att offentliggöras. — Parallelt med dessa arbeten har en ny serie spectralundersökningar, hufvudsakligen af astrofysikaliskt intresse, påbörjats och fortgått, nämligen en qvalitatif analys af meteoriter från olika meteorfall. Den stora rikedom på meteoriter, som förefinnes vid Riksmuseum, gör det möjligt att anställa en omfattande komparatif undersökning af dessa kroppars kemiska konstitution, som torde vara egnad att sprida ljus öfver de terrestra ämnenas förekomst i verldsrymden. Undersökningen har hittills omfattat meteoriter från Ställdalen, Hessle, Grönland, New Concord och den bekanta Pallasmeteoriten. — Instrumentsamlingen har under året förökats med en vid Akademiens instrumentmakareverkstad förfärdigad ny och dyrbar apparat för

uppmätning af de fotografiska clichéer som användas vid de spectroskopiska undersökningarne, hvilken apparat blifvit omsorgsfullt undersökt i afseende på den tillhörande mätningsskrufvens såväl periodiska som fortskridande fel och dervid visat sig vara synnerligen tillfredsställande, så att mätningarne å spectralfotogrammen förete en märkligt större noggranhet än som kunnat ernås med en äldre, förut begagnad dylik mätapparat. Dessutom har samlingen riktats med en större fotografisk camera samt en dertill hörande anastigmat af ZEISS samt åtskilliga fotografiska utensilier och mindre hjelpapparater. — De *Thamiska* föreläsningarne hafva under vintermånaderna i vanlig ordning hållits och haft till ämne ljusets natur och användning såsom vetenskapligt forskningsmedel.

Vid *Bergianska Stiftelsens* trädgårdsskola har antalet elever under året varit 15. Undervisningen har omfattat den praktiska hortikulturens olika grenar samt botanik, geografi, geologi, kemi, fysik, aritmetik, fältmätning, trädgårdsritning, bokföring och svenska skriföfningar. — Bland verkställda nyanläggningar i trädgårdens botaniska del må nämnas en afdelning för mediterrana hafsstrandsväxter vid sydvestra delen af strandvägen samt en andra afdelning för ormbunkar på nordöstra bergsluttningen. — Stiftelsen har under året ihågkommits med talrika gåfvor. Samlingar af lefvande växter hafva lemnats af D:r F. AHLFVENGREN, Artist A. EKBLOM, Kyrkoherde S. J. ENANDER, Friherre E. HISINGER från Finland, Herr G. INDEBETOU, Adjunkt K. JOHANSSON, Professor OSW. KIHLMAN från Finland, Adjunkt T. O. B. N. KROK, Häradshöfding B. LAGERVALL, Komminister J. G. LAURELL, Lektor C. A. M. LINDMAN, Fru G. LJUNGBERG, Docent K. LJUNGSTEDT, Professor W. NETZEL, Kyrkoherden A. TORSSANDER, Direktör F. ULRIKSSON och Lektor L. J. WAHLSTEDT. Frön hafva erhållits af Deras Kongl. Högheter Arffurstarne GUSTAF ADOLF och WILHELM, Professor E. ALMQVIST, Ingeniör C. O. BOJJE AF GENNÄS, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Fröken H. J. DANIELSSON, Professor F. ELFVING, Amanuens G. FORSBERG, Hofkamrer H. HAFSTRÖM, D:r TH. HOLM från

Amerika, Herr G. INDEBETOU, Adjunkt T. O. B. N. KROK, Kollega N. G. W. LAGERSTEDT, Professor G. LAGERHEIM, D:r G. O. MALME, Kandidat C. OSTENFELD från Island, Direktör F. VON POST, Lektor E. ROSTRUP från Danmark och Professor N. WILLE från Kaukasusländerna. Morfologiska föremål hafva lemnats af Professor A. N. LUNDSTRÖM, Landtbruksinspektör A. LYTTKENS och af Kramfors bruks aktiebolag. — Såsom deltagare i det allmänna internationella fröbytet har trädgården utdelat frön till och mottagit frön från mer än 80 botaniska trädgårdar och likartade institutioner i Europa, Amerika, Asien och Australien. — Under året har utkommit 2:dra bandet af »Acta Horti Bergiani», innehållande sju botaniska afhandlingar.

Akademiens *Bibliotek* har under året hållits tillgängligt på stadgade tider. Statistiken öfver dess begagnande utvisar, att under tillsammans 256 tjenstgöringsdagar de besökandes antal varit 2,404, att till begagnande framtagits 4,591 volymer, af hvilka 2,519 utlemnats till hemlån, samt att 2,073 läntagna volymer blifvit återställda. Vid årets slut voro omkring 10,200 band och häften utlånta. Genom inköp, gåfvor och byten har boksamlingen tillväxt med 5,235 band, häften och småskrifter. — Akademiens egna skrifter utdelas för närvarande till 912 institutioner och personer, af hvilka 264 inom och 648 utom landet.

Vid statens *Meteorologiska Centralanstalt* har verksamheten under året fortgått efter den med år 1894 införda utvidgade plan. Dagligen hafva väderlekstelegram, innehållande afton- och morgonobservationer, inkommit från 14 inländska och 47 utländska meteorologiska stationer, af hvilka de inländska stationerna Halmstad och Gellivara samt den utländska Helder äro under året nytillkomna. Med stöd af dessa telegram hafva dagligen blifvit konstruerade två öfversigtskartor, af hvilka morgonkartan, åtföljd af en sammanfattning af det allmänna väderlekstillståndet och utsigter för närmast följande dygn, blifvit inom hufvudstaden bekantgjord dels genom anslag å offentliga platser och dels genom dess införande i de större dagliga tidningarne. Denna sammanfattning af väderlekstill-

ståndet jemte utsigter har äfven på telegrafisk väg blifvit öfversänd till 17 kommuner i riket, mestadels dock endast under sommarmånaderna, hvarjemte en mera kortfattad dylik sammanfattning blifvit meddelad Kongl. Styrelsen för statens jernvägstrafik, som låtit anslå densamma å alla större jernvägsstationer. Denna anordning har äfven blifvit vidtagen på flera privata banlinier, af hvilka de flesta erhållit dessa uppgifter från närmaste statsstation. — Likasom under föregående år har under Juli—September månader en särskild väderlekstjenst varit anordnad till jordbrukets gagn. För detta ändamål har anstalten under denna tid erhållit morgontelegram, innehållande afton- och morgonobservationer, från ytterligare 7 inländska och en utländsk station samt eftermiddagstelegram från 17 inländska och 16 utländska stationer. På grund af dessa telegram dels kompletterades de ofvannämnda öfversigtskartorna och dels upprättades en särskild karta öfver eftermiddagens väderlek, och i enlighet dermed utfärdades särskildt för jordbruket afsedda väderleksutsigter beträffande nederbörd och nattfrost under påföljande dygn. På samma sätt som morgonuppgifterna hafva äfven dessa eftermiddagsuppgifter blifvit genom Telegraf- och Jernvägsstyrelsernas försorg befordrade och spridda samt jemväl bekantgjorda genom anslag å offentliga platser i hufvudstaden äfvensom införda i ett par af hufvudstadens dagliga morgontidningar. — De till Anstalten ankomna morgontelegrammen hafva fortfarande blifvit offentliggjorda i »Bulletin du Nord», en tidskrift som bekostas af de tre skandinaviska meteorologiska anstalterna gemensamt. — Statens meteorologiska stationer äro för närvarande 34 till antalet, hvarförutom observationer öfver nederbörd och temperatur med egna eller från Anstalten till låns bekomna instrumenter anställas å flera privatstationer. Fullständiga observationsserier hafva inlemnats af Läroverksrektorn P. R. Billmanson i Nora, Jägmästaren J. J. C. von Döbeln i Björkholm, Grosshandlaren G. Kling i Hinsekind, Telegrafkommissarien G. A. Larsson och Herr J. A. Olsson i Nässjö, från Ronneby helsobrunn, Gysinge bruk och Ulricehamns sanatorium samt från Landtbruks-

Akademiens Experimentalfält vid Stockholm, vidare från en station i Hallands och en i Upsala län, de två sistnämnda inrättade och underhållna på de respektiva Hushållningssällskapens bekostnad. Af de med skogsmedel bekostade försöksstationer hafva iakttagelser öfver nederbörd, afdunstning och jordtemperatur under år 1897 fortfarande utförts. Enligt Kongl. Domänstyrelsens beslut hafva dessa stationer, hvilka varit i verksamhet sedan år 1876, med utgången af år 1897 blifvit indragna såsom icke vidare behöfliga. — Det system af stationer för iakttagelser öfver nederbörden och delvis öfver lufttemperaturen, som bekostas af hushållningssällskapen i riket, och der iakttagelserna påbörjades år 1878, är ännu i fortsatt verksamhet. Om till hithörande stationer lägges statens meteorologiska stationer, så väl de, hvilka lyda under Centralanstalten som under Nautisk-meteorologiska Byrån, samt de privata stationerna och skogsstationerna, vid hvilka alla nederbörden observeras efter en och samma plan, blir antalet nederbördsstationer i riket inalles 425, fördelade på rikets alla län. De vid dessa stationer gjorda iakttagelser införas i en månatlig tidskrift med titel: »Öfversigt af väderleken i Sverige», hvilken tidskrift redigeras af Amanuensen D:r H. E. HAMBERG under Anstaltens inseende och hufvudsakligen uppehålles genom prenumeration af Hushållningssällskapen. Af denna tidskrift hafva 17 årgångar hittills utkommit, nämligen för åren 1881—1897. — Iakttagelserna öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser hafva fortgått efter oförändrad plan, och hafva till Anstalten inkommit dithörande journaler från 44 observatörer öfver isläggning och islossning, från 49 öfver iakttagna åskväder och från 58 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurverlden. — Synoptiska tabeller hafva upprättats för hvarje dag af året 1896, upptagande nederbördens art och mängd, åskväder, dimma, dagg, rimfrost, luftens genomskinlighet, solrök, norrsken m. m. I dessa tabeller ingå samtliga stationer. — Under året har Amanuensen D:r HAMBERG besökt och inspekterat följande stationer: Falun, Gefle, Sveg, Hernösand, Umeå, Piteå, Gellivara, Jockmock, Haparanda, Visby, Kalmar, Karls-

hamn, Vestervik, Örebro och Askersund. — För öfrigt har Anstalten, såsom vanligt, under året haft att meddela en mängd upplysningar åt såväl in- som utländska institutioner och enskilda personer.

Det *Naturhistoriska Riksmuseum* har under hela året i vanlig ordning, eller 3 dagar i hvarje vecka, hållits tillgängligt för allmänheten, men under tiden för den allmänna konst- och industriutställningen härstädes har det dessutom hållits öppet ytterligare två veckodagar. De besökandes antal har fortfarande varit rätt betydligt isynnerhet de dagar då tillträdet varit afgiftsfritt och framför allt under tiden för den nämnda utställningen. Dessutom hafva museets samlingar afgiftsfritt fått besökas äfven på andra än de regelbundna tiderna, när särskilda framställningar derom blifvit gjorda, såsom af skolungdom under lärares ledning. Sålunda hafva under året 1,360 skolelever under ledning af 74 lärare äfvensom under julhelgen rekryter från Svea Lifgarde haft fritt tillträde till dessa samlingar.

Vid Riksmuseets *Mineralogiska* afdelning har ordnandet af dess dublettförråd vidare fortgått, hvarjemte utläggning af en kristallsamling påbörjats, afsedd att, när en rymligare och ändamålsenligare lokal för sjelfva mineralmuseet erhållits, uppställas i dess för allmänheten tillgängliga del. Den bör blifva särdeles vacker och för mineralogiens studium lärorik. Mineralsamlingen har ökats genom följande inköp: af Docenten OTTO NORDENSKJÖLD diverse mineral insamlade under dennes resa till Eldslandet och Patagonien; af mineralhandeln English & C:o en del särdeles vackra nyare amerikanska mineral; af mineralhandlaren BÖHM en stuff meteorjern från Sao Juliao de Moreiro i Portugal; af Mineralien-Niederlage i Freiberg några vackra Phenakitkristaller från Kragerö i Norge; af mineralhandlaren KRANTZ ett stycke meteorjern från Nordamerika; af Herr C. FLINK några vackra stuffer af diverse skandinaviska mineral; af arbetare vid grufvor och stenbrott mineral från Nordmarken, Thaumasit från Skottvångs grufvor i Gåsinge socken, ett 80 kilo vägande, men beklagligen vid lösbrytningen sönderbrutet stycke Columbit från trakten af Moss, Tantal-

mineral från Skogböle tantalitbrott i Finland. Likaledes hafva suiter af den Norska Phenakiten från Kamerfos jemte andra i trakten förekommande mineral erhållits från en af Ingeniör G. LÖFSTRAND till stället utförd resa. — Förvärfvet genom byte har äfven under detta år varit mycket obetydligt och har hufvudsakligen bestått af några ur meteorjern isolerade mineral erhållna af Professor E. COHEN i Greifswald. — Såsom gåfvor hafva erhållits åtskilliga utmärkt vackra mineral från Wermland och Norge skänkta af Bergsingeniör F. CARLSSON; af Konsul N. PERSSON en vacker svit af de genom en egendomlig förskjutning märkliga kristaller af svafvelkis, som träffats vid Sulitelma grufvor; af Långbans aktiebolag en kolossal stuff af den förut endast i små oansenliga kristaller träffade Kentroliten från Långban; af Professor A. E. TÖRNEBOHM åtskilliga mineral från Pitkäranta och från koppargrufvorna vid Sulitelma, af Disponenten J. KJELLGREN en stor Cordierilpseudomorphos från Reymyra qvartsbrott å Kolmorden; af British Museum en stuff af det sällsynta mineralet Edingtonit från Kilpatrick i Skottland; af Brukspatron J. SEDERHOLM en vacker stuff krom-rutil från Käringbrickan i Westmanland; af statsgeologen N. O. HOLST åtskilliga intressanta stuffer af guldmalm från vestra Australien; af f. d. Chefen för geologiska undersökningen i Japan D:r WADA några märkliga qvartstvillingar m. m. från Otomesaka i Japan. — Af museets dublettförråd hafva några märkliga mineralstuffer äfvensom åtskilligt undersökningsmaterial blifvit öfverlemnade till mineralogiska institutionen i Upsala och till Stockholms Högskola, äfvensom till Akademiens Fysiker Professor HASSELBERG och Professor COHEN i Greifswald.

Riksmuseets *Botaniska* afdelning har under året vunnit förkofran såväl genom skänker som genom köp och byten. Akademien har till afdelningen låtit öfverlemna den samling, som D:r F. AHLFVENGREN, hvilken af Akademien åtnjutit reseunderstöd, under sin resa hopbragt. Bland öfriga gåfvor må nämnas i främsta rummet Lichenes exsiccati och Lichenes monacenses af D:r F. ARNOLD i München; vidare fanerogamer af H. K. H.

Arffursten GUSTAF ADOLF, Stationsbokhållaren L. ANDERSSON, Adjunkt F. R. AULIN, Rådman H. T. BENCKERT, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Kandidat H. A. FRÖDING, Hofkamrer H. HAFSTRÖM, Pastor O. HAGSTRÖM, Herr G. INDEBETOU, Adjunkt E. KÖHLER, Kapten O. KÖHLER, Lektor C. A. M. LINDMAN, Herr E. LUNDQVIST, Amanuens G. O. MALME och Doktor A. G. WETTER; samt morfologiska föremål af Deras K. Högheter Arffurstarne GUSTAF ADOLF och WILHELM samt Lektor LINDMAN. Bland samlingar, som genom köp förvärfvats, må anföras: fanerogamer från Algier och Tunis af Docent S. MURBECK, växter från Färöarne af Amanuens H. G. SIMMONS, fanerogamer från Spetsbergen af O. EKSTAM, växter från Kamerun af G. ZENKER, C. G. PRINGLES mexikanska växter, fanerogamer från Teneriffa af H. A. TULLGREN, tessaliska växter af P. SINTENIS, Hieracier från mellersta och vestra Europa af H. DAHLSTEDT, sydamerikanska fanerogamer af C. BANITZ, samt exsiccatverken: Phycotheca borealiamericana VI—VIII af COLLINS, HOLDEN och SETCHELL, Herbarium cecidiologicum af F. PAX, Lichenas suecici exsiccati af G. MALME, Characeæ exsiccatæ V af MIGULA, SYDOW och WAHLSTEDT, Set of British Hieracia III af E. och W. LINTON, Potentillæ exsiccatæ VII af H. SIEGFRIED, Algæ britannicæ rariores exsiccatæ IX af E. M. HOLMES, Funghi Paraciti XII af BRIOSO och CAVARA, American Algæ II af E. TILDEN. — Genom byte hafva förvärfvats vestindiska och brasilianska växter från universitetets i Berlin Botaniska museum, mexikanska och brasilianska växter från universitetets i München Botaniska museum, samt abyssiniska växter från Herbier Boissier i Chambésy. — Delar af de skandinaviska, allmänna och Regnellska herbarierna hafva för bearbetning varit utlånade till specialister i Sverige, Danmark, Tyskland, Schweiz och Belgien. — För vetenskapliga ändamål hafva samlingarne vid museum anlitats af Lektor E. ADLERZ, Rektor S. ALMQUIST, Docent G. ANDERSSON, Doktor O. F. BORGE, Öfverkontrollör P. G. BORÉN, Professor H. CONWENTZ från Tyskland, Amanuens H. DAHLSTEDT, Kyrkoherde S. J. ENANDER, Doktor H. FISHER från England,

Hofkamrer H. HAFSTRÖM, Pastor O. HAGSTRÖM, Magister K. E. HIRN från Finland, Adjunkt K. JOHANSSON, Professor F. R. KJELLMAN, Adjunkt KROK, Lektor C. A. M. LINDMAN, Kollega A. A. MAGNUSSON, Lektor L. M. NEUMAN, Amanuens G. O. MALME, Kandidat L. ROMELL, Doktor K. O. E. STENSTRÖM och Kyrkoherde A. TORSSANDER. — Såsom Regnellsk Amanuens har Doktor G. O. MALME varit anställd.

Riksmuseets *Vertebrat-afdelning* har under året varit med skänker ihågkommen af Fru E. BERTHELIUS i Kristianstad, Doktor SVEN HEDIN, Trädgårdsmästaren A. WAHLBERG, Fru BERGGREN, Läroverkskollega W. A. ENGHOLM i Wadstena, Fru LÄNGSTADIUS och Konsul GIÆVER i Tromsö. Bland inköp må nämnas en större samling fiskar från Medelhafvet, anskaffade af Preparatorn BRANCALEONE BORGIOLI i Genua, och en typsamling af ödlor och ormar från den framstående herpetologen J. DE BEDRIAGA i Nizza. — De vetenskapliga arbetena vid afdelningen hafva utgjorts af en fortsatt bearbetning af de genom Doktor O. NORDENSKJÖLD hembragta Eldslands-fiskarne och en utredning af slägtskapsförhållandena mellan formerna af slägtet Gebius, för hvilket ändamål en samling af mer än 300 exemplar af detta slägte erhållits till lån från Kejserl. Vetenskaps.-Akademiens i S:t Petersburg zoologiska museum. Katalogiseringen af de vid afdelningen i sprit förvarade fiskar har dessutom blifvit fortsatt. — Vid konservators-verkstaden hafva 3 däggdjur, 28 foglar och ett groddjur blifvit uppstoppade, 4 skelett och 15 kranier blifvit rengjorda, hvarjemte en Yach-oxe-hud och en Kulan-hud, hvilka D:r S. HEDIN förärat till museum, blifvit beredda. — Den vid årets allmänna konst- och industriutställning härstädes från afdelningens dublett-förråd utställda samling af vertebrater, afsedd för undervisningen vid högre läroverk, har ställts till förfogande af Statsrådet och Chefen för Kongl. Ecklesiastik-Departementet, som öfverlemnat densamma till Folkskolelärarinneseminariet å Södermalm härstädes. — *Etnografiska samlingen* har fått emottaga gåfvor af Lektor C. LINDMAN, Löjtnant M. STENBÄCK och Kapten J. MEYER Katalogiseringsarbetet i denna afdelning har

oafbrutet blifvit fortsatt. En förbättrad uppställning af föremålen i samlingen I (inrymd i lägenheter inom qvarteret Grönlandet Södra) har möjliggjorts genom inköp af 8 större skåp och en fönster-montre. Likaledes hafva till samlingen II (inrymd i lägenheter inom huset N:o 30 Kungsgatan) 6 skåp och en glasskärm anskaffats för att upptaga de från Orienten nyförvärfvade föremål, som insamlats af Amanuensen F. R. Martin. Samlingen i sin helhet har under året ökats med 806 nummer.

Riksmuseets *afdelning för lägre Evertebrater* har under gångna året varit ihågkommen med skänker af Doktor Hj. Stolpe, som öfverlemnat ett antal stora sötvattensmusslor från Japan samt vackra exemplar af Distichoporakolonier från Stilla hafvet, af Docenten H. Wallengren, som förärat en vacker samling Infusorier i preparat, af Amanuensen G. Grönberg, som förärat afdelningen några mycket vackra formol-behandlade exemplar af Hydromedusorna Codonium princeps, Triara conifera och en Sarsia, alla från Ishafvet, af Kapten John Meijer, som under en seglats till och från Vänskapsöarne gjort värdefulla insamlingar af naturföremål afsedda för Riksmuseum, af Konservator C. A. Hanson i Strömstad och Mr. H. L. Clark, hvilken sednare öfversändt några af honom vid Port Henderson på Jamaica tagna djurformer. Genom byte har afdelningen förvärfvat från museerna i Lyon och Trondhjem flera nya Actinier; från British Museum den märkliga Bryozoen Heteropora neozelandica från Nya Zeeland och en närstående form från Japan, och från Professor A. C. Haddon i Cambridge en del för Riksmuseum nya Actinier. Af utan jemförelse största betydelse för afdelningen har dock varit, att den under året kunnat inlösa och med sig införlifva mycket omfattande och värdefulla samlingar af evertebrerade djur, som under Docenten O. Nordenskjölds expedition till Eldslandet af Docenten A. Ohlin och Herr H. Åkerman insamlats från Magalhaenssundet och närliggande hafsområden. Dessa samlingar äro till största delen utlemnade för bearbetning och bestämning till specialister inom och utom landet. För vetenskapliga arbeten hafva äfven andra

större eller mindre samlingar varit på samma sätt utlånade. — Arbetet med ordnande och inregistrerande af samlingarne har oafbrutet fortgått. Den flitige och oegennyttige forskaren Med. D:r AXEL VON GOËS, som under en lång följd af år så lifligt intresserat sig för afdelningen och i så hög grad bidragit till samlingarnes förökande, fick, innan han slutade sitt verksamma lif, lägga sista hand vid ordnandet af Foraminifer-samlingen, som, tack vare honom, blifvit en af de förnämsta i verlden. — Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen utförts af Docenterne C. AURIVILLIUS, H. WALLENGREN och O. CARLGREN, Med. D:r A. VON GOËS, D:r Y. SJÖSTEDT, Fil. Kand. I. ARWIDSSON och HJ. ÖSTERGREN, Herr A. D'AILLY samt D:r N. M. KNIPOWITSH från S:t Petersburg.

Akademiens Zoologiska station Kristineberg har under sistlidne sommar för studier och vetenskapliga undersökningar varit begagnad, utom af föreståndaren sjelf, af Professorerne G. RETZIUS, W. LECHE, A. WIRÉN, D. BERGENDAL och E. MÜLLER, Docenterne C. AURIVILLIUS, L. JÄGERSKJÖLD och H. WALLENGREN, Filos. Kandidaterna E. NORDENSKJÖLD, I. ARWIDSSON, E. WAHLGREN, G. SWENANDER och O. HOLMQVIST, Filos. Studerandene A. W. SANDBERG, O. N. HOLMDAHL, G. ANDERSSON, HÄGG samt af Herr A. D'AILLY. — Stationens nyligen grundade boksamling har under året vunnit en betydlig tillökning, i det att Professor G. RETZIUS frikostigt med densamma införlifvat ej blott 7 band af sina egna arbeten utan äfven en större samling afhandlingar öfver evertebrerade hafdjur, valda i öfverensstämmelse med stationens behof.

Riksmuseets *Entomologiska afdelning* har under året fått mottaga en mängd värderika gåfvor, bland hvilka i första rummet bör nämnas en synnerligen rikhaltig samling af Carabus- och Calosoma-arter från nästan alla verldens trakter, hvilken förärats af Med. Doktor E. HAGLUND, som under en lång följd år egnat sig åt studiet af denna grupp bland skalbaggarne. För öfrigt har såsom gåfva eller i byte erhållits en samling fjärilar samt äggkedjor af någon okänd insekt från Matto Grosso i Bra-

silien af Lektor C. F. Lindman; 39 arter för museum nya Lepidoptera och Coleoptera från Sydafrika af Mr. L. Peringuey i Capstaden; några fjärilar från Madagascar af Herr E. Suffert i Berlin; 4 nya arter Cicadider från W. L. Distant i London; exemplar af den för vetenskapen nya Dalerus arcticus från Konservator J. Sparre-Schneider i Tromsö; några sällsynta eller för Sverige nya skalbaggar från fabriksföreståndaren I. B. Ericson i Mölndal; några sällsynta fjärilar från norra Skåne af Kyrkoherden J. Andersson i Förlöf; en samling Hispider från D:r R. Gestro i Genua; åtskilliga Hemiptera från A. L. Montandon i Bukarest; exemplar af Laparocerus vespertinus från A. Fauvel i Caen; ett par sydafrikanska Cetonider från W. L. Distant i London; 13 arter sällsynta afrikanska Lepidoptera från Congostaten genom naturhistoriska museum i Brüssel; några Curculionider från Ingeniör J. Faust i Libau; en samling Coleoptera från C. Ritsema i Leyden; en samling fjärilar från Medelpad och Ångermanland af Bataljonsläkaren R. L. Trafvenfelt; alla dubletterna i en samling insekter, som hemförts från Congo-området af framlidne Sjökapten C. A. Berthelius och till museum öfverlemnats af Lektor L. J. Wahlstedt; några Anthribider från museum i Tring genom D:r K. Jordan; 14 arter svenska Coleoptera ur framlidne Lektor J. L. Stenbergs samling och af denne testamenterade till Riksmuseum; några arter Termiter från museum i Berlin samt en sällsynt Curculionid från Öfverste A. Schultze i Detmold. Genom inköp har förvärfvats: en samling Coleoptera och Lepidoptera från H. Fruhstorfer i Berlin; en större samling insekter och spindeldjur från Eldslandet, hemförd af Docenten O. Nordenskjölds expedition; en samling Lepidoptera från Afrika samt Cerambycider från olika verldsdelar från D:r O. Staudinger i Dresden; celler af Halictus quadricinctus från D:r C. Verhaeff i Bonn, samt en samling fjärilar från Johan Albrechtshöhe i Kamerun inköpt från D:r G. Krantz i Berlin. — Större eller mindre samlingar hafva i stort antal utlånats till vetenskapsmän och specialister i in- och utlandet. — För öfrigt hafva samlingarne begagnats af en mängd personer,

som för ändamålet besökt museum, bland hvilka må nämnas föreståndaren för statens entomologiska anstalt Professor S. LAMPA, Doktor E. HAGLUND från Norrköping, Herr M. WISKOTT från Breslau, Mr. G. H. VERRALL från England, Doktor Y. SJÖSTEDT, Byråchefen J. MEVES, Kassör G. HOFGREN, Herr A. JOSEPHSON och Studeranden I. TRÄGÅRDH.

Riksmuseets *Paleontologiska afdelning* har såsom vanligt hufvudsakligen förkofrats genom inköp af försteningar från Östergötland och Gotland. Genom de år 1896 inledda bytena med universitetsmuseerna i Rom och Pisa hafva vackra och rika samlingar af fossil från Italiens flesta formationer erhållits. Till skänks hafva mottagits af framlidne D:r A. VON GOËS miocena försteningar från Oppenheim vid Mainz, af folkhögskole-föreståndaren W. JONSSON, Käfvestad i Nerike, ett fossil ur den cambriska sandstenen derstädes, af Mr. PH. LAKE, Cambridge England, två arter trilobiter ur Englands cambriska formation, samt af Conservator SVENSON en korall från Gotland. Från Riksmuseets afdelning för lägre Evertebrater har öfverlemnats en samling qvartära fossil från Grönland och arktiska N. Amerika. — Samlingarne hafva för studier blifvit begagnade af studeranden J. G. ANDERSSON, Professor E. HÆCKEL från Jena, Professor J. HALL från New-York, Doktor G. HOLM, Professor G. VON KOCH från Darmstadt, Professor MALAISE från Belgien samt Doktor PERNER från Prag. — Det hufvudsakliga arbetet inom afdelningen har bestått i den vanliga omvårdnaden af gamla och nya förvärf, samt i beskrifningar och afteckningar af fossil för en monografi öfver koraller tillhörande Heliolitidernas familj.

Riksmuseets *afdelning för Arkegoniater och fossila växter* har under året fått mottaga följande gåfvor: en blombärande gren af Arancaria imbricata från Sydamerika af Ingeniör P. DUSÉN; en fossil kalkalg från Italiens triaslager af Professor G. LINDSTRÖM; sandsten med Glossopteris från Australien samt jökelstenar från samma aflagring af statsgeologen D:r N. O. HOLST; några växter från Eldslandet af Docenten O. NORDENSKJÖLD; Finlands geologiska undersöknings kartblad 1—32 med

tillhörande beskrifningar af Direktorn D:r J. SEDERHOLM; en kolvandlad trädstam samt några märkliga konkretioner från Billesholm af Ingeniör J. SVEDBERG; fossila spår från Öland af statsgeologen D:r SVEDMARK; ett märkligt fossilt spår från Tessini-sandstenen på Öland af Kronofogden A. WELLIN; lefvermossor från den Regnellska expeditionen till Brasilien samt diverse andra arkegoniater af Professor V. WITTROCK. Genom inköp har förvärfvats: mossor från Färöarne; original-preparat af de af Ingeniör P. DUSÉN beskrifna mossorna från Kamerun; hela de samlingar af växtfossil, som Docenten O. NORDENSKJÖLD hemfört från Eldslandet och Ingeniör P. DUSÉN från Chile. Genom byte hafva erhållits norska mossor från Doktor T. HAGEN i Trondhjem och siluriska kalkalger från Doktor E. STOLLEY i Kiel. — För vetenskapligt ändamål hafva samlingarne anlitats af Kammarrådet S. BORGSTRÖM, Professor H. CONWENTZ från Danzig, Ingeniör P. DUSÉN, Doktor T. HAGEN från Trondhjem, Herr M. HEEG i Wien, Läroverksadjunkten K. P. HÄGERSTRÖM och Professor V. WITTROCK.

De medel, hvilka Akademien på grund af donationer haft till förfogande, hafva för sina föreskrifna ändamål blifvit på efterföljande sätt använda.

Den *Letterstedtska* donationens årsränta har blifvit fördelad i öfverensstämmelse med donators föreskrifter. Sålunda har Letterstedtska resestipendiet, öfver hvilket Akademien varit i tur att förfoga, blifvit tilldeladt Docenten vid Stockholms Högskola OSCAR CARLGREN med uppgift att i Tyskland och Italien idka zoologiskt-fysiologiska studier. — De Letterstedtska räntemedlen till pris för förtjenstfulla originalarbeten och vigtiga upptäckter hafva tillerkänts Professorn Friherre A. E. NORDENSKJÖLD för hans nyligen utgifna arbete med titel: »Periplus, utkast till sjökortens och sjöböckernas äldsta historia». — Letterstedtska räntemedlen till pris för förtjenstfulla öfversättningar till svenska språket hafva i form af en Letterstedtsk guldmedalj tilldelats

Professorn vid Lunds universitet F. A. WULFF för hans öfversättning af DANTE'S »Vita nuova». — Letterstedska medlen för maktpåliggande undersökningar hafva blifvit ställda till förfogande af Amanuensen D:r G. O. MALME för att genom jemförande studier vid de botaniska museerna i Genève vetenskapligt bestämma Riksmuseets synnerligen värdefulla sydamerikanska Lichensamlingar. — Det Letterstedtska slägtstipendiet har fortfarande utgått med 2000 kronor till testators dotterson ynglingen YVES HENRI GABRIEL LETTERSTEDT DE MONTMORT. — Utaf donationens årsränta hafva för öfrigt föreskrifna andelar blifvit öfverlemnade till Domkapitlet i Linköping för utdelande af belöningar åt förtjenta folkskolelärare inom detta stift, till Pastorsembetet i Wallerstads församling af samma stift för utdelande af premier i församlingens folkskola och bildandet af ett sockenbibliotek m. m., äfvensom till Direktionen öfver Serafimer-Lasarettet i Stockholm för nödlidande sjuke resandes vård derstädes.

Letterstedtska föreningens fonder, som äro ställda under Akademiens förvaltning, uppgingo vid 1897 års slut till ett sammanlagdt kapital af 696,959 kronor 68 öre, hvarförutom vid samma tid fanns en disponibel räntebehållning af 15,236 kronor, som blifvit till Föreningens styrelses förfogande öfverlemnad.

Wallmarkska donationens årsränta, fördelad i två lika stora lotter, har såsom belöning blifvit tillerkänd dels Professorn B. HASSELBERG för de flera i Akademiens Handlingar offentliggjorda afhandlingar med den gemensamma titeln: »Untersuchungen der Metalle im elektrischen Flammenbogen», och dels Amanuensen D:r H. E. HAMBERG för hans i Bihanget till Domänstyrelsens berättelser offentliggjorda undersökningar: »Om skogens inflytande på Sveriges klimat.»

Den *Edlundska* belöningen har blifvit öfverlemnad åt Filos. Doktor W. CARLHEIM-GYLLENSKÖLD för en af honom författad och i »Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms Observatorium» offentliggjord afhandling med titel: »Sur la

forme analytique de l'attraction magnétique de la terre, exprimée en fonction de temps».

Den *Fernerska* belöningen har tilldelats Docenten vid Stockholms Högskola H. VON KOCH för hans i Bihanget till Akademiens Handlingar införda afhandling: »Sur la convergence des déterminants d'ordre défini».

Den *Lindbomska* belöningen har tillerkänts Professorn vid Karolinska Institutet E. J. WIDMARK för hans i Öfversigten af Akademiens förhandlingar intagna afhandling »Om gränserna för det synliga spectrum».

Den *Flormanska* belöningen har anvisats åt Med. Kandidaten K. BERGENDAL och Studeranden P. BERGMAN gemensamt för deras i »Skandinavisches Arkiv für Physiologie» offentliggjorda afhandling: »Zur Physiologie der Intercostalmuskeln».

Det *Wahlbergska* resestipendiet har anvisats åt Docenten C. V. S. AURIVILLIUS med ändamål, antingen att idka zoologiska studier inom Ostindiska arkipelagen, eller att undersöka Atlantiska hafvets plankton-förhållanden från jemförande biologisk-hydrografisk synpunkt.

Det *Beskowska* stipendiet har tilldelats studeranden J. G. ANDERSSON för att vid Riksmuseets afdelning för lägre Evertebrater bearbeta dess samlingar af skandinaviska och arktiska ostrakoder.

Af *Regnells zoologiska gåfvomedel* har Akademien anvisat följande understöd:

åt Doktor Y. SJÖSTEDT 600 kronor för att vid Riksmuseets Entomologiska afdelning bearbeta den samling af Pseudoneuroptera, som han sjelf hemfört från Kamerun; och

åt Herr A. D'AILLY 250 kronor för att fullfölja ordnandet och bestämmandet af Riksmuseets mollusksamlingar från Kamerun.

Det *Byzantinska* resestipendiet, öfver hvilket Akademien är i tur att förfoga för åren 1898, 1899 och 1900, har blifvit tilldeladt:

för år 1898 Assistenten vid den kemisk-växtbiologiska anstalten i Luleå Filos. Kandidaten F. E. WICKSTRÖM för att vid Tyska universitet idka agrikultur-kemiska studier;

för år 1899 Vagnmakaren A. A. SVENSSON för att i utlandet studera vagnfabrikationen ur såväl teoretisk som praktisk synpunkt; och

för år 1900 Adjunkten vid Ultuna Landtbruksinstitut P. E. ULLBERG för att i utlandet studera kulturteknik i allmänhet och särskildt fältbyggnadslära m. m.

Scheelefondens ränteafkastning har blifvit öfverlemnad åt Filos. Licentiaten A. EKBOM för att sätta honom i tillfälle att fullfölja vissa påbörjade kemiska undersökningar.

För utförande af resor inom landet med ändamål att undersöka dess naturförhållanden har Akademien anvisat följande understöd:

åt Docenten O. JUEL 150 kr. för cytologiska studier öfver Florideer i Bohuslän;

åt Studeranden R. E. FRIES 150 kr. för mykologiska studier i Jemtland;

åt Läroverksadjunkten K. JOHANSSON 100 kr. för studium af Gotlands hapaxantiska växter;

åt Kandidat K. KJELLMARK 100 kr. för undersökningar af hydrofila växtsamhällen i mellersta Sveriges insjöar;

åt Folkskoleläraren P. LARSSON 100 kr. för bryologiska studier inom Bohuslän;

åt Kandidaten N. H. NILSSON 200 kr. för att i Lule lappmark studera växtformationerna i dervarande myrar;

åt Kandidaten A. ROMANUS 150 kr. för att undersöka förekomsten af anthocyan hos växter i Jemtlands fjelltrakter;

åt Studeranden T. VESTERGREN 100 kr. för mykologiska studier på Gotland;

åt Läroverkskollega W. A. ENGHOLM 100 kr. för studium af sjön Tåkerns djurlif;

åt Läroverksadjunkten C. FRISTEDT 100 kr. för idkande af studier öfver Wermlands land- och sötvattensmollusker;

och åt Konservatorn O. ROTH 150 kr. för idkande af entomologiska och ornitologiska studier i Gellivara-trakten.

Statsanslaget till instrumentmakeriernas uppmuntran har blifvit lika fördeladt mellan matematiska och fysiska instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Den minnespenning, som Akademien till denna sin högtidsdag låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne ledamot, Föreståndaren för Degebergs landtbruks-institut Direktör EDVARD NONNEN.

Genom döden har Akademien bland sina svenska och norska ledamöter under året förlorat Grosshandlaren Friherre OSCAR DICKSON, Professorn vid universitetet i Upsala ALARIK FRITHIOF HOLMGREN, Norske Jernbanedirektören CARL ABRAHAM PIHL, Professorn vid universitetet i Kristiania HJALMAR HEIBERG, Professorn vid universitetet i Lund CHRISTIAN WILHELM BLOMSTRAND och f. d. Öfverdirektören vid Tekniska Högskolan KNUT STYFFE; samt bland sina utländska ledamöter f. d. Professorn vid Sorbonne i Paris ALFRED LOUIS OLIVIER DES CLOIZEAUX, f. d. Direktorn för Bergsakademien i Leoben (Österrike) PETER VON TUNNER, Professorn och Direktorn för kemiska laboratorium i Wiesbaden CARL REMIGIUS FRESENIUS, Professorn vid universitetet i Köpenhamn JOHANNES JAPETUS SMITH STEENSTRUP, Professorn vid universitetet i Breslau RUDOLF HEIDENHAIN och Professorn vid universitetet i Leipzig RUDOLF LEUCKART.

Med sitt samfund har Akademien deremot såsom nya ledamöter förenat, inom landet: Professorn vid universitetet i Upsala SALOMON EBERHARD HENSCHEN, Professorn vid Tekniska Högskolan PER WILHELM ALMQVIST, Bibliotekarien vid Upsala universitet CLAËS ANNERSTEDT, Professorn och Rektorn vid Karolinska Med. Kir. Institutet Grefve KARL AXEL HAMPUS MÖRNER, och Akademiens Astronom Professor KARL PETRUS THEODOR BOHLIN; samt i utlandet: Professorn vid universitetet i Turin ANGELO MOSSO, Sekreteraren hos Royal Society i London Lord JOHN WILLIAM RAYLEIGH, Professorn vid University College i London WILLIAM RAMSAY, Professorn vid universitetet i Freiburg (Baden) AUGUST WEISMANN, Professorn vid Conservatoire des arts et métiers i Paris LOUIS NICOLAS GRAN-

DEAU och Professorn vid universitetet i Heidelberg WILLY KÜHNE.

Dessutom har bland akademiens utländska ledamöter Direktorn för Istituto tecnico i Milano, Italienske Senatorn FRANCESCO BRIOSCHI under året såväl blifvit invald till ledamot som ock sedermera med döden afgått.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 216.)

London. *Entomological society.*
Transactions. 1897. 8:o.
— *Royal society.*
Year-book. N:o 1 (1896—97). 8:o.
Proceedings. Vol. 62 (1898): N:o 386—388; 63 (1898): 389. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 3. 8:o.
Luxembourg. *Société botanique.*
Recueil des mémoires et des travaux. N:o 13 (1890—96). 8:o.
Marseille. *Commission météorologique du dép. des Bouches-du-Rhône*
Bulletin annuel. Année 14 (1895); 15 (1896). 4:o.
— *Musée d'Histoire Naturelle.*
Annales. T. 5. 1897. 4:o.
Mexico. *Instituto medico nacional.*
Anales. T. 3 (1897): N:o 10—11. 4:o.
— *Observatorio meteorológico central.*
Boletín de agricultura, mineria é industrias. Año 6 (1896/97): N:o 11—12. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-Phys. Cl. Bd 19: Abth. 2. 1898. 4:o.
— *K. Meteorologische Central-Station.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 19 (1897): H. 1—2. 4:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 4 (1898): Fasc. 2. 8:o.
Nizza. *Observatoire.*
Annales. T. 6. Paris 1897. 4:o.
— *Société de médecine et de climatologie.*
Nice-médical. Année 22 (1897/98): N:o 1—3, 5—6. 8:o.
O'-Gyalla. *Astrophysikalisches und meteorologisches Observatorium.*
Beobachtungen. Bd. 12—13 (1894—95). 4:o.
Ottawa. *Field-Naturalists' Club.*
The Ottawa Naturalist. Vol. 11 (1897/98): N:o 11. 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 12 (1898): Fasc. 1—2. 8:o.
Paris. *Bureau central météorologique.*
Annales. Année 1895: 1—3. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1897: N:o 9—12; 1898: 1. 4:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux des séances de 1897. 8:o.
— *École des mines.*
Annales des mines. (9) T. 11 (1897): Livr. 4—5; 12 (1897): 8—11. 8:o.
— *Observatoire de Paris.*
Annales. Mémoires. T. 22. 1896. 4:o.
Catalogue. T. 3 (12^h à 18^h). 1896. 4:o.
Positions observées des étoiles, 1837—81. T. 3 (12^h à 18^h). 1896. 4:o.

Atlas photographique de la lune. Fasc. 2: Texte & Planches. 1897. 4:o & Fol.

Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 3—4. 8:o.

— *Société d'études scientifiques.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1898): N:o 330—331. 8:o.

— *Société de géographie.*
Comptes rendus des séances. 1898: N:o 1—2. 8:o.

— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 25 (1897): N:o 8. 8:o.

Pisa. *R. Scuola normale superiore.*
Annali. Vol. 19. 1897. 8:o.

Pola. *K. u. k. hydrographisches Amt.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen in Pola und Sebenico. 1898: 1—2. 4:o.

Potsdam. *Astrophysicalisches Observatorium.*
Publicationen. Bd 11. 1898. 4:o.

Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Classe für Philos. Gesch. u. Philol. 1897. 8:o.
» Mathem.-naturwiss. Cl. 1897: 1—2. 8:o.
Jahresbericht für das Jahr 1897. 8:o.

— *Spolek chemiků Českých.*
Listy chemické. R. 21 (1897): C. 6—10. 8:o.

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 5: P. 2 (Not. degli Scavi) 1897: 12 & Indice. 4:o.
» Cl. di scienze fisiche . . . Rendiconti. Vol. 7 (1898): Sem. 1: Fasc. 4—6. 8:o.
Annuario 1898. 12:o.

San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Almanaque náutico para el año 1899. 8:o.

St. Petersburg. *Observatoire physique central.*
Annales. Année 1896: P. 1—2. 4:o.
Extrait du compte rendu pour 1896. 8:o.
3 separatafhandlingar ur Mémoires de l'Acad. Imp. 4:o.

— *Russisch-kaiserl. mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd. 35: Lief. 1. 1897 & Systematisches Sach- und Namenregister der 2. Serie. 1898. 8:o.

Sydney. *Linnean society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 22 (1897): P. 3. 8:o.
Act of incorporation, rules, list . . . Febr. 1898. 8:o.

Tokyo. *Earthquake investigation committee.*
Publications. N:o 1. 1897. 4:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 33 (1897/98): Disp. 1—6. 8:o.

Washington. *Weather bureau.*
Monthly weather review. 1897: 1—12. 4:o.

Washington. *Secretary of the navy.*
The Pacific coaster's nautical almanac for the year 1898. 8:o.
Wien. *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Beobachtungen. 1897: 1—12. 8:o.
— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 48 (1898): H. 1. 8:o.
— *K. K. Gradmessungs-Bureau.*
Astronomische Arbeiten. Bd 9. 1897. 4:o.
— *K. K. Militär-geographisches Institut.*
Astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd 7, 10—11. 1897. 4:o.
— *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*
Annalen. Bd. 12 (1897): N:o 2. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1898: N:o 1—2. 8:o.

Af fru L. Dahlgren.
Congrès international des Américanistes. Compte rendu de la 10e session, Stockholm 1894. 8:o.

Af professor A. G. Nathorst.
3 specialkartor från Spetsbergen.

Af utgifvaren:
Annaes de sciencias naturaes publ. par A. NOBRE. Anno 4 (1897): N:o 4. Porto. 8:o.

Af författarne:
CARLHEIM-GYLLENSKÖLD, V., Om norrskenet. Sthlm 1898. 8:o.
— Om jordmagnetiska kraften i Sverige. Sthlm 1897. 4:o.
LUNDSTRÖM, A. N., Från svenska barrskogar. Sthlm 1897. 8:o.
ABERCROMBY, R., On certain types of British weather. Lond. 8:o.
— 7 småskrifter. 8:o.
DELITALA, G., Contributo allo studio del problema di Pothenot. Torino 1898. 8:o.
FONTSERÉ, E., Nuevas observaciones de Venus. Barcelona 1898. 8:o.
GLASENAPP, S. DE, Mesures d'étoiles doubles. 1—3. St. Petersb. 1892—95. 8:o.
MACOUN, J. M., Contributions from the Herbarium of the Geological survey of Canada. Toronto 1897. 8:o.
REUTER, E., Berättelse om skadeinsekters uppträdande i Finland år 1897. Hfors 1898. 8:o.
REY-PAILHADE, J. DE, Sur l'extension du système décimal au jour et au cercle entiers: avantages et procédés pratiques. Paris 1898. 4:o.
SCHAFFERS, V., Essai sur la théorie des machines électriques à influence Paris 1898. 8:o.
WILLIAMS, A. S., A catalogue of 1081 stars lying between — 30° decl. and the South pole. Lond. 1898. 8:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 5.

Onsdagen den 11 Maj.

INNEHÅLL.

Uti efterlemnadt testamente af den 27 November 1895 hade Akademiens framlidne ledamot Ingeniören Doktor ALFRED BERNHARD NOBEL förordnat, att af hans efterlemnade förmögenhet skulle bildas en stående fond, hvaraf årliga räntan, fördelad i fem lika lotter, skulle användas till prisbelöningar för olika ändamål, deribland två lotter skulle af Akademien användas till utdelande af pris för framstående arbeten i Fysik och Kemi; och hade de af testator förordnade exekutorerne af detta hans testamente i skrifvelse till Akademien hemställt, att Akademien måtte utse två ombud för att gemensamt med dem sjelfva och ombud för de andra svenska institutioner, Svenska Akademien och Karolinska Medikokirurgiska Institutet, åt hvilka dylika räntelotter äfven blifvit i testamentet anvisade, öfverlägga om

och uppgöra förslag till de åtgärder, som med anledning af innehållet af meranämde testamente för närvarande må anses erforderliga; och uppdrog Akademien åt Herrar L. F. Nilson och B. Hasselberg att för sådant ändamål vara Akademiens ombud.

Herr Mittag-Leffler öfverlemnade för offentliggörande i Akademiens skrifter två af honom författade uppsatser med titel: »Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion. Första och andra meddelande», samt redogjorde för desammas innehåll.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

dels i Akademiens Handlingar: »Ueber einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres», af Professor V. Bjerknes;

dels i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Leguminosæ austro-americanæ ex itinere Regnelliano primo», af Lektor C. A. M. Lindman; 2:o) »Om hafsevertebraternas utvecklingstider och periodiciteten i larfformernas uppträdande vid Sveriges vestkust», af Docenten C. W. S. Aurivillius; 3:o) »Om Praseodidym och dess vigtigaste föreningar», af Fil. Kandidat C. von Scheele; 4:o) »Sur le potentiel extérieur d'un sphéroïde hétérogène en rotation dont la surface liquide se trouve en équilibre», af Fil. Kandidat H. von Zeipel;

och dels i Öfversigten: de i innehållsförteckningen uppräknade 6 uppsatser.

Genom anställda val kallades, dels till inländska ledamöter Professorn i Astronomi vid universitetet i Lund Carl Wilhelm Ludvig Charlier och Lektorn vid Chalmers Tekniska Läroanstalt i Göteborg Henrik Gustaf Söderbaum, samt dels till utländsk ledamot Föreståndaren och stiftaren af den Zoologiska stationen i Neapel Geheimerådet Dr. Anton Dohrn.

Anmäldes, att de af Professor A. Mitscherlich i Freiburg för det tillämnade Berzeliska Museum utlofvade minnesföremålen i oskadadt tillstånd redan hit ankommit, äfvensom att Grosshandlaren B. Kempe såsom gåfva till Akademien öfverlemnat

ett egenhändigt bref från LINNÉ till Professor LUDVIG i Leipzig, dateradt den 18 Januari 1737.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Vitterhets-, Historie- och Antiqvitets Akademien.*
Antiqvarisk tidskrift. 16: 4. 1898. 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 1 häfte. 4:o.
— *K. Sjökarteverket.*
Svenska lotsen af 1894. Tillägg N:o 4. 1898. 8:o.
Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*
Handlingar. 1898: H. 1. 8:o.
Upsala. *Universitets-biblioteket.*
Anuario hidrografico de la marina de Chile. Año 7—8, 10—16, 18. Santiago 1881—95. 8:o.
— *Universitetets Meteorologiska observatorium.*
Bulletin mensuel. Vol. 29(1897). Fol.
Aachen. *Meteorologische Station.*
Ergebnisse der Beobachtungen. 1897. 4:o.
Agram. *Societas historico-naturalis Croatica.*
Glasnik. Godina 1: Broj 4—6; 2—9. 1886—96. 8:o.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
Circulars. Vol. 17: N:o 134. 1898. 4:o.
Berlin. *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 17 (1897/98): N:o 4—6. 8:o.
Fortschritte der Physik. Namenregister, 1865—87. H. 2. 1898. 8:o.
— *K. Preussisches Meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam i. J. 1896. 4:o.
Witterung. 1897: 1—12. 4:o.
Die Feier des 50-jährigen Bestehens des Instituts am 16. Okt. 1897. 1898. 4:o.
— *Botanischer Verein für die Provinz Brandenburg.*
Verhandlungen. Jahrg. 13 (1871), 16 (1874)—39 (1897) & Register, 1—30. 1889. 8:o.
Bonn. *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande.*
Verhandlungen. Jahrg. 54 (1897): H. 2. 8:o.
— *Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Sitzungsberichte. 1897: H. 2. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 35(1898): N:o 3. 8:o.
— *Société R. de botanique de Belgique.*
Bulletin. T. 36(1897). 8:o.
— *Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie.*
Bulletin. T. 8(1894): Fasc. 2—4; 9(1895): 1—4. 8:o.

Bruxelles. *Société Belge de microscopie.*
Annales. T. 22: Fasc. 2. 1898. 8:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Mededeelingen. 23. 1898. 8:o.
Cambridge. *Philosophical society.*
Transactions. Vol. 16: P. 4. 1898. 4:o.
Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Atti. (4) Vol. 10 (1897). 4:o.
Bollettino delle sedute. N. S. Fasc. 50—51. 1897—98. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 6 (1898): N:o 5. 8:o.
Coimbra. *Sociedade Broteriana.*
Boletim. 14 (1897): Fasc. 4. 8:o.
Córdoba. *Academia nacional de ciencias.*
Boletin. T. 15 (1897): Entr. 4. 8:o.
Des Moines. *Iowa geological survey.*
Vol. 6—7. 1897. 8:o.
Dorpat. *Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Jurjew.*
Sitzungsberichte. Bd 11. 1898. 8:o.
Dublin. *R. Irish academy.*
Transactions. Vol. 31: P. 1—6. 1896—98. 4:o.
Edinburgh. *R. Physical society.*
Proceedings. Vol. 13: P. 3 (1896/97). 8:o.
Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 9 (1898): N:o 1. 8:o.
Granville. *Scientific Laboratories of Denison university.*
Bulletin. Vol. 9: P. 2. 1897. 8:o.
's-Gravenhage. *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
KOPS, J., & EEDEN, F. W. VAN, Flora Batava. Afl. 319—320. Haarlem 1897. 4:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Kl. N. F. Bd 1: N:o 1. 1898. 4:o.
Nachrichten. Philol.-hist. Kl. 1898: H. 1. 8:o.
Habana. *R. Colegio de Belen de la compañia de Jesus.*
Observaciones magnéticas y meteorológicas. Año 1896; 1897. Fol.
Halifax. *Nova Scotian institute of science.*
Proceedings and transactions. Vol. 9: P. 3 (1896/97). 8:o.
Hamburg. *Botanisches Museum.*
Mitteilungen. 1896. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 1: Livr. 4—5. 1898. 8:o.
Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 31: H. 3—4. 1897. 8:o.

(Forts. å sid. 296.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 179.

Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion.

Första meddelande.

Af G. Mittag-Leffler.

(Meddeladt den 11 Maj 1898.)

En gren af den analytiska funktionen $F(x)$ må uti punkten $x=0$ förhålla sig regulärt. Funktionen i sin helhet är entydigt och fullständigt definierad, om värdet af den angifna grenen liksom af alla dess derivator i punkten $x=0$ äro gifna.

Vi beteckna dessa värden med:

$$F^{(\mu)}(0)\,;\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ F^{(0)}(x)=F(x)\,.$$

Låt K vara ett ändligt eller oändligt kontinuum, som består af ett enda stycke. Låt oss dessutom förutsätta, att det finnes en gren af den analytiska funktionen $F(x)$, hvilken öfverallt inom K förhåller sig entydig och regulär. Vi beteckna denna gren

$$FK(x)\,.$$

Låt l vara en rät linie i x-planet, hvilken sträcker sig från origo mot ∞ och låt ξ vara en gifven punkt på l. Låt oss ytterligare å l afsätta punkterna

$$\nu\xi\,;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots n\,.$$

Låt oss vidare konstruera en serie af n cirklar, af hvilka den första har origo till medelpunkt och går genom ξ, den andra har ξ till medelpunkt och går genom origo samt 2ξ, och den ν:te har $(\nu-1)\xi$ till medelpunkt samt går genom $(\nu-2)\xi$ och $\nu\xi$.

Man kan alltid välja ξ så, att den gren af den analytiska funktionen $F(x)$, för hvilken

$$\left(\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu}\right)_{x=0} = F^{(\mu)}(0)\,; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots \infty$$

för det område, hvilket utgör sammanfattningen af dessa n cirklar förhåller sig entydig och regulär. Det kan inträffa, antingen att detta förhållande eger rum, hvilken punkt ξ än må vara på linien l, eller ock, att detsamma alltid eger rum, när ξ är en punkt belägen mellan origo och en viss gifven punkt ξ_n, men deremot icke längre fortbestår, då ξ är belägen längre bort från origo än ξ_n. Om det förra förhållandet inträffar, är $F(x)$ en hel transcendent funktion af variabeln x, och kan alltid i sin helhet framställas genom en beständigt konvergerande potensserie $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(0)\frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}$. Vi lemna detta fall helt och hållet å sido samt sysselsätta oss endast med sådana funktioner, för hvilka ξ_n är en punkt inom ändligt område.

Låt oss nu med C_n förstå det af ett enda stycke bestående kontinuum, som utgör sammanfattningen af alla linier l från origo och till och med $n\xi_n$. De finnes uppenbarligen en gren:

$$FC_n(x)$$

af den analytiska funktionen $F(x)$, hvilken är sådan att:

$$\left(\frac{d^\mu FC_n(x)}{dx^\mu}\right)_{x=0} = F^{(\mu)}(0)\,; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots \infty.$$

Denna gren framställes för hvarje ställe x, hvilket är beläget inom C_n genom den n-faldiga serien:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}C_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1} \cdots \underline{|\lambda_n}}.$$

Om denna serie gäller, när vi sätta

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{d^\mu FC_n(z)}{dz^\mu} = F^{(\mu)}(z),$$

att hvar och en af serierna:

$$(4)\left\{\begin{array}{ll}
FC_n(x) = F(n\xi) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} F^{(\lambda_1)}((n-1)\xi)\frac{\xi^{\lambda_1}}{|\underline{\lambda_1}} & \\
F^{(\lambda_1)}((n-1)\xi) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}((n-2)\xi)\frac{\xi^{\lambda_2}}{|\underline{\lambda_2}}; & \lambda_1=0, 1, 2, \ldots \infty \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-2})}(2\xi) = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})}(\xi)\frac{\xi^{\lambda_{n-1}}}{|\underline{\lambda_{n-1}}}; & \lambda_1=0, 1, 2, \ldots \infty \;\cdots\cdots\; \lambda_{n-2}=0, 1, 2, \ldots \infty \\
F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})}(\xi) = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(0)\frac{\xi^{\lambda_n}}{|\underline{\lambda_n}}; & \lambda_1=0, 1, 2, \ldots \infty \;\cdots\cdots\; \lambda_{n-1}=0, 1, 2, \ldots \infty
\end{array}\right.$$

der

$$\xi = \frac{x}{n}$$

konvergerar för hvarje ställe x inom C_n.

Det synes ändamålsenligt att införa följande definition på *konvergens* samt på *likformig konvergens* för en n-faldig serie.

Om det gäller om en n-faldig serie:

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots\cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

der $f_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$ äro funktioner af vissa variabler, att för ett visst ställe inom området för dessa variabler samtliga serier:

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

$$f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}} = \sum_{\lambda_n=1}^{\infty} f_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1}$$

hvar för sig äro konvergenta, så säges den n-faldiga serien f vara **konvergent för detta ställe.**

Om det dessutom gäller, att samtliga serier

$$f_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}, \; f_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}}, \; \ldots f_{\lambda_1}, \; f,$$

då variablerna äro begränsade till ett visst inom området för desamma beläget gebit B, för detta gebit äro likformigt konvergenta, så säges den n-faldiga serien vara **likformigt konvergent för gebitet** B.

»Serien $\mathfrak{P}C_n(x)$ är således för hvarje ställe x inom C_n en konvergerande serie». Vi vilja bevisa, »att densamma dessutom för hvarje område inom C_n är en likformigt konvergerande serie».

Låt oss med θ förstå en positiv qvantitet mindre än ett.

Låt oss vidare å hvarje linie l afsätta ett ställe ϱ, sådant att:

$$(5) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\varrho}{\xi_n} = \theta .$$

Låt oss med $\overline{C}_n$ beteckna sammanfattningen för alla olika l af alla ställen från origo till $n\varrho$.

Genom att välja θ tillräckligt nära ett, kunna vi alltid åstadkomma, att $\overline{C}_n$ omsluter hvarje gifvet inom C_n beläget område.

Låt oss nu tänka oss, att våra n-cirklar med radien ξ och medelpunkterna 0, ξ, 2ξ, ... $(n-1)\xi$ rotera ett hvarf kring origo, och att härvid för hvarje l

$$(6) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\xi}{\varrho} \leqq 1 .$$

Låt C'_n utgöra sammanfattningen af alla olika ställen, hvilka tillhöra våra cirklar. Området C' innefattar alltid området $\overline{C}_n$ och det finnes en gren $FC'_n(x)$ hvilken för området $\overline{C}_n$ sammanfaller med $FC_n(x)$, samt hvilken, såväl i det inre som å begränsningen af C' förhåller sig entydig och regulär. Det finnes således alltid en ändlig öfre gräns för $|FC'_n(x)|$ när x tillhör C'. Vi beteckna denna gräns med g.

Man har:

$$(7) \quad . \; . \; . \quad FC_n(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}((n-1)\xi) \frac{(z-(n-1)\xi)^{\mu}}{\underline{|\mu}}$$

$$\text{för } |z-(n-1)\xi| \leqq |\varrho| .$$

Således på grund af WEIERSTRASS [1]) bekanta teorem:

$$\frac{1}{\underline{|\mu}} | F^{(\mu)}((n-1)\xi) | \leqq g |\varrho|^{-\mu} .$$

Låt oss nu fastställa ett nytt tal α mindre än ett, samt å hvarje linie l afsätta en qvantitet ϱ_1 sådan att

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = \alpha .$$

Om vi nu välja ξ sådan att

$$(9) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{\xi}{\varrho_1} \leqq 1 ,$$

så erhålles:

$$(10) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{1}{\underline{|\mu}} | F^{(\mu)}((n-1)\xi)\xi^{\mu} | \leqq g\alpha^{\mu} ,$$

hvilken likhet under förutsättningarne (6), (8) och (9) samt med den betydelse vi gifvit åt g gäller för hvarje linie l.

Låt oss med C_n^{α} beteckna sammanfattningen för alla l af alla ställen från origo till $n\varrho_1$. Genom att välja α tillräckligt nära ett, kunna vi alltid åstadkomma, att C_n^{α} huru nära som helst ansluter sig till $\overline{C}_n$.

---

[1]) »Zur Theorie der Potenzreihen». Werke Bd. 1.

Vi ha bevisat, att för hela området C_n^α:

$$(11) \quad \frac{1}{\mu}\left|F^{(\mu)}\left((n-1)\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n}\right)^\mu\right| \leqq g\alpha^\mu .$$

Om vi således sätta:

$$(12) \quad \begin{cases} FC_n(x) = \sum_{\mu=0}^{m} F^{(\mu)}\left((n-1)\frac{x}{n}\right)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^\mu}{\underline{|\mu}} + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} F^{(\mu)}\left((n-1)\frac{x}{n}\right)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^\mu}{\underline{|\mu}} \end{cases}$$

så gäller, att för hela området C_n^α

$$(13) \quad |\varepsilon_1| \leqq g\alpha^{m+1}\frac{1}{1-\alpha} .$$

Om nu m väljes tillräckligt stor, sjunker $\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}$ och härmed äfven $g\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}$ under hvarje gräns.

Om åter θ och α väljas tillräckligt nära ett, omsluter C_n^α hvarje inom C_n beläget område.

Vi ha härmed bevisat, att den första af våra serier (4)

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} F^{(\lambda_1)}\left((n-1)\frac{x}{n}\right)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1}}{\underline{|\lambda_1}}$$

för hvarje inom C_n beläget område är likformigt konvergent.

Om vi nu beakta, att hvarje derivata af $FC_n'(x)$ likaväl som $FC_n'(x)$ för området C_n' är entydig och regulär, så inses utan vidare, att samtliga serier (4) för hvarje inom C_n beläget område äro likformigt konvergenta.

Härmed ha vi erhållit följande teorem:

A. »Grenen $FC_n(x)$ af den analytiska funktionen $F(x)$ framställes för hvarje ställe inom området C_n genom den n-faldiga serien $\mathfrak{P}C(x)$. Denna serie, som konvergerar för hvarje ställe inom C_n, är dessutom för hvarje inom C_n beläget område en likformigt konvergerande serie.»

Låt oss nu, hvilket alltid är möjligt, sätta

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}C_n(x) = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{m}\sum\limits_{\lambda_2=0}^{m_1}\cdots\sum\limits_{\lambda_n=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(0)\dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_n}} + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \\ \varepsilon_1 = \sum\limits_{\lambda_1=m+1}^{\infty} F^{(\lambda_1)}\left((n-1)\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1}}{\underline{|\lambda_1}} \\ \varepsilon_2 = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{m}\sum\limits_{\lambda_2=m_1+1}^{\infty} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}\left((n-2)\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}}{\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{m}\sum\limits_{\lambda_2=0}^{m_1}\cdots\sum\limits_{\lambda_{n-1}=0}^{m_{n-2}}\;\sum\limits_{\lambda_n=m_{n-1}+1}^{\infty} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(0)\dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_n}}. \end{cases}$$

Det följer omedelbart af den likformiga konvergensen af serierna (4), att talen $m\ m_1 \ldots m_{n-1}$ alltid och på mångfaldigt sätt kunna väljas så, att hvart och ett af de absoluta beloppen $|\varepsilon_1| \ldots |\varepsilon_n|$ för hvarje gifvet inom C_n beläget område sjunker under hvarje gifven gräns.

Således:

B. »Låt C vara ett område, hvilket som helst inom C_n, och låt δ vara en godtycklig positiv qvantitet.

Man kan alltid, och på mångfaldigt sätt, bilda en hel rationel funktion af x, $g_n(x)$, som är sådan, att absoluta beloppet för differensen

$$FC_n(x) - g_n(x)$$

för området C är mindre än δ.

Man kan härvid alltid åt $g_n(x)$ gifva formen:

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m}\sum_{\lambda_2=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_n}}.»$$

Låt oss nu på följande sätt definiera ett nytt område X uti x-planet. Om man från origo längs en linie l fortsätter potensserien:

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}C_1(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(0) \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}$$

kan det inträffa, att hvarje punkt å l kan inryckas inom en af de analytiska fortsättningarne af $\mathfrak{P}(x)$, men det kan också hända, att man träffar en första punkt, som icke kan inryckas inom någon dylik analytisk fortsättning. Vi betrakta då den del af l, som från denna punkt sträcker sig mot ∞, som en skärning — »coupure» — af x-planet. Den del af x-planet, hvilken återstår, sedan alla dylika skärningar uteslutits, betecknas i det följande med X.

Låt nu $\overline{X}$ vara ett ändligt kontinuum, hvilket som helst inom X. Man kan alltid finna ett positivt helt tal $\bar{n}$ så stort, att området C_n innefattar $\overline{X}$ så snart $n \geqq \bar{n}$. Ett dylikt värde på $\bar{n}$ kan erhållas på följande sätt. Man kan alltid innesluta $\overline{X}$ inom ett annat ändligt område X', som faller helt och hållet inom X, och som begränsas af den linie, hvilken erhålles, då man å hvarje linie l afsätter en punkt längre aflägsen från origo än den längst bort belägna punkt, der l träffar $\overline{X}$. Låt ϱ vara undre gränsen för afståndet mellan en punkt på begränsningen af X' och en punkt på begränsningen af X och låt R vara längsta afståndet från origo till en punkt på begränsningen af X'. I hvarje fall eger nu rum, att C_n omsluter X' och härmed också $\overline{X}$ för $n \geqq \bar{n}$ om man väljer $\bar{n}$ så stort att

$$\frac{R}{\bar{n}} < \varrho .$$

Härmed ha vi erhållit följande nya teorem:

C. »Låt $\overline{X}$ vara ett ändligt kontinuum, hvilket som helst inom X. Det finnes alltid ett motsvarigt positivt helt tal $\bar{n}$, sådant att likheten

$$FX(x) = \mathfrak{P}C_n(x)$$

så snart

$$n \geqq \bar{n}$$

eger rum för hela området $\overline{X}$, eller att hvar och en af serierna

$$\mathfrak{P}C_n(x)\,;\; n = \bar{n}\,,\; \bar{n}+1\,,\,\ldots\infty$$

för området $\overline{X}$ framställer grenen $FX(x)$.»

Vidare följer som corallarium ur teorem B.

D. »Låt $\overline{X}$ vara ett område, hvilket som helst inom X, och låt δ vara en godtycklig positiv qvantitet.

Man kan alltid och på mångfaldigt sätt bilda en hel rationel funktion af x, $\mathfrak{g}_n(x)$, som är sådan, att absoluta beloppet för differensen

$$FX(x) - \mathfrak{g}_n(x)$$

för området $\overline{X}$ är mindre än δ.

Man kan härvid alltid åt $\mathfrak{g}_n(x)$ gifva formen:

$$\mathfrak{g}_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m}\sum_{\lambda_2=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}(0)\,\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\cdots\underline{|\lambda_n}}\,.\text{»}$$

Grenen $FC_n(x)$ framställes inom området C genom den n-faldiga serien $\mathfrak{P}C_n(x)$.

Af teorem B kan ännu en annan framställning härledas för $FC_n(x)$. Af detta teorem följer nemligen att $FC_n(x)$ inom området C_n kan framställas genom en enkelserie, hvars enskilta termer äro hela rationella funktioner af x.

För att härleda denna sats begagna vi ett slutsätt, som vid liknande tillfälle blifvit användt af WEIERSTRASS.[1]) Låt oss nemligen fastställa dels en oändlig serie af positiva tal:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots < 1\,;\quad \nu = 0,\,1,\,2,\,\ldots\infty$$

---

[1]) »Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einen reellen Veränderlichen. Erste Mittheilung.» Math. und Naturw. Mit. Sitzb. Königl. Preuss. Ak. Wiss. Berlin. 1885. Pag. 325.

sådan att differensen $1 - \alpha_\nu$ med växande ν sjunker under hvarje gräns, och dels en annan serie af positiva tal

$$\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_\nu \ldots$$

sådan att

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu$$

är konvergent.

Låt oss härefter bilda områdena

$$C_n^{\alpha_0}\, C_n^{\alpha_1} \ldots C_n^{\alpha_\nu} \ldots$$

vid hvilka alltid

$$\theta = \alpha\,.$$

Hvarje efterföljande af dessa områden innesluter i följd af definitionen hvarje föregående. Genom att öka ν kan vidare området $C_n^{\alpha_\nu}$ bringas att ansluta sig huru nära som helst till området C_n eller att omfatta hvarje inom C_n beläget ställe.

I följd af teorem C svarar alltid mot talen $\delta_\nu\, \alpha_\nu$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ en hel rationel funktion af x låt vara $g_n^{(\nu)}(x)$, sådan att

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad |FC_n(x) - g_n^{(\nu)}(x)| < \delta_\nu\,,$$

då x tillhör området $C_n^{\alpha_\nu}$.

Låt oss nu sätta:

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} f_0(x) = g_n^{(0)}(x) \\ f_\nu(x) = g_n^{(\nu)}(x) - g_n^{(\nu-1)}(x)\,; \; \nu = 1,\, 2,\, \ldots \infty \end{cases}$$

hvaraf följer:

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{\nu=0}^{\mu} f_\nu(x) = g_n^{(\mu)}(x)$$

och således på grund af (15):

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad FC_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

en likhet, som gäller för hvarje ställe x, inom C_n.

Vi ha på grund af (15)

$$|FC_n(x) - g_n^{(\mu+1)}(x)| < \delta_{\mu+1}$$

$$|FC_n(x) - g_n^{(\mu)}(x)| < \delta_\mu$$

då x tillhör området $C_n^{\alpha_\mu}$. Således på grund af (17)

$$|f_\mu(x)| < \delta_\mu + \delta_{\mu+1}$$

så snart x tillhör $C_n^{\alpha_\mu}$.

Serien:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

hvilken konvergerar för hvarje ställe x inom C_n är således likformigt konvergent för hvarje inom C_n beläget område C.

E. »Låt C_n vara ett sådant område som vi i det föregående definierat. Man kan alltid och på mångfaldigt sätt bilda en rad af hela rationella funktioner af variabeln x

$$f_0(x), f_1(x), \ldots f_\nu(x), \ldots,$$

af hvilka hvar och en utgör en summa af termer utaf formen

$$F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_n}}; \qquad \begin{array}{l}\lambda_1=0, 1, 2, \ldots \infty \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n=0, 1, 2, \ldots \infty\end{array}$$

och som dessutom ha följande egenskap.

Serien

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

konvergerar likformigt för hvarje inom C_n beläget område.

Likheten

$$FC_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

eger vidare rum för hvarje ställe inom området C_n.»

Låt oss nu bilda områdena:

$$C_1^{\alpha_1}\, C_2^{\alpha_2} \ldots C_n^{\alpha_n} \ldots$$

vid hvilka alltid

$$\theta = \acute{\alpha}\,.$$

Äfven här innesluter hvarje efterföljande område hvarje föregående. Genom att öka n kan man vidare bringa $C_n^{\alpha_n}$ att omfatta hvarje inom x beläget ställe.

I följd af teorem D svarar alltid mot talen δ_n, α_n; $n=1, 2, \ldots$ en hel rationel funktion af x, låt vara $\mathfrak{g}_n(x)$, sådan att

$$| FX(x) - \mathfrak{g}_n(x) | < \delta_n$$

då x tillhör området $C_n^{\alpha_n}$.

Vi sätta nu

$$\mathfrak{f}_0(x) = \mathfrak{g}_0(x) = F(0)$$
$$\mathfrak{f}_\nu(x) = \mathfrak{g}_\nu(x) - \mathfrak{g}_{\nu-1}(x)\,;\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots$$

och härleda sedan, på samma sätt som vid teorem E, dels att

$$FX(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(x)$$

för hvarje inom x beläget ställe, och dels att serien

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(x)$$

konvergerar likformigt för hvarje område inom X.

Vi ha således erhållit följande teorem.

F. »Låt X vara ett sådant område, som vi i det föregående definierat.

Man kan alltid och på mångfaldigt sätt bilda en rad af hela rationella funktioner:

$$\mathfrak{f}_\nu(x)\,;\ \nu = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

sådana, att $\mathfrak{f}_\nu(x)$ är en summa af termer utaf formen:

$$F^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_\nu)}(0)\frac{\left(\frac{x}{\nu}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_\nu}}{|\underline{\lambda_1}\ldots|\underline{\lambda_\nu}}; \qquad \begin{array}{l}\lambda_1=0,1,2\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_\nu=0,1,2\ldots\ldots\end{array}$$

och som dessutom ha följande egenskap.

Serien

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(x)$$

konvergerar likformigt för hvarje inom X beläget område.

Likheten

$$FX(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{f}_n(x)$$

eger rum för hvarje inom området X beläget ställe.»

Att grenen $FC_n(x)$ eller den allmännare grenen $FX(x)$ kan framställas genom en serie, hvars enskildta termer äro hela rationella funktioner af variabeln x, följer utan svårighet af CAUCHY's integralsats, om man begagnar den eleganta metod, som blifvit framställd af Herr RUNGE.[1]) Koefficienterna till de olika funktionerna $f_\nu(x)$ eller $\mathfrak{f}_\nu(x)$ blifva emellertid, då man följer denna metod uttryckta uti de värden, som $FX(x)$ antager, uti ett öfver hvarje gräns växande antal af punkter, som äro belägna i närheten af gränsen till området X.

Det väsendtliga i våra teorem är deremot, att dessa koefficienter äro uttryckta uti de värden $F^{(\mu)}(0)$; $\mu=0, 1, 2, \ldots$, som $FX(x)$ och dess derivator antaga uti den ena punkten $x=0$. Hvar och en af funktionerna $f_\nu(x)$ eller $\mathfrak{f}_\nu(x)$ är nemligen en ändlig summa:

$$\sum c_\mu F^{(\mu)}(0)x^\mu$$

i hvilken c_μ äro efter en enkel lag bildade rationella talkoefficienter.

[1]) »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.» Acta Mathematica. Bd. 6.

Då åter den WEIERSTRASS'iska teorien för de analytiska funktionerna är väsendtligen uppbygd på det förhållande, att hvarje analytisk funktion $F(x)$ är i sin helhet entydigt och fullständigt definierad genom angifvande af alla värden i raden

$$F(0)\, F'(0) \dots F^{(\mu)}(0) \dots$$

synas våra teorem böra utgöra ett väsendtligt moment inom denna teori.

För att verkligen framställa funktionerna $f_\nu(x)$ eller $\mathfrak{f}_\nu(x)$, behöfver man emellertid känna en undre gräns för talen $m\, m_1 \dots m_{n-1}$, hvilken åter icke kan erhållas utan föregående kännedom af öfre gränsen för absoluta beloppet för $FX(x)$ och ett antal af dess derivator för ett visst område.

Om vi emellertid, enligt teorem A och C, framställa $FX(x)$ genom potensserien $\mathfrak{P}C_n(x)$, hvilken för $n=1$ öfvergår i den vanliga potensserien, som af WEIERSTRASS betecknas med $\mathfrak{P}(x)$, så erfordras ingen annan kännedom om funktionen $F(x)$ än kännedom om alla element i raden

$$F(0)\, F'(0) \dots F^{(\mu)}(0) \dots .$$

I konstruktionen af potensserien $\mathfrak{P}C_n(x)$ ingå inga andra element från funktionen $F(x)$ än $F^{(\mu)}(0)$; $\mu=0, 1, 2, \dots$.

Kan detsamma ernås äfven för våra serier i teoremen E och F?

Vi vilja i nästa meddelande uppvisa, att detta är fallet.

Innan vi öfvergå härtill, vilja vi dock till besvarande upptaga följande fråga.

Serien $\mathfrak{P}C_n(x)$ är likformigt konvergent för hvarje område inom C_n. När $n=1$ gäller dessutom, att om serien konvergerar för ett visst ställe x, tillhör detta antingen det inre eller begränsningen af C_1. Kan denna sista sats upprätthållas äfven för $n>1$?

Låt oss antaga, att $\mathfrak{P}C_n(x)$ konvergerar för $x=x'$. Låt oss lägga en linie l genom origo och x' och välja en punkt ξ' på l, sådan att

$$n\xi' = x' .$$

Låt oss vidare upprita en serie af n-cirklar, af hvilka den $(\nu + 1)$:sta $(\nu = 0, 1, 2 \ldots n - 1)$ har $\nu\xi'$ till medelpunkt och går genom $(\nu + 1)\xi'$. Vi benämna för korthetens skull det område, som utgör sammanfattningen af alla olika punkter, som tillhöra dessa n-cirklar området ξ'. Låt nu ξ vara en ny punkt på l, sådan att

$$\frac{\xi}{\xi'} < 1$$

och låt oss bilda ett nytt område, som består af alla olika punkter, som tillhöra n-cirklar, sådana att periferien till den $(\nu + 1)$:sta går genom $(\nu + 1)\xi$ och har $\nu\xi$ till medelpunkt, och låt oss kalla detta område, området ξ.

Om nu x' tillhör C_n dess inre eller begränsning, måste området ξ motsvaras af en gren af $F(x)$, som för hela området förhåller sig entydig och regulär, samt för hvilken

$$\left(\frac{d^{(\mu)}F(x)}{dx_\mu}\right)_{x=0} = F^{(\mu)}(0)\,; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Finnes deremot icke en dylik gren för alla områden ξ, vid hvilka $\frac{\xi}{\xi'} < 1$, så ligger x', enligt definitionen på C_n, nödvändigt utanföre C_n. För att en dylik gren alltid skall finnas, erfordras uppenbarligen, att minsta afståndet mellan punkten $(n - 1)\xi$ och begränsningen af området ξ' är större än ξ. Kan deremot detta afstånd för vissa värden på ξ, som uppfylla villkoret

$$\frac{\xi}{\xi'} < 1$$

vara mindre än ξ, så är det lätt att bilda funktioner, för hvilka, ehuru $\mathfrak{P}C_n(x')$ konvergerar, för dessa värden på ξ icke längre finnes en för hela området ξ entydig och regulär gren.

Nu är åter minsta afståndet mellan $(n - 1)\xi$ och begränsningen till området ξ' alltid större än ξ, så snart $n = 1, 2, 3$, hvaremot, så snart $n > 3$ alltid finnas värden på ξ, för hvilka detta minsta afstånd är mindre än ξ.

Således:

G. »Om serien $\mathfrak{P}C_n(x)$ konvergerar för ett visst ställe x', tillhör detta ställe nödvändigt vare sig begränsningen eller det inre af området C_n, så snart $n = 1, 2, 3$.

Om deremot $n > 3$, finnas sådana funktioner $F(x)$, för hvilka $\mathfrak{P}C_n(x)$ konvergerar äfven för ställen, som äro belägna utanför området C_n.»

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 180.

Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion.

Andra meddelande.

Af G. MITTAG-LEFFLER.

(Meddeladt den 11 Maj 1898.)

I teorem E i vårt förra meddelande ha vi erhållit, att grenen $FC_n(x)$ alltid kan analytiskt uttryckas genom en serie:

$$(1) \quad FC_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x),$$

hvilken är likformigt konvergent för hvarje inom C_n beläget område, och vid hvilken funktionerna $f_\nu(x)$ äro hela rationella funktioner utaf formen:

$$(2) \quad f_\nu(x) = \sum_{\mu} c_\mu^{(\nu)} F^{(\mu)}(0) x^\mu ,$$

och $c_\mu^{(\nu)}$ äro rationella talkoefficienter.

I teorem F ha vi dessutom erhållit att äfven grenen $FX(x)$ alltid kan analytiskt uttryckas genom en serie:

$$(3) \quad FX(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{f}_\nu(x)$$

hvilken är likformigt konvergent för hvarje inom X beläget område, och vid hvilken funktionerna $\mathfrak{f}_\nu(x)$ äro hela rationella funktioner:

$$(4) \quad \mathfrak{f}_\nu(x) = \sum_{\mu} \mathfrak{c}_\mu^{(\nu)} F^{(\mu)}(0) x^\mu$$

der $\mathfrak{c}_\mu^{(\nu)}$ äro rationella talkoefficienter.

För $n = 1$, erhålles ur formel (1):

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & FC_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) \\ & f_\nu(x) = \sum_{\mu} c_\mu^{(\nu)} F^{(\mu)}(0) x^\mu = c^{(\nu)} F^{(\nu)}(0) x^\nu \\ & c^{(\nu)} = \frac{1}{\lfloor \nu}. \end{aligned} \right.$$

Konstanterna $c_\mu^{(\nu)}$ äro således i detta fall, då $n = 1$, invarianta i förhållande till funktionen $F(x)$, de äro desamma för hvarje funktion $F(x)$.

Vi vilja i detta andra meddelande uppvisa, huruledes denna fundamentala egenskap kan bringas att fortbestå, såväl för konstanterna $c_\mu^{(\nu)}$ vid ett n, hvilket som helst, som äfven för konstanterna $\mathfrak{c}_\mu^{(\nu)}$.

Vi ha i vårt första meddelande härledt:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\lfloor \mu} | F^{(\mu)}((n-1)\xi)\xi^\mu | \leqq g\alpha^\mu \qquad \text{(c. f. formel (10))} \\ & \text{hvarvid} \\ & \frac{\varrho}{\xi_n} = \theta < 1, \quad \frac{\varrho_1}{\varrho} = \alpha < 1, \quad \frac{\xi}{\varrho_1} \leqq 1 \\ & \qquad \text{(c. f. formlerna (9), (8), (5))} \end{aligned} \right.$$

samt

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & FC_n(x) = \sum_{\mu=0}^{m} F^{(\mu)}((n-1)\xi) \frac{\xi^\mu}{\lfloor \mu} + \varepsilon_1 \\ & \varepsilon_1 = \sum_{\mu=m+1}^{\infty} F^{(\mu)}((n-1)\xi) \frac{\xi^\mu}{\lfloor \mu} \\ & | \varepsilon_1 | \leqq g\alpha^{m+1} \frac{1}{1-\alpha} \\ & \xi = \frac{x}{n}. \end{aligned} \right.$$

Nu är

$$(8) \quad \begin{cases} FC_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(z_1) \dfrac{(z - z_1)^\mu}{\underline{|\mu}}, \\ \text{om } |z_1 - (n-2)\xi| \leqq \varrho_1 |;\ |z - z_1| \leqq |\varrho - \varrho_1|. \end{cases}$$

Således på grund af WEIERSTRASS [1]) teorem:

$$\frac{1}{\underline{|\mu}} | F^{(\mu)}(z_1) | \leqq g | \varrho - \varrho_1 |^{-\mu}.$$

Således

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\underline{|\mu}} | F^{(\mu)}(z_1)(z_1 - (n-2)\xi)^\mu | \leqq g\left(\dfrac{\varrho_1}{\varrho - \varrho_1}\right)^\mu = g\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^\mu \\ \qquad \text{då } | z_1 - (n-2)\xi | \leqq | \varrho_1 |. \end{cases}$$

Nu är:

$$F^{(\mu)}(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi) \frac{(z_1 - (n-2)\xi)^\nu}{\underline{|\nu}}$$

och således:

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(z_1)(z_1 - (n-2)\xi)^\mu = \\ = \sum_{\nu=0}^{\infty} F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi) \dfrac{(z_1 - (n-2)\xi)^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}}. \end{cases}$$

Således på grund af (9) samt i följd af WEIERSTRASS [1]) teorem:

$$(11) \quad \frac{1}{\underline{|\mu}} \cdot \frac{1}{\underline{|\nu}} | F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi) | \leqq g\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^\mu | \varrho_1 |^{-\mu-\nu}$$

Låt oss nu till hvarje ξ_n utom ϱ och ϱ_1 adjungera en ny qvantitet ϱ_2, sådan att:

$$(12) \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \alpha$$

samt låt oss välja ξ, så att

$$(13) \quad \frac{\xi}{\varrho_2} \leqq 1.$$

---

[1]) »Zur Theorie der Potenzreihen.»

Då blir:

$$(14) \quad . \; . \; . \; \frac{1}{\underline{|\mu}} \cdot \frac{1}{\underline{|\nu}} \left| F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi)\xi^{\mu+\nu} \right| \leqq g \frac{\alpha^{2\mu+\nu}}{(1-\alpha)^{\mu}} .$$

Således:

$$(15) \quad . \; . \; . \; . \; FC_{\mu}(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{m_1} F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi) \frac{\xi^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

hvarest:

$$(16) \quad . \; . \; . \; . \; \begin{cases} \varepsilon_1 = \displaystyle\sum_{\mu=m+1}^{\infty} F^{(\mu)}((n-1)\xi) \frac{\xi^{\mu}}{\underline{|\mu}} \\ \varepsilon_2 = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=m_1+1}^{\infty} F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi) \frac{\xi^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \end{cases}$$

samt

$$(17) \quad . \; . \; . \; \begin{cases} |\varepsilon_1| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \\ |\varepsilon_2| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1}}{(1-\alpha)^m} . \end{cases}$$

Låt oss nu uti (15) ytterligare transformera $F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi)$ genom formlerna:

$$(18) \begin{cases} FC_n(x) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(z_1) \frac{(z-z_1)^{\mu}}{\underline{|\mu}} \text{ der } |z_2-(n-3)\xi| \leqq |\varrho_2|; \\ \qquad |z_1-z_2| \leqq |\varrho_1-\varrho_2|; \; |z-z_1| \leqq |\varrho-\varrho_1| \end{cases}$$

samt

$$(19) \begin{cases} \dfrac{1}{\underline{|\mu}} \left| F^{(\mu)}(z_1)(z_1-z_2)^{\mu} \right| \leqq g \left(\dfrac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho-\varrho_1} \right)^{\mu} \\ \dfrac{1}{\mu} F^{(\mu)}(z_1)(z_1-z_2)^{\mu} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} F^{(\mu+\nu)}(z_2) \frac{(z_1-z_2)^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \\ \dfrac{1}{\underline{|\mu}} \cdot \dfrac{1}{\underline{|\nu}} \left| F^{(\mu+\nu)}(z_2)(z_2-(n-3)\xi)^{\mu+\nu} \right| \leqq g \left(\dfrac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho-\varrho_1} \right)^{\mu} \left(\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_2} \right)^{\mu+\nu} = \\ \qquad = g \dfrac{\alpha^{2\mu+\nu}}{(1-\alpha)^{\mu+\nu}} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\underline{|\mu}} \cdot \dfrac{1}{\underline{|\nu}} F^{(\mu+\nu)}(z_2)(z_2 - (n-3)\xi)^{\mu+\nu} = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\infty} F^{(\mu+\nu+\lambda)}((n-3)\xi) \frac{(z_2-(n-3)\xi)^{\mu+\nu+\lambda}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}\,\underline{|\lambda}} \\ \qquad\qquad \dfrac{\varrho_3}{\varrho_2} = \alpha \quad \dfrac{\xi}{\varrho_3} \leqq 1 \\ \dfrac{1}{\underline{|\mu}} \cdot \dfrac{1}{\underline{|\nu}} \cdot \dfrac{1}{\underline{|\lambda}} \left| F^{(\mu+\nu+\lambda)}((n-3)\xi)\xi^{\mu+\nu+\lambda} \right| \leqq g \dfrac{\alpha^{3\mu+2\nu+\lambda}}{(1-\alpha)^{\mu+\nu}} \end{array}\right.$$

och vi erhålla:

$$(20) \qquad FC_n(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{m_1} \sum_{\lambda=0}^{m_2} F^{(\mu+\nu+\lambda)}(0) \frac{\xi^{\mu+\nu+\lambda}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}\,\underline{|\lambda}} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

hvarest:

$$(21) \quad \xi = \frac{x}{n}; \quad \frac{\xi}{\varrho_3} \leqq 1; \quad \frac{\varrho_3}{\varrho_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \alpha < 1; \quad \frac{\xi_n}{\varrho} = \theta < 1$$

$$(22) \ldots \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \displaystyle\sum_{\mu=m+1}^{\infty} F^{(\mu)}((n-1)\xi) \frac{\xi^{\mu}}{\underline{|\mu}} \\ \varepsilon_2 = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=m_1+1}^{\infty} F^{(\mu+\nu)}((n-2)\xi) \frac{\xi^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \\ \varepsilon_3 = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{m_1} \sum_{\lambda=m_2+1}^{\infty} F^{(\mu+\nu+\lambda)}((n-3)\xi) \frac{\xi^{\mu+\nu+\lambda}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}\,\underline{|\lambda}} \end{array}\right.$$

samt:

$$(23) \left\{\begin{array}{l} |\varepsilon_1| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \\ |\varepsilon_2| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1}}{(1-\alpha)^m} \\ |\varepsilon_3| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1}}{(1-\alpha)^m} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1+\;{}_2}}{(1-\alpha)^{m_1}}. \end{array}\right.$$

Vi upprepa nu ytterligare samma tillvägagående för $F^{(\mu+\nu+\lambda)}((n-3)\xi)$ etc., och komma då slutligen till följande formelsystem:

$$
(24) \begin{cases} FC_n(x) = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\lambda_{n+1}=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})} \frac{\xi^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}\cdots\underline{|\lambda_{n-1}}} + \\ \qquad + \varepsilon_1 + \varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_n \end{cases}
$$

$$
(25) \quad \xi = \frac{x}{n}; \quad \frac{\xi}{\varrho_n} \leqq 1; \quad \frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = \frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_{n-2}} = \cdots = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \alpha < 1; \quad \frac{\varrho}{\xi_n} = \theta < 1
$$

$$
(26) \begin{cases} \varepsilon_1 = \displaystyle\sum_{\lambda=m+1}^{\infty} F^{(\lambda)}((n-1)\xi) \frac{\xi^\lambda}{\underline{|\lambda}} \\ \varepsilon_2 = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} F^{(\lambda+\lambda_1)}((n-2)\xi) \frac{\xi^{\lambda+\lambda_1}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\lambda_{n-1}=m_{n-1}+1}^{\infty} F^{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})}(0) \frac{\xi^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}\cdots\underline{|\lambda_{n-1}}} \end{cases}
$$

$$
(27) \begin{cases} |\varepsilon_1| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \\ |\varepsilon_2| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1}}{(1-\alpha)^m} \\ |\varepsilon_3| \leqq g \dfrac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1}}{(1-\alpha)^m} \cdot \\ \qquad \cdot \dfrac{\alpha^{m+m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

$$|\varepsilon_n| \leqq g \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^n}\right)^{m+1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^n}} \cdots \frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_{n-2}+1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}} \cdot$$
$$\cdot \frac{\alpha^{m+m_1}}{(1-\alpha)^m} \cdot \frac{\alpha^{m+m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}} \cdots \frac{\alpha^{m+m_1+\ldots+m_{n-1}}}{(1-\alpha)^{m_{n-2}}} .$$

Qvantiteterna α och θ äro positiva qvantiteter mindre än ett. Qvantiteten g är en positiv qvantitet, som då funktionen $F(x)$ är gifven, är bestämd i och med θ.

Qvantiteten g var nemligen, då vi begagna samma beteckningssätt som i första meddelandet, öfre gränsen för $|FC'_n(x)|$, när x genomlöper det af $\overline{C}_n$ bildade området C'_n.

Talen $m\, m_1 \ldots m_{n-1}$ äro alla positiva hela tal.

Genom att välja θ och α tillräckligt nära ett, kan man alltid åstadkomma, att det område för x, hvilket karakteriseras genom (25), och hvilket vi i analogi med det beteckningssätt, hvilket vi begagnat i vårt första meddelande, kunna beteckna med $C_n^{\alpha^n}$, huru nära som helst ansluter sig till området C_n.

Genom att icke blott välja θ och α nära ett utan äfven öka n, kan man dessutom åstadkomma, att $C_n^{\alpha^n}$ omfattar hvarje ändligt inom X beläget område.

Med dessa anmärkningar till utgångspunkt är det lätt, att medelst (27) härleda framställningsformler, vid hvilka de i (2) och (4) förekommande konstanterna $c_\mu^{(\nu)}$ och $\mathfrak{c}_\mu^{(\nu)}$ blifva invarianta i afseende på funktionen $F(x)$.

Välj nemligen m udda och sätt:

$$m + 1 = 2\mathfrak{m} .$$

Likheten

$$(28) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1-\alpha = \alpha^{\mathfrak{m}}$$

har en rot α som är ett positivt tal mindre än ett. Genom att öka $\mathfrak{m}$ kan man bringa denna rot att blifva belägen huru nära ett som helst. Genom att öka $\mathfrak{m}$ kan man således åstadkomma, att

$$\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} = 1-\alpha$$

sjunker under hvarje gräns.

Låt oss nu genom rekursionsformlerna:

$$(29) \quad \begin{cases} m + 1 = 2\mathfrak{m} \\ m + m_1 = m \cdot \mathfrak{m} \\ m + m_1 + m_2 = m_1 \cdot \mathfrak{m} \\ m + m_1 + m_2 + m_3 = m_2 \cdot \mathfrak{m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ m + m_1 + \dots + m_{n-2} + m_{n-1} = m_{n-2} \cdot \mathfrak{m} \end{cases}$$

uttrycka talen $m\, m_1 \dots m_{n-1}$ uti ett och samma tal $\mathfrak{m}$, och låt oss uti (27) införa den positiva roten till (28).

Man erhåller härigenom:

$$(30) \begin{cases} |\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n| \leqq g(1-\alpha)\left\{1 + \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} + \right. \\ \quad + \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} + \dots \\ \quad \left. + \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^n}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^n}} \cdots \dfrac{1-\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_{n-2}+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \right\} \\ < g(1-\alpha)\left\{1 + \dfrac{1}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} + \right. \\ \quad + \dfrac{1}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^3}} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} + \\ \quad \left. + \dots + \dfrac{1}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^n}} \cdots \dfrac{1}{1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}} \right\} \\ < g(1-\alpha) \dfrac{n}{\left(1-\dfrac{1-\alpha}{\alpha^n}\right)^{n-1}}. \end{cases}$$

Genom att öka $\mathfrak{m}$ kan man således alltid åstadkomma, att summan

$$(31)\quad \sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}},$$

i hvilken talen $m\, m_1 \ldots m_{n-1}$ äro gifna genom (29), för ett gifvet område, hvilket som helst, inom C_n, med hvilken i förväg gifven grad af noggranhet som helst framställer $FC_n(x)$.

Således:

A. »Låt $FC_n(x)$ vara en sådan gren af den analytiska funktionen $F(x)$, som vi förut definierat. Låt vidare C vara ett område, hvilket som helst, inom området C_n, och låt δ vara en positiv qvantitet hvilken som helst.

Man kan alltid bilda en hel rationel funktion af variabeln x, som har formen:

$$g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) = \sum c_{\mu}^{(\mathfrak{m})} F^{(\mu)}(0)x^{\mu}$$

hvarest $c_{\mu}^{(\mathfrak{m})}$ äro rationella tal, hvilka äro beroende af, samt entydigt gifna i och med talet n och ett annat positivt helt tal $\mathfrak{m}$, till hvilket sednare de stå i sådant förhållande, att när $\mathfrak{m}$ väljes öfver en sin undre gräns, är städse absoluta beloppet för differensen mellan $FC_n(x)$ och $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ för området C mindre än δ.»

Vi ha sett, att summan:

$$(31)\quad \sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}},$$

hvarest

$$(29)\quad .\ .\ \begin{cases} m + 1 = 2\mathfrak{m} \\ m + m_1 = m\cdot\mathfrak{m} \\ m + m_1 + m_2 = m_1\cdot\mathfrak{m} \\ m + m_1 + m_2 + m_3 = m_2\cdot\mathfrak{m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m + m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} + m_{n-1} = m_{n-2}\cdot\mathfrak{m} \end{cases}$$

är en hel rationel funktion $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ med sådana egenskaper, som i vårt teorem blifvit angifna. Gradtalet för denna funktion är $m_{n-2} \cdot \mathfrak{m}$. Summan af de m-första termerna är:

$$\sum_{\mu=0}^{m} F^{(\mu)}(0) \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}$$

och den öfverensstämmer således i sina m-första termer med utvecklingen af $FC_n(x)$ efter TAYLORS serie.

Man kan bilda funktioner $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ efter allmännare grunder än summan (31). Låt oss t. ex. sätta $n = 2$, låt α som förut vara definieradt som den reella positiva roten till:

$$(28) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1 - \alpha = \alpha^{\mathfrak{m}}$$

och låt oss med $\delta(\mathfrak{m})$ förstå en positiv qvantitet, hvilken med växande $\mathfrak{m}$ sjunker under hvarje gräns. Låt oss vidare med $\nu_0\, \nu_1 \ldots \nu_\lambda \ldots \nu_m$ förstå positiva hela tal valda så, att:

$$\alpha^{\nu_0+1-\mathfrak{m}} + \alpha^{\nu_1+2-2\mathfrak{m}} + \ldots + \alpha^{\nu_\lambda+2\lambda-1-\mathfrak{m}(\lambda+1)} + \ldots$$
$$+ \alpha^{\nu_m+2m+1-\mathfrak{m}(m+1)} = \delta(\mathfrak{m}).$$

Summan:

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\lambda_1=0}^{\nu_\lambda} F^{(\lambda+\lambda_1)}(0) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+\lambda_1}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}},$$

hvilken för

$$\delta(\mathfrak{m}) = \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m+1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}}$$

$$m + 1 = 2\mathfrak{m}$$

$$m + m_1 = m \cdot \mathfrak{m}$$

$$\nu_0 = \nu_1 = \ldots = \nu_\lambda = \ldots = \nu_m = m_1$$

öfvergår uti:

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} F^{(\lambda+\lambda_1)}(0) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+\lambda_1}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}}$$

är då en sådan funktion $g_{\mathfrak{m}}^{(2)}(x)$, som i vårt teorem blifvit angifven.

Låt oss nu använda samma betraktelse som vid teorem E i vårt första meddelande. Vi erhålla då omedelbart i stället för det approximativa uttrycket $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ en serie, hvilken framställer grenen $FC_n(x)$ inom hela området C_n.

Vi införa nemligen i stället för de hela rationella funktionerna $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ nya hela rationella funktioner $G_0^{(n)}(x)$ $G_1^{(n)}(x) \ldots$ $G_m^{(n)}(x) \ldots$ definierade genom likheterna

$$(32) \quad \begin{cases} G_0^{(n)}(x) = g_0^{(n)}(x) = F^{(0)}(0) = F(0) \\ G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) = g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) - g_{\mathfrak{m}-1}^{(n)}(x)\,;\ \mathfrak{m} = 1,\ 2,\ \ldots \infty. \end{cases}$$

Man har:

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots \sum_{\nu=0}^{\mathfrak{m}} G_\nu^{(n)}(x) = g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x).$$

Om således C är ett område, hvilket som helst inom C_n, och δ är en godtycklig positiv qvantitet, hvilken som helst, så är:

$$\left| FC_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\mathfrak{m}} G_\nu^{(n)}(x) \right| < \delta$$

för området C.

Likheten:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots FC_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(n)}(x)$$

eger således rum för hvarje ställe inom C_n.

Serien

$$\sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$$

är likformigt konvergent för hvarje område inom C_n. Ty för hvarje dylikt område, gäller samtidigt:

$$(35)\begin{cases} \left| FC_n(x) - \sum_{\mathfrak{m}=0}^{m_1} G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) \right| < \delta, \text{ då talet } m_1 \text{ är tillräckligt stort} \\ \left| FC_n(x) - \sum_{\mathfrak{m}=0}^{m_1+m'} G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) \right| < \delta, \text{ för hvarje positivt heltalsvärde } m' \\ \left| \sum_{\mathfrak{m}=m_1+1}^{m_1+m'} G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) \right| < 2\delta\,. \end{cases}$$

Vi ha således erhållit:

B. »Låt $FC_n(x)$ vara en sådan gren af den analytiska funktionen $F(x)$, som vi förut definierat. Man kan alltid bilda en serie

$$SC_n(x) = \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\infty} G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$$

hvilken analytiskt framställer denna gren för hvarje ställe inom C_n, och vid hvilken

$$G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)\,;\; m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

äro hela rationella funktioner af formen:

$$\sum c_{\mu}^{(m)} F^{(\mu)}(0) x^n$$

der $c_{\mu}^{(m)}$ äro gifna rationella tal, som äro desamma för alla funktioner $F(x)$.

Serien $SC_n(x)$ hvilken konvergerar för hvarje ställe inom C_n är dessutom för hvarje inom C_n beläget område en likformigt konvergerande serie.»

Man erhåller, som vi sett, en dylik serie $SC_n(x)$, om man sätter:

$$(32)\qquad \begin{cases} G_0^{(n)}(x) = g_0^{(n)}(x) = F(0) \\ G_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) = g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x) - g_{\mathfrak{m}-1}^{(n)}(x)\,;\; \mathfrak{m} = 1,\ 2,\ \ldots \infty \end{cases}$$

$$(31)\quad g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)=\sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{m_{n-1}}F^{(\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}}{|\underline{\lambda}\,|\underline{\lambda_1}\ldots|\underline{\lambda_{n-1}}}$$

$$(29)\quad\begin{cases} m+1=2\mathfrak{m}\\ m+m_1=m\cdot\mathfrak{m}\\ m+m_1+m_2=m_1\cdot\mathfrak{m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ m+m_1+m_n+\ldots+m_{n-2}+m_{n-1}=m_{n-2}\cdot\mathfrak{m}\,. \end{cases}$$

Vårt teorem fortbestår, äfven vid annat val af $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$, så snart blott $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ är en sådan funktion, som vi i teorem A angifvit.

Vi ha i vårt första meddelande visat, att om $\overline{X}$ är ett ändligt område, hvilket som helst, som dock alltid är beläget helt och hållet inom X, så faller detta område inom C_n, så snart talet n är större än ett visst minsta tal.

Teorem A lär oss derföre, att grenen $FX(x)$, om de båda positiva hela talen n och $\mathfrak{m}$ uti uttrycket $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ i teorem A väljas tillräckligt stora, alltid för hvarje område $\overline{X}$ med hvarje i förväg gifven noggranhet kan framställas genom $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$.

Häraf följer åter, att likheten

$$(36)\quad \ldots\ldots\ldots\quad FX(x)=SC_n(x)$$

vid hvarje gifvet område $\overline{X}$ alltid eger rum från och med ett visst minsta n.

Man erhåller det approximativa uttrycket $g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)$ för $FX(x)$ genom att först fastställa n tillräckligt stor för att C_n må omsluta $\overline{X}$, samt härefter fastställa $\mathfrak{m}$ så stor att olikheten:

$$|\,FC_n(x)-g_{\mathfrak{m}}^{(n)}(x)\,|<\delta$$

för området $\overline{X}$ blir uppfylld.

Denna olikhet eger åter rum så snart $\mathfrak{m}$ uppfyller vilkoren:

$$g(1-\alpha)\frac{n}{\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha^n}\right)^{n-1}} < \delta \text{ (c. f. formel (30))}$$

$$1-\alpha = \alpha^{\mathfrak{m}}\,.$$

Talet $\mathfrak{m}$ blir genom dessa villkor beroende af så väl n som af g. Qvantiteten g är åter först gifven i och med funktionen $F(x)$. Vi vilja emellertid nu visa, att man på mångfaldiga sätt kan fastställa ett entydigt samband mellan talen n och $\mathfrak{m}$, som är invariant i förhållande till $F(x)$, eller är detsamma för hvarje funktion $F(x)$.

Vi återgå till formelsystemet (27). Vi sätta:

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}$$

hvarest vi med $\omega(n)$ förstå en positiv qvantitet, som är entydigt definierad för hvarje positivt heltalsvärde på n, och som samtidigt med n växer öfver hvarje gräns.

Vi låta vidare $\mathfrak{m}$ vara det första positiva hela tal, hvilket uppfyller villkoret:

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1-\alpha \geqq \alpha^{\mathfrak{m}}$$

och vi bestämma härefter talen $m\, m_1 \ldots m_{n-1}$ genom rekursionsformlerna (29)

$$(29)\begin{cases} m+1 = 2\mathfrak{m} \\ m+m_1 = m\cdot\mathfrak{m} \\ m+m_1+m_2 = m_1\cdot\mathfrak{m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m+m_1+m_2+\ldots+m_{n-2}+m_{n-1} = m_{n-2}\cdot\mathfrak{m}\,. \end{cases}$$

Man erhåller härigenom, på samma sätt som å pag. 270

$$|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\ldots+|\varepsilon_n| < g(1-\alpha)\frac{n}{\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha^n}\right)^{n-1}}\,.$$

Nu är:

$$n(1-\alpha) = n\left(1-e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}\right) < \frac{1}{\omega(n)}$$

och

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha n}\right)^{n-1}}=\left(1-e^{\frac{1}{\omega(n)}}\left(1-e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}\right)\right)^{-n-1}$$

närmar sig *ett* vid växande n.

Låt således $\overline{X}$ vara ett ändligt område, hvilket som helst inom X. Mot hvarje X svarar alltid ett visst minsta tal n låt vara $\bar{n}$, sådant att $C_{\bar{n}}$ helt och hållet innefattar $\overline{X}$ och således äfven, om vi begagna samma beteckningssätt, som i vårt första meddelande ett område $\overline{C}_{\bar{n}}$, hvilket äfven helt och hållet innesluter $\overline{X}$.

Formelsystemet (27) undergår ingen förändring, om vi, i stället för att i (25) vid hvarje n och för hvarje l välja qvantiteten ϱ så att:

$$\frac{\varrho}{\xi_n}=\theta$$

på sådant sätt fastställa ϱ, att den å hvarje l afsatta punkten $n\varrho$, så snart $n \geqq \bar{n}$, då l roterar ett hvarf kring origo beskrifver linien $\overline{C}_{\bar{n}}$.

Om nu talet n väljes

$$n \geqq \bar{n}$$

omfattar C_n området $C_{\bar{n}}$ och härmed $\overline{C}_{\bar{n}}$, som åter omfattar $\overline{X}$. Låt oss nu uttrycka talet $\mathfrak{m}$ uti n genom formlerna (37) och (38) samt uttrycka talen $m\, m_1 \ldots m_{n-1}$ uti $\mathfrak{m}$ genom formlerna (29). Om härefter n tillräckligt ökas, sjunker

$$g(1-\alpha)\frac{n}{\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha n}\right)^{n-1}}$$

under hvarje gräns.

Om således n tillräckligt ökas, blir:

$$\left|FX(x)-\sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_{n-1}=0}^{m_{n-1}}F^{(\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}}\right|<\delta$$

för området $\overline{X}$, huru liten vi än må fastställa den positiva qvantiteten δ.

Härmed ha vi erhållit följande båda teorem C och D.

C. Låt $FX(x)$ vara en sådan gren af den analytiska funktionen $F(x)$, som vi förut definierat.

Låt vidare $\overline{X}$ vara ett område, hvilket som helst inom området X och låt δ vara en positiv qvantitet hvilken som helst. Man kan alltid och på mångfaldiga sätt bilda en hel rationel funktion af variabeln x, som har formen:

$$g^{(n)}(x) = \sum \mathfrak{c}_{\mu}^{(n)} F^{(\mu)}(0) x^{\mu}$$

der $\mathfrak{c}_{\mu}^{(n)}$ äro rationella af elementen $F^{(\mu)}(0)$; $\mu = 1, 2, \ldots$ oberoende talkoefficienter, hvilka på ett sådant sätt äro beroende af ett positivt helt tal n, att hvar och en af dem är entydigt gifven i och med detta tal, och att olikheten:

$$FX(x) - g^{(n)}(x)$$

eger rum för området $\overline{X}$, så snart n väljes öfver en viss undre gräns.»

Vi ha sett att funktionen $g^{(n)}(x)$ kan bildas på följande sätt.

Man fastställer, huru som helst, en funktion $\omega(n)$, hvilken för hvarje positivt heltalsvärde på n är en entydigt definierad positiv qvantitet, hvilken samtidigt med n växer öfver hvarje gräns, samt adjungerar härefter till n ett annat positivt helt tal $\mathfrak{m}$ som entydigt bestämmes genom villkoret, att vara det minsta positiva hela tal, för hvilket

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 - \alpha \geqq \alpha^{\mathfrak{m}}$$

då med α förstås

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}.$$

Man beräknar härefter talen $m\, m_1 \ldots m_{n-1}$ ur recursionsformlerna:

$$(29)\begin{cases} m + 1 = 2\mathfrak{m} \\ m + m_1 = m \cdot \mathfrak{m} \\ m + m_1 + m_2 = m_1 \cdot \mathfrak{m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ m + m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} + m_{n-1} = m_{n-2} \cdot \mathfrak{m} \end{cases}$$

och sätter:

$$(39)\ g^{(n)}(x) = \sum_{\lambda=0}^{m}\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_{n-1}} F^{(\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1})}(0)\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_{n-1}}}.$$

D. »Låt $FX(x)$ vara en sådan gren af den analytiska funktionen $F(x)$, som vi förut definierat.

Man kan alltid bilda en serie:

$$SX(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(x),$$

hvilken analytiskt framställer denna gren för hvarje ställe inom X, och vid hvilken

$$G^{(n)}(x)\,;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

äro hela rationella funktioner af formen:

$$\sum \mathfrak{c}_{\mu}^{(n)} F^{(\mu)}(0) x^{\mu}$$

der $\mathfrak{c}_{\mu}^{(n)}$ äro gifna rationella tal, som äro desamma för alla funktioner $F(x)$.

Serien, hvilken konvergerar för hvarje ställe inom X är dessutom för hvarje inom X beläget område en likformigt konvergerande serie.»

Vi ha sett, att man erhåller en dylik serie om man sätter:

$$G^{(0)}(x) = g^{(0)}(x) = F(0)$$
$$G^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) - g^{(n-1)}(x)\,;\ n = 1,\ 2,\ \ldots \infty$$

och åt $g^{(n)}(x)$; $n = 1,\ 2,\ \ldots$ ger samma betydelse som i (39).

Beviset för alla de teorem vi hittills uttalat, hvilar på den WEIESRTRASS'iska satsen, att om g är öfre gränsen för absoluta beloppet till potensserien

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

när $|x| = r$, så är

$$|c_\nu| \leqq g r^{-\nu}.$$

Vi hade i stället för af denna sats kunnat betjena oss af likheten:[1])

$$(40)\quad \begin{cases} F(x_0 + x) = \left\{F(x_0) + F'(x_0)\dfrac{x}{\underline{|1}} + \ldots + F^{(m)}(x_0)\dfrac{x^m}{\underline{|m}}\right\} + \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^S \dfrac{F(x_0 + z)}{z - x}\left(\dfrac{x}{z}\right)^{m+1} dz, \end{cases}$$

der integrationen tänkes utförd längs en sluten kroklinie S, hvilken omfattar punkterna $z = 0$ och $z = x$ och för hvars olika punkter funktionen $F(x_0 + z)$ förhåller sig regulärt.

Härigenom blefve differenserna:

$$FC_n(x) - g_m^{(n)}(x)$$
$$FX(x) - g^{(n)}(x)$$

uttryckta genom vissa integraler längs slutna inom C_n respektive X belägna konturer S.

Låt oss nedskrifva dessa integraler för fallet $n = 2$.

Man har, då ξ har samma betydelse, som i det föregående:

$$(41)\quad \begin{cases} FC_2(x) = FC_2(2\xi) = \left\{F(\xi) + F'(\xi)\dfrac{\xi}{\underline{|1}} + \ldots + F^{(m)}(\xi)\dfrac{\xi^m}{\underline{|m}}\right\} + \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^S \dfrac{F(\xi + z)}{z - \xi}\left(\dfrac{\xi}{z}\right)^{m+1} dz \end{cases}$$

[1]) c. f. författarens. »Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget.» Öfversigten, 8 Februari 1882.

$$
(42)\quad \begin{cases} F^{(\mu)}(\xi) = \left\{ F^{(\mu)}(0) + F^{(\mu+1)}(0)\dfrac{\xi}{\underline{|1}} + \ldots + F^{(\mu+\nu_\mu)}(0)\dfrac{\xi^{\nu_\mu}}{\underline{|\nu_\mu}} \right\} + \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{s_\mu} \dfrac{F^{(\mu)}(z)}{z-\xi}\left(\dfrac{\xi}{z}\right)^{\nu_\mu+1} dz\,. \end{cases}
$$

Således:

$$
(43)\quad \begin{cases} FC_2(x) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\nu_\mu} F^{(\mu+\nu)}(0)\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} + \\ \qquad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{s} \dfrac{F\left(\dfrac{x}{2}+z\right)}{z-\dfrac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2z}\right)^{m+1} dz + \\ \qquad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{\mu=0}^{m}\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\underline{|\mu}}\int^{s_\mu} \dfrac{F^{(\mu)}(z)}{z-\dfrac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2z}\right)^{\nu_\mu+1} dz \end{cases}
$$

eller om vi sätta:

$$
\nu_\mu = m_1\,;\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots m
$$

och beakta att:

$$
(44)\quad \begin{cases} F(z) + F'(z)\dfrac{\xi}{\underline{|1}} + \ldots + F^{(m)}(z)\dfrac{\xi^m}{\underline{|m}} = F(\xi+z) - \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{S'} \dfrac{F(z+y)}{y-\xi}\left(\dfrac{\xi}{y}\right)^{m+1} dy \end{cases}
$$

$$
(45)\quad \begin{cases} FC_2(x) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{m_1} F^{(\mu+\nu)}(0)\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} + \\ \quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{S} \dfrac{F\left(\dfrac{x}{2}+z\right)}{z-\dfrac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2z}\right)^{m+1} dz + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int^{S_1} \dfrac{F\left(\dfrac{x}{2}+z\right)}{z-\dfrac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2z}\right)^{m_1+1} dz \\ \quad + \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^2 \displaystyle\int^{S_1}\left\{ \dfrac{1}{z-\dfrac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2z}\right)^{m_1+1} \int^{S'} \dfrac{F(z+y)}{y-\dfrac{x}{2}}\left(\dfrac{x}{2y}\right)^{m+1} dy \right\} dz \end{cases}
$$

Vid den ståndpunkt, hvilken vi intagit, och enligt hvilken vi af funktionen $F(x)$ endast känna elementen $F^{(\mu)}(0)$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ är dock ingenting vunnet genom dessa integraluttryck, hvilka förutsätta, att funktionen är bekant längs linierna S.

I de fall åter, der man utom elementen $F^{(\mu)}(0)$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ äfven känner vissa sådana egenskaper hos funktionen $F(x)$, som kunna leda till bestämning af integraluttrycken, torde man lika väl komma till målet genom WEIERSTRASS af oss öfverallt använda teorem.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 5.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Om absorptionsförmågan hos en sotad yta.

Af Knut Ångström.

(Meddeladt den 11 Maj 1898.)

Vid alla bestämningar af en strålnings styrka begagna vi oss, som bekant, af en på ett eller annat sätt svärtad yta, hvilken genom absorption får omsätta strålningen i värme. Kännedomen om den absorberande ytans absorptionsförmåga är tydligen vid dessa mätningar af fundamental betydelse. Strängt taget är denna kännedom redan nödvändig vid relativa bestämningar, så snart det gäller att med hvarandra jämföra strålning af olika art, d. v. s. af olika våglängd. Ty om absorptionsförmågan hos mätapparatens värmeabsorberande yta är beroende af strålningens sammansättning, bli de direkt gjorda iakttagelserna tydligen icke omedelbart jämförbara med hvarandra. Hvad åter de absoluta bestämningarna af strålande värme beträffar, så kunna vi tydligtvis icke utföra sådana bestämningar utan kännedom om den värmeabsorberande ytans absorptionsförmåga.

Då dessa förhållanden redan länge varit kända och erkända, måste det väl förefalla egendomligt, att de forskare, som egnat sig åt undersökningar öfver strålande värme, så litet beaktat desamma. Vid de undersökningar, där blott relativa bestämningar erfordras, såsom vid de flesta mätningar med termostapel eller bolometer, utgår man i vanliga fall från antagandet, att absorptionsförmågan hos instrumentets värmeabsorberande yta är lika

för olika våglängder. Redan MELLONI trodde sig på grund af några försök berättigad till detta antagande,[1]) men vid en granskning af dessa försök finner man lätt, att de icke äro fullt bevisande. Visst är att nämnda antagande icke under alla omständigheter är berättigadt. Såsom jag i ett föregående arbete visat,[2]) är nämligen sotets inre absorptionsförmåga beroende på våglängden, i det absorptionen minskas med tilltagande våglängd. Består därför den värmeabsorberande ytan af en speglande yta, hvarpå anbragts ett tunt sotlager, så absorberar denna yta strålar af kortare våglängd starkare än strålar af längre våglängd alldenstund en jämförelsevis större qvantitet af de senare efter reflexion mot metallytan åter kan utgå genom sotlagret. Det första vilkoret för, att den värmeabsorberande ytan icke må utöfva en selektiv absorption är därför, att den inre absorptionen skall vara fullständig, hvilket man kan vinna genom att på lämpligt sätt preparera den underliggande metallytan och därpå anbringa ett tillräckligt tjockt sotlager. Under dessa förhållanden kan en olika absorptionsförmåga för olika våglängder blott uppkomma därigenom, att sotets diffusionsförmåga för olika våglängder skulle kunna, i likhet med förhållandet hos öfriga diffunderande kroppar, vara olika. Nu vet man emellertid med visshet, att diffusionsförmågan hos sot är obetydlig och ett antagande af, att dess förändring med våglängden kan försummas, synes väl därför i de flesta fall berättigadt.

Vända vi nu vår uppmärksamhet till förhållandena vid de s. k. absoluta bestämningarna af strålande värmes styrka, så finna vi, att äfven här så godt som alla forskare, som sysselsatt sig med sådana mätningar, försummat hvarje korrektion för ytans absorptionsförmåga eller — hvilket här blir detsamma — antagit denna absorptionsförmåga = 1 (100 %). Författaren känner för sin del icke till ett enda fall, då försök blifvit gjordt att direkt bestämma den använda absorberande ytans absorptions-

---

[1]) MELLONI. La Thermochrose, p. 100—107. Naples 1850.

[2]) K. ÅNGSTRÖM. Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl., p. 385, 1888. Wied. Ann. **36**, 715, 1893.

förmåga och de, som öfver hufvud taget fäst afseende vid den ifrågavarande korrektionen, hafva utfört denna på grund af de bestämningar, som blifvit gjorda öfver andra sotade ytors absorptionsförmåga, utan att tillräckliga grunder synas hafva funnits för antagandet, att dessa bestämningar låtit tillämpa sig på de absorberande ytorna i respektive mätapparater. Det icke obetydliga observationsmaterial, som för närvarande samlats, beträffande t. ex. solens värmestrålning, synes på nu anförda grunder icke tillåta en komparativ behandling af större skärpa, då — frånsedt flera af metodernas brister i öfrigt — angifvelser öfver den absorberande ytans beskaffenhet i de flesta fall saknas.

Orsaken till dessa förhållanden är utan tvifvel beroende på svårigheten att utföra en tillfredsställande bestämning af en ytas absorptionsförmåga och på bristen på tjänliga metoder härför, men äfven på föreställningen, att nämnda qvantitet är så liten, att den godt kan negligeras i jämförelse med öfriga observationsfel. Äfven om detta antagande kan hafva sitt berättigande vid de äldre apparaterna för absoluta bestämningar af strålande värme, där det procentiska felet i resultatet blir relativt stort, så torde det däremot icke vara tillåtet vid de nyare arbetsmetoderna, där felet i slutresultatet icke bör öfverstiga 1 %.

Från den allra sista tiden föreligger emellertid ett försök att bestämma absorptionsförmågan hos sotade ytor af Herrar CROVA och COMPAN.[1]) Den metod, som dessa forskare härvid användt, grundar sig på en jämförelse mellan strålningen hos olika behandlade sotytor och strålningen hos en »absolut svart yta». Denna senare bestod i en liten öppning i ett större inuti svärtadt kärl, hvilken inre yta genom ett omgifvande vattenbad hölls vid 100° temperatur.[2]) Från strålningen slutes till absorptionen, hvilken i gynnsammaste fall finnes uppgå till 98 %. Jag är emellertid böjd att antaga, att detta värde är något för lågt.

---

[1]) CROVA et COMPAN. C. R. **126**, 7 Mars 1898.

[2]) Denna metod att åstadkomma en absolut svart yta är redan förut angifven af W. WIEN och O. LUMMER, Wied. Ann. **56**, 451, 1895 och LUMMER och PRINGSHEIM hafva användt densamma för att studera strålningslagen, Wied. Ann. **63**, 395, 1897.

Det är nämligen tydligt, att de båda ytorna, hvars strålningsförmågor skola jämföras, böra hafva identiskt lika temperatur för att denna undersökningsmetod skall leda till riktiga resultat. Så synes dock ej vara förhållandet, ty under det värmeförlusten hos den »absolut svarta» ytan inskränker sig till strålning genom det lilla hålet i väggen, stråla de öfriga ytorna fritt åt alla håll och förlora äfven värme genom konvektion. Det följer häraf med nödvändighet, att dessa senare ytor måste hafva en något lägre temperatur än den förra, och att de redan på denna grund måste gifva en något mindre strålning, hvaraf följaktligen ett något för lågt värde på absorptionsförmågan härledes. Det är för öfrigt att märka, att denna undersökning blott leder till en bestämning af absorptionsförmågan för strålning af mycket stor våglängd, och att den väl svårligen låter använda sig för bestämning af absorptionsförmågan för strålning af kortare våglängd.

Dessa omständigheter hafva föranledt mig att undersöka, huruvida icke en tillfredsställande bestämning af en sotad ytas absorptionsförmåga skulle kunna utföras medelst den metod härför, som jag en gång förut i förbigående användt för att finna ett approximativt värde på denna qvantitet.[1]) Denna metod består i en direkt bestämning med tillhjälp af bolometer såväl af den mot ytan infallande som den från ytan diffust återkastade strålningens styrka, ur hvilka bestämningar därpå diffusions- och absorptionsförmågan kan beräknas. I samma arbete har jag nämligen visat, att om diffusion eger rum från en fullständigt matt yta, och man från ett ytelement afsätter linier proportionela mot diffusionens storlek i denna riktning, så erhålles på detta sätt genom förening af liniernas ändpunkter en yta — »diffusionsyta» — som mycket nära ansluter sig till en sfer, och som faktiskt är en sfer i den händelse, att den infallande strålningen råkar ytan under 30°—50° infallsvinkel.[2]) Diffusionsytorna för olika, fullständigt matta ämnen äro sålunda i det allra

---

[1]) Om strålande värmes diffusion från plana ytor. Upsala Univ. Årsskrift 1885, se p. 40. Äfven Wied. Ann. **26**, 253, 1885.

[2]) l. c. p. 31—32. Wied. Ann. l. c. p. 270.

närmaste likformiga och, om diffusionen i normalens till ytan riktning är S (= styrkan af den från ytenheten diffust återkastade strålningen på afståndet *ett* från ytan), så blir den totalt återkastade strålningen:

$$D = \pi S \tag{1}$$

och således, om den infallande strålningens styrka är I, diffusionsförmågan:

$$d = \frac{\pi S}{I}. \tag{2}$$

Ehuruväl inga svårare anmärkningar torde kunna göras mot denna undersökningsmetod, då det gällor ytor af stor diffusionsförmåga, alldenstund mätapparaten här blott användes till relativa bestämningar, och härvid på nyss anförda grunder dess absorptionsförmåga för olika våglängd torde kunna anses konstant, blir dock förhållandet helt annat, om det gäller att undersöka diffusionen från en yta af samma beskaffenhet som mätapparatens egen.

För att klargöra förhållandena i detta fall skola vi antaga, att vi hafva två ytor A och B af samma beskaffenhet och på afståndet *ett* från hvarandra, samt att mot A infaller den homogena strålningen W_λ under infallsvinkeln α. Per ytenhet träffas således A af strålningen $W_\lambda \cos \alpha = I_\lambda$. Ytan återkastar diffust en del $d_\lambda I_\lambda$ af denna strålning, det öfriga $I_\lambda(1 - d_\lambda)$ absorberas. Det är denna qvantitet, som åstadkommer uppvärmningen af A och som, om A utgör ytan af en bolometer eller termostapel, ger sig tillkänna genom ett däremot proportionelt utslag α å dessa instrument. Om nu diffusionen i normal riktning från ytan A är S_λ, så är

$$d_\lambda I_\lambda = \pi S_\lambda. \tag{3}$$

Träffar denna strålning S_λ den andra ytan B, så måste, alldenstund B och A antogos vara af samma beskaffenhet, och strålningen är homogen, åter en qvantitet $d_\lambda S_\lambda$ diffust återkastas, under det att $S_\lambda(1 - d_\lambda)$ af B absorberas. Är B ytan af en

mätapparat, fås å denna ett mot den absorberade strålningen proportionelt utslag β. Häraf fås:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{S_\lambda(1 - d_\lambda)}{I_\lambda(1 - d_\lambda)} \tag{4}$$

eller enl. eqv. 3

$$\pi\frac{\beta}{\alpha} = d_\lambda . \tag{5}$$

Är således den påfallande strålningen homogen, fås äfven i detta fall genom utslagen α och β ett mått på diffusionens storlek. Är deremot den påfallande strålningen icke homogen fås:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Sigma S_\lambda(1 - d_\lambda)}{\Sigma I_\lambda(1 - d_\lambda)},$$

eller

$$\pi\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Sigma I_\lambda d_\lambda(1 - d_\lambda)}{\Sigma I_\lambda(1 - d_\lambda)} . \tag{6}$$

Då här diffusionsförmågan måste definieras såsom

$$\frac{\Sigma I_\lambda d_\lambda}{\Sigma I_\lambda},$$

inses, att i detta fall, och för så vidt d_λ är beroende af våglängden, $\pi\frac{\beta}{\alpha}$ icke blir ett mått på diffusionsförmågan. Men om d_λ är konstant för olika våglängder eller kan anses konstant på grund däraf, att dess variationer med våglängden äro små, eller om d_λ öfver hufvud taget och för alla ingående I_λ är en så liten qvantitet, att den kan negligeras i jämförelse med 1, gifver fortfarande $\pi\frac{\beta}{\alpha}$ en bestämning af diffusionen. Då af flera skäl, bland annat äfven på grund af redan förut citerade undersökning öfver sotets inre absorption,[1]) det sista af nu uppräknade villkor helt visst är uppfylldt hvad en sotad yta beträffar, bör sålunda nu angifna arbetsmetod leda åtminstone till en god approximativ bestämning af detta ämnes diffusionsförmåga. Om för

[1]) l. c. K. Vet. Akad. Öfversigt p. 391, Wied. Ann. p. 720.

öfrigt d_{max} och d_{min} betecknar det största och minsta värde, som diffusionsförmågan antager för en viss sammansatt strålning ΣI_λ, så måste i förevarande fall:

$$\frac{\Sigma I_\lambda d_{max}}{\Sigma I_\lambda} > \pi \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\Sigma I_\lambda d_{min}}{\Sigma I_\lambda}. \tag{7}$$

Om vi därför nu på angifvet sätt bestämma $\pi \frac{\beta}{\alpha}$ för olika sammansättning på den infallande strålningen och därvid finna, att $\pi \frac{\beta}{\alpha}$ antager samma värde, hvad än ΣI_λ är, så kan detta icke betyda annat än att d_λ i självfva verket kan betraktas som en konstant.

Vid tillämpningen af dessa betraktelser på föreliggande problem har mitt första bemödande gått ut på att framställa så noga bestämda sotytor som möjligt för att därigenom göra mina undersökningar fruktbringande för kommande arbeten. Framställandet af en väl definierad sotyta, som äfven är lämplig att tjänstgöra som värmeabsorberande yta i ett mätinstrument, är likväl en ganska svår uppgift. Den allmännast använda metoden, att först på galvanisk väg söka gifva ytan ett öfverdrag af platinasvart, lemnar icke synnerligen tillfredsställande resultat, ty fällningens beskaffenhet är beroende på strömstyrkan, temperatur, ytornas form m. m., faktorer hvilka man icke alltid kan så lätt behärska. Däremot har jag genom ett ganska enkelt medel fått fullgoda resultat. Jag utfäller nämligen på den yta, som skall svärtas, på galvanisk väg ett tunt lager zink, hvarefter ytan öfvergjutes med en 1 % lösning af platinaklorid, hvarur platinan omedelbart fälles och lemnar som resultat en synnerligen jämn mattsvart yta. Denna öfverdrages därpå med ett tunt lager sot, hvilket framställes så, att ett grofmaskigt trådgaller hålles ungefär midt i lågan af ett stearinljus och ytan, som skall sotas, föres fram och åter i den uppstigande fint fördelade rökpelaren. Det är på detta sätt, jag framställt ytorna i de apparater, som jag under senare år användt till undersök-

ningar öfver strålande värme, och hvilkas närmare undersökning på den grund haft för mig ett dubbelt intresse.

Då försöksmetoden under alla omständigheter är strängt riktig för homogen strålning, skulle naturligtvis en spektralanalytisk undersökning öfver diffusionen för skilda våglängder vara det fördelaktigaste. Då emellertid diffusionen från sot är obetydlig och skulle bli ännu svårare att uppmäta, om blott homogen strålning skulle användas, har jag ej på bolometrisk väg kunnat utföra denna undersökning för spektrum i sin helhet utan måst inskränka mig till att arbeta med sammansatt strålning af olika beskaffenhet. För det ljusa spektrum har jag dock gjort ett försök att på spektrofotometrisk väg bestämma förhållandet mellan diffusionen från en sotad yta och diffusionen från en helt hvit matt yta i ändamål att utröna, om diffusionsförmågan här varierar med våglängden.

Det torde icke vara nödvändigt att här redogöra i detalj för anordningen vid den spektrofotometriska undersökningen, hvilken blott utgör en obetydlig förändring af den vanliga Vierordt'ska. Mätningarna utfördes sålunda med tillhjälp af en mikrometriskt inställbar spaltöppning, framför hvilken omväxlande sotytan och den matta hvita ytan anbragtes och från sidan belystes. Det diffust återkastade ljuset kunde därigenom jämföras med ett oföränderligt jämförelsespektrum, som erhölls genom på lämpligt sätt afbländadt dagsljus.

Resultaten af denna undersökning återfinnas här nedan för den platinerade samt den platinerade och därpå sotade ytan, i det de bifogade talen angifva dessa ytors diffusion i procent af den hvita ytans diffusion för tre olika delar af spektrum. Våglängden angifves ungefärligt i Å. E.

	Rödt. $\lambda = 6800$	Grönt. $\lambda = 5200$	Blått. $\lambda = 4800$
Platinerad yta	1,8	2,6	3,9
Platinerad och sotad yta	1,7	1,9	1,9.

Hvarje värde för den platinerade ytan är medium ur 8 bestämningar, tagna i 2 särskilda serier, hvarje värde för den sotade

ytan är medium af 16 bestämningar, tagna i 8 särskilda serier. Trots detta, torde dessa bestämningar kunna vara behäftade med ett ganska stort fel, hvad beträffar deras absoluta storlek, detta på grund af de stora svårigheter, som städse åtfölja spektrofotometriska bestämningar, då undersökningen gäller ljuskällor af mycket olika styrka. Så mycket torde vi dock med visshet kunna sluta ur dessa siffror, att den platinerade ytans diffusion temligen starkt tilltager mot de kortare våglängderna, men att däremot diffusionsförmågan för den sotade ytan håller sig anmärkningsvärdt konstant.

För att vid de bolometriska mätningarna kunna bestämma diffusionsförmågan för strålning af olika sammansättning, har jag begagnat mig af tre olika plattor, som fästades framför bolometerns öppning, nämligen:

I En platta af järnoxidulglas[1]) af 3,1 mm tjocklek, hvilken fullständigt absorberar de ultraröda strålarna och en ringa del af de yttersta synliga, röda, hvarför plattan har en svagt blågrön färg. Vid användande af solljus, genomsläppes sålunda blott c. 1/3 af energispektrum.

II En platta af alun 5,85 mm tjock. Af solspektrum genomgår något mer än 2/3 af energispektrum, från de kortare våglängderna räknadt, denna platta.

III En tunn täckglasplatta 0,1 mm tjock. Denna genomsläpper solspektrum så godt som oförsvagadt. Den har icke dess mindre en vigtig uppgift, nämligen att fullständigt förhindra strålningen från den genom absorptionen uppvärmda sotytan att inverka på utslagen. Hvad som i dessa tre fall mätes, är således uteslutande diffus strålning.

Om således solljus användes vid försöken, fås genom användande af

[1]) Den stora absorptionsförmågan hos denna glassort har blifvit påvisad af Herr R. ZSIGMONDY (Wied. Ann. **49**, 535). På min anhållan har Herr Z. ställt några sådana glasplattor till mitt förfogande och har firman ZEISS i Jena utan ersättning utfört dessa plattors slipning. För detta frikostiga tillmötesgående, hvaraf jag haft stor fördel icke blott vid denna utan äfven vid en annan ännu icke publicerad undersökning, begagnar jag tillfället att här såväl till Herr ZSIGMONDY som firman ZEISS framföra min förbindligaste tack.

Plattan I, en strålning sammansatt af våglängder 3000— 7000 Å. E.
Plattan II, » » 3000—15000 »
Plattan III, » » 3000—20000 »

våglängdsgränserna här naturligtvis blott angifna i rundt tal.

I de försök, der solljus användes, fick detta från en Foucaults heliostat med silfverspegel under c. 45° infallsvinkel falla på den platinerade och sotade ytan. Denna var cirkulär af 9 cm diameter och utgjorde botten i ett cylindriskt med vatten fylldt kärl — detta för att så mycket som möjligt förhindra ytans upphettning. På 16,5 cm afstånd, normalt från ytan räknadt, befann sig bolometerns gitter. Känsligheten kunde genom inskjutning af motstånd i galvanometerledningen minskas samt genom ett »profmotstånd» i hvarje fall bestämmas.[1]) Sedan den genom de särskilda plattorna gående diffusionen bestämts, fick strålningen falla direkt in i bolometern, hvarvid äfven här de tre plattorna användes. På detta sätt erhölls relativa mått på diffusionen D och den infallande strålningen I.

		D	I	D/I
Plattan	I	4,3	226	0,00190
»	II	9,3	523	0,00178
»	III	10,9	661	0,00165

Då här D/I blott obetydligt synes ändra sig med strålningens beskaffenhet, draga vi den slutsatsen, att sotets diffusionsförmåga åtminstone inom gränserna för solspektrum icke kan undergå några större variationer med våglängden.

Beräkning af diffusionens verkliga storlek låter sig ej med säkerhet utföra direkt ur dessa bestämningar, ty på grund af den diffunderande ytans storlek och diafragmorna i bolometertuben, kan den från sotytans kanter återkastade strålningen blott delvis träffa bolometerytan. Äfven kan man ej vara fullt viss om, att den diffunderande ytan likformigt belyses. Då emellertid redan för denna stora yta bolometerutslagen, som af nyss

[1]) Se K. Vet. Akad. Öfversigt, p. 379. 1888.

anförda observationer framgår, icke äro större än nödvändigt och således observationer af diffusionen från betydligt mindre sotytor skulle införa för stora fel, har jag tagit min tillflykt till en hjälpsats, som lätt bevisas ur nyss anförda satser om diffusionsytornas likformighet och under antagande af, att vi kunna betrakta dessa ytor som sferer. Denna sats lyder: Om vi hafva fyra ytor af två fullständigt diffunderande ämnen, A och a af ett ämne, samt A' och a' af ett annat ämne, och $A = A'$ samt $a = a'$ och diffusionen från dessa fyra ytor i punkter, som äro likbelägna i förhållande till de lika stora ytorna, betecknas med D och d samt D' och d' så är:

$$\frac{D}{D'} = \frac{d}{d'}.$$

Ty om S och S' är diffusionen i normal riktning från ytenheten af de båda ämnena, så är, om vi med ds beteckna ett ytelement:

$$\frac{D}{D'} = \frac{\Sigma S \frac{\cos \alpha ds}{r^2}}{\Sigma S' \frac{\cos \alpha ds}{r^2}} = \frac{S \Sigma \frac{\cos \alpha ds}{r^2}}{S' \Sigma \frac{\cos \alpha ds}{r^2}}$$

och, då de båda summorna i täljare och nämnare måste vara identiskt lika, fås:

$$\frac{D}{D'} = \frac{S}{S'}.$$

Då nu äfven på samma sätt bevisas, att

$$\frac{d}{d'} = \frac{S}{S'},$$

följer häraf den framstälda satsen.

Häraf har jag begagnat mig sålunda, att den stora sotytan utbyttes mot en lika stor, fullständigt matt hvit yta, hvarpå diffusionen från denna yta bestämdes. Därpå ersattes den stora hvita ytan af en helt liten yta af samma beskaffenhet, och diffusionen bestämdes ånyo. Med stöd af nyss angifna sats kan då diffusionen från en lika stor sotyta beräknas. På detta sätt erhöll

jag följande bestämningar med alunplattan för instrumentets öppning:

	Stor sotyta.	Stor hvit yta.	Liten hvit yta.	Påfallande strålningen.
Bolometerns relativa känslighet	220	98	98	1,71
Utslag	10,6	253	28,0	284
Utslag reduc. till känsl. 98	4,7	253,0	28,0	16260

Då infallsvinkeln här var 40°, är den strålning, som faller på ytenheten:

$$16260 \cos 40° = 12350 = \alpha.$$

Den lilla hvita ytans storlek är 2,06 $\overline{\text{cm}}^2$, och en sotad yta af denna storlek skulle under samma omständigheter som ofvan och med en känslighet hos bolometern = 98 gifvit ett utslag på grund af diffusionen $= \frac{28,0}{253} \cdot 4,7 = 0,52$. Då afståndet mellan den diffunderande ytan och bolometergittret är 16,5 cm, beräknas häraf utslaget för ytenheten och på afståndet 1 cm från den diffunderande ytan att vara:

$$\frac{0,52 \cdot \overline{16,5}^2}{2,06} = 68,5 = \beta.$$

Häraf fås diffusionsförmågen enl. formeln 5

$$\pi \frac{\beta}{\alpha} = 1,74 \ \%.$$

En liknande bestämning gaf som värde på diffusionsförmågan:

$$1,65 \ \%.$$

För att undersöka diffusionsförmågan för strålning af ännu längre våglängder än de, som ingå i solstrålningen, användes som strålningskälla en Argands' lampa med lercylinder. Finnes någon märkbar olikhet i sotets diffusionsförmåga för olika våglängder, bör den tvifvelsutan visa sig vid en jämförelse mellan de resultat, som erhållas i dessa båda fall, då den verksamma delen af solljusets energispektrum hufvudsakligen faller mellan våglängderna 5000—20000 Å. E. under det motsvarande gränser för lampstrålningen äro 10000—60000 Å. E. Försöket utfördes

för öfrigt på nyss angifna sätt samt gaf som värde på diffusionsförmågan:

1,15 %.

Äfven med antagande af ett fel på två enheter i första decimalen vid dessa bestämningar — och större bör detta fel icke kunna vara — synes häraf framgå, att diffusionsförmågan något aftager för de större våglängderna.

Ofvan anförda försök utfördes på en yta, som blifvit ytterst tunnt sotad. Den öfverdrogs nu med ett så tjockt sotlager, att hvarje spår af den underliggande ytans inverkan på resultaten borde upphöra. Mätningarna upprepades nu åter och gåfvo följande resultat (värdena för solljus äro media ur 2 skilda observationsserier):

Värmekälla.	Betäckning å bolometerns öppning.	Diffusionsförmåga.
Solljus	Platta I	1,25 %
»	Platta II	1,21 %
»	Platta III	1,14 %
Lampa	»	0,82 %.

Resultatet är detsamma som nyss, i det att diffusionsförmågan är mindre i den mån den påfallande strålningen är rik på strålar af stor våglängd. Genom den förnyade sotningen har diffusionsförmågan minskat med omkring 30 % af det förra värdet.

Ehuru nu beskrifna försök ega en preliminär natur, torde de berättiga till följande slutsatser:

1) För att åstadkomma en för mätningar af strålande värme lämplig absorberande yta, bör denna icke blott svärtas genom platinering utan äfven sotas, alldenstund den blott platinerade ytan har en starkare selektiv absorption än den platinerade och svärtade.

2) Äfven den platinerade och sotade ytan synes ega en om ock obetydlig selektiv absorption. Absorptionsförmågan tilltager med tilltagande våglängd.

3) För solstrålning är en platinerad och sotad ytas absorptionsförmåga 98,3 %—98,8 % beroende på sotlagrets tjocklek.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 246.)

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Niederschlagsbeobachtungen der meteorologischen Stationen. Jahrg. 1897: H. 2. 4:o.
Übersicht der Ergebnisse der an den badischen meteorologischen Stationen angestellten Beobachtungen. 1897: 1—12. Fol.
Kjöbenhavn. *Dansk meteorologisk Institut.*
Bulletin météorologique du Nord. Année 1895—97. 4:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. Année 1898: N:o 3. 8:o.
Liège. *Société R. des sciences.*
Mémoires. (2) T. 20. 1898. 8:o.
London. *Meteorological office.*
Summary of the observations made at the stations included in the daily and weekly weather reports. 1897: 1—12. 4:o.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 58 (1898): N:o 5. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 73—74 (1898): 4. 8:o.
Proceedings. Session 1897/98: N:o 193. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 54 (1898): P. 2. 8:o.
— *R. microscopical society.*
Journal. 1898: P. 2. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 63 (1898): N:o 390—392. 8:o.
— *Zoological society.*
Proceedings. 1897: P. 4. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1897: N:o 132. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 4. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1897: 1—12. 4:o.
Resumenes mensuales de las observaciones meteorologicas correspondientes à los años 1891 y 1892. 1897. Fol.
Moscou. *Société impériale des naturalistes.*
Bulletin. Année 1897: N:o 3. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philos.-philol. Cl. Bd 21: Abth. 1. 1898. 4:o.
Sitzungsberichte. Philos.-philol. Cl. 1897: Bd 2: H. 3. 8:o.
» Math.-phys. Cl. 1898: H. 1. 8:o.

(Forts å sid. 314.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 5.
Stockholm.

Notes on the anatomy of a specimen of *Dasypus minutus* without nuchal plates.

By Einar Lönnberg.

(Communicated May 11 1898 by F. A. Smitt).

Among the collections, recently brought home by Mr. P. Dusén from Chili is a small armadillo which he has found on the eastern side of lake Nahuel-huapi. It had just been killed with shotgun when Mr. Dusén found it, and as this happened during the winter which these animals usually pass in their burrows, he could give us no information concerning the habits of the species, which of course would have been very valuable. The animal, which is now kept in the Zool. Museum of the R. University in Upsala, resembles very closely *Dasypus minutus* Desmarest, but differs from that species in not having any nuchal plates. For this reason I believed, at first, that it was a representative of a new species but not having any material for comparison at my disposition I did not dare to decide the question myself. I therefore wrote to Mr. Oldfield Thomas sending him a description of the animal. With his usual kindness Mr. Oldfield Thomas immediately favored me with a letter expressing his opinion. After having examined the specimens in British Museum and finding them varying with regard to the development of the nuchal ring (»no two specimens being precise-

ly alike») he did not think there was any reason to distinguish this armadillo from Nahuel-huapi from *Dasypus minutus*.

Thus, although this little armadillo does not prove to be entirely new to science I think its aberrations however are remarkable enough to be published, and I therefore intend to give a short description of the animal together with some notes on its anatomy, which also presents some interesting features when compared with that of related forms.

Total length including the tail between 32 and 33 cm. Length of tail from anus about 10 cm. Length of carapace along the curvature of the back about 18 cm. Length of skull 69 mm. Width of skull over the zygomatic arches 36 mm. Dental formula: $\frac{8}{8}$. Ears very short.

The muzzle is tapering, and narrow at the end. The frontal shield measures 5 cm. in length by 4 in breadth and is composed of smooth plates. The central ones of these are blackish with lighter margins. The lateral row is not so dark, and the two or three foremost rows are quite yellow. There is no trace of a nuchal band of plates. The first complete band of the scapular shield is movable. Behind that are five immovable bands. The scapular shield thus consists of six complete bands in all. Anteriorly to the first complete scapular band is laterally, on each side, an incomplete band of four plates, and on the left side, anteriorly to that, a rudiment of two plates, but there is nothing corresponding to this on the right side. There are seven movable bands around the middle of the body. The pelvic shield is composed of 9 (or 10) united bands. The terminal plates of the posterior scapular band, those of the movable bands, and on the pelvic shield are large, and more or less falcate. The base of the tail is naked on a space of $1^1/_2$ cm. in length, the other part is ringed with plates. The hairs on the back are numerous and brown. They are most numerous behind the movable bands. Through the eye goes a band of dark mouse brown colour. The lower parts are grayish to dirty white. The

outside of the legs are clothed by long and dense brown hairs. The protecting bristles on the upper eyelid are black and the tuft of long sensitive bristles below the eye are brownish black with lighter tips.

From the measurements given above it can be seen that in our little armadillo the breadth of the skull over the zygomatic arches only constitutes 52 per cent of the cranial length. If we compare this result with the corresponding measurements of GRAY's figure of the skull of *Euphractus minutus* in his paper »Revision of the genera and species of Entomophagous Edentata»[1]) (l. c. p. 377) we shall find a considerable difference. The skull figured by GRAY is, namely, a good deal shorter and broader so that the breadth over the zygomatic arches is not less than 67 per cent of the cranial length. If GRAY's figure is correct this seems to be an important difference, but not having material for comparison I do not know if it can be used as a specific, or even subspecific, character.

Both TURNER (Proc. Zool. Soc., London 1851, p. 214) and GRAY (l. c.) give the dental formula $\frac{8}{9}$ for *Dasypus* (*Euphractus*) *minutus*. Our specimen seems thus to have the number of teeth in the lower jaw more reduced than it usually is in *Dasypus minutus*. The anterior part of the palate as well as the symphysis mandibula is covered by a horny and pigmented skin which is useful as the prey is probably first pinched by this part of the jaws. The palate is provided with 7 crossridges corresponding to the 7 anterior teeth. Behind the seventh ridge the palate is smooth. The four anterior ridges are arcuate with the convexity in front. The 3 posterior ridges, which are less prominent, are straight, and in this part of the palate a slight median ridge is also visible. The tongue shows depressions corresponding to these palate-ridges, but this may depend upon the preservation.

---

[1]) Proc. Zool. Soc., London 1865.

The stomach is not globular as it is described by OWEN from *Tatusia 9-cincta* (Proc. Zool. Soc., Part. I, London 1830—31) nor is it suddenly contracted at the pyloric end as in that form or in *Tolypeutes tricinctus* (MURIE: Trans. Linn. Soc., London, Vol. XXX). It is transversely extended. Its longest diameter is about 7 cm., and the width or depth is at the fundus end just as great as at the pyloric end, with a diameter of not quite 3 cm. The distance from the middle of the stomach to the pylorus is about 1 cm. longer than to the other end. The interior surface of the stomach resembles that of *9-cincta* (OWEN) and *Tolypeutes* (MURIE) to a certain extent. The cardiac portion has a smooth villous membrane, but the pyloric shows a good many, well marked, partly forked rugæ, and the muscular coat is here much thicker. At the pylorus there are two thick semilunar ridges, or valves, situated at opposite sides, but not at the same height, the upper one, that is the one nearer the lumen of the stomach, being much thicker. This one probably corresponds to the protuberance described by OWEN from *Tatusia*. *Tolypeutes* is said to have no valvular apparatus and this is also the case with *Dasypus 6-cinctus*.

The content of the stomach was composed of a blackish mass in which were found legs and wings of beetles and other insects, larvæ and worms. Although killed in wintertime the animal thus seems to have made excursions for the purpose of seeking food.

The length of the small intestines is about 14 cm., measured with a thread along its convolutions while it was yet adherent to the mesenterium. This length is about 8 times that of the carapace. In *Tatusia* the relation between the length of body and that of the small intestines seems to be quite different as OWEN in a specimen which measured 1 foot 1 inch from »the end of the nose to the setting on of the tail», found the small intestines to be »18 feet» in length. RAPP (quoted by ALESSANDRINI) says that in the *Tatusia peba* »la lunghezza del tronco stà a quella dell'intestino come uno a diaci od undici».

Even if different methods of measuring may have given different results it seems to be certain that the small intestines of *Tatusia* are comparatively much longer than those of *Dasypus*. *Dasypus 6-cinctus* has according to OWEN's measurements the small intestines about 10 times longer than *head and* body, thus more than ten times the length of the carapace. According to ALLESSANDRINI's measurements the relation between the small intestines and the carapace seems to be in the same species $9^1/_2$. Although no exact results can be gained from this, it seems however as if *D. minutus* should approach *Tolypeutes* with regard to the shortness of the small intestines. In that form namely, the relation between the small intestines and the carapace seems be about $6^1/_2$ (according to MURIE's measurements).

The great gut is about $3^1/_2$ cm. longer than the length of the carapace. There is no proper ileo-cœcal valve, but the small intestine is narrowed where it enters the great gut, and shows on its inside about half a dozen longitudinal ridges.

There are two lateral colic cœca. They are not quite 1 cm. long and have nearly the same width. This must be compared with FAUVEL's words concerning *D. villosus* (l. c.): »L'intestin assez long ne présente pas de cæcum». It seems to be of interest to know that two so closely allied species as *D. villosus* and *D. minutus* differ in this respect so that the latter has, the former misses colic cœca; the more so as the presence of colic cœca is a feature that has been regarded as common to the whole genus *Dasypus* as well as *Chlamydophorus*.

The great gut and the cœca contained a very large number of small nematods of the genus *Heterakis*. They were however not in such a state of preservation that the species could be determined. This was also the case with two strobilæ of a species of *Tœnia* in the small intestines, and some *Aspidocephali* in the stomach.

The spleen is triangular, with the two basal lobes rounded, but the third median very long and acuminate. It has the usual position, adherent to the left underside of the stomach by

a short gastrosplenic omentum. The pancreas is very long, but thin. Its left restiform portion extends from the spleen along the margin of a prolongation of the omentum gastrolienale in a curve across the abdominal cavity to the mesenterium duodenale in which it is greatly expanded. It opens into the duodenum, not quite $2^1/_2$ cm. from the pylorus.

The liver has 6 greater lobes, three on each side. The right posterior lobe extends far back, and, as in *Tolypeutes* (MURIE), it receives and partly covers the right kidney. It is held in this position by a very strong ligament on the median side. The two upper right lobes, of which the central is larger, are, if counted together, larger than the three left lobes. Of these the two median ones overlap each other and the lateral has on its median surface a deep fissure to receive the lateral margins of the two central left lobes. In the median line, just above the upper end of the posterior right lobe, there are two small lobules. The lower of these is tongue-like and connected with the above mentioned right posterior lobe. The upper is nearly quite free and corresponds to the Spigelian lobe. The gallbladder is situated on the posterior side of the central right lobe, in which it is imbedded. The biliary duct unites with the pancreatic. The situation of the gallbladder is thus similar to the same in *Tolypeutes tricinctus* (MURIE l. c.), but not to that of *Dasypus 6 cinctus* according to OWEN's description.[1]) In the latter this author found the gallbladder to be so deeply imbedded in the liver that it »appeared on the convex side of that viscus». *Dasypus minutus* resembles *Tolypeutes tricinctus* in another and more important character with regard to the liver, namely, in having a great portion of this organ drawn out posteriorly and surrounding the anterior part of the right kidney. This characteristic is by MURIE regarded as »a condition or variation, possibly an adjustment, reconcilable with its remarkable power of body flexion». *Dasypus minutus* is thus in

---

[1]) P. Z. S., part. 1, 1830—31, p. 155.

this respect more adapted for rolling itself into a ball than the other species of *Dasypus*. It must, however, be observed that MURIE, who declares himself as having examined several species of Armadillo among them »the Pichy or little Armadillo *Euphractus* (= *Dasypus*) *minutus*», states that only *Tolypeutes* has the liver shaped after the mentioned fashion (l. c. p. 87). But he might possibly be mistaken, as it does not seem probable that such a character should vary within the same species.

Contrary to what is the case in *Tolypeutes* (MURIE) the right kidney is larger, (measuring 21 mm. in length by 15 in breadth) than the left, the measurements of which are 17 and 11 mm. resp. The situation of the kidneys is also different from the same in *Tolypeutes*, the right and larger kidney being anterior to the left and smaller. The latter lies entirely in the pelvic region and does not extend to the anterior margin of os ilei, but the former has about half its body anterior to os ilei. The suprarenal body on the left side is 7 mm. in diameter and larger than the right. The former has a rounded but flat shape and is free from the kidney, but attached to the spine. The right one lies between the right caudal lobe of the liver and the kidney, and is thus pressed against the latter organ.

The genital organs resemble those of the male *Dasypus villosus* described by FAUVEL (l. c.) and still more those of *Dasypus sexcinctus* according to ALESSANDRINI (l. c. Tav. 13, fig. 8) because the shape of the urinary bladder is short and rounded, not extended into an anterior tip as on FAUVEL's figure. The construction of the generative parts seems, on the whole, to be so alike in the armadillos that this species, with regard to them, does not show any marked resemblance to *Tolypeutes* as it does in other respects, as is seen above.

The brain is not in a good condition, it can however be seen that its general appearance is very much like that of the brain of *Dasypus sexcinctus*, as it is figured by TURNER (Journ. of anat. a. physiol. I, p. 314). The oblique sulcus on the superoparietal cerebral surface is more developed so that it

unites with, and opens into the great longitudinal, lateral sulcus, which corresponds to the only superior one in the brain of *Tolypeutes* (GARROD: Proc. Zool. Soc. 1878, p. 226--27). Anteriorly to this superoparietal sulcus is a small depression. Corpora quadrigemina seem to be covered.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 5.
Stockholm.

Über die dimorphen Blüten von *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. nebst Bemerkungen über die Blütenverhältnisse von anderen Species der Gattung *Curtia* CHAM. et SCHLECHT.

Von GUST. O. A:N MALME.

(Mitgetheilt den 11 Mai 1898 durch V. WITTROCK.)

Heterostyl-dimorphe Blüten sind bei mehreren Gentianaceen schon längst bekannt.[1]). Besonders ist *Hockinia montana* GARDN. der Gegenstand genauer Untersuchungen an Herbarmaterial gewesen, aber über deren Blütenverhältnisse sind ganz verschiedene Ansichten ausgesprochen worden.[2]) Aus diesen Untersuchungen scheint unzweideutig hervorzugehen, dass auch bei dieser Pflanze die Blüten heterostyl-dimorph sind, wenn auch die beiden Blütenformen einigen Variationen unterworfen sind. Ob aber diese Variationen nicht etwa zu verschiedenen Jahres-

---

[1]) Vergl. WELWITSCH, Sertum angolense, pag. 49 (Transact. Linn. Soc. London, XXVII (1869)); KUHN, Einige Bemerkungen über *Vandellia* und den Blüthendimorphismus, (Botanische Zeitung XXV (1867), pag. 65—67); KNOBLAUCH, Beiträge zur Kenntniss der Gentianaceæ (Bot. Centralblatt, LX (1894), pag. 321—334, 353—363, 385—401).

[2]) Vergl. GILG, Über die Blüthenverhältnisse der Gentianaceengattungen *Hockinia* GARDN. und *Halenia* BORCKH. (Berichte der deutsch. botan. Gesellsch., Jahrg. XIII, Heft. 3 (1895), pag. 114—126); KNOBLAUCH, Über die dimorphen Blüthen von *Hockinia montana* und die Variabilität der Blüthenmerkmale bei den Gentianaceen (Ebendas. Heft 5, pag. 289—298).

zeiten auftreten oder von der verschiedenen Beschaffenheit ihrer Standorte abhängig sind, lässt sich mit Hülfe des bis jetzt vorliegenden Materiales gar nicht ermitteln, teils weil es zu gering ist, teils weil bei den Herbarpflanzen (besonders bei denen aus Brasilien) genaue Angaben über die Zeit der Einsammlung und die Beschaffenheit des Standortes oft fehlen.

Bei der Gattung *Curtia* CHAM. et SCHLECHT. wird die Länge des Griffels und der Staubfäden oft als Speciescharakter benutzt. Dies ist z. B. der Fall in der Flora brasiliensis[1]), wo PROGEL für diese Gattung den etwas jüngeren Namen *Schübleria* MART. benutzt. Im Jahre 1894 spricht KNOBLAUCH[2]) die Vermutung aus, dass die Blüten der *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. dimorph seien: »Bei *C. tenuifolia* wechselt anscheinend die Länge und die Insertationsstelle der Filamente. Bei der von mir untersuchten Blüte waren die Filamente kurz und in der Kronröhre an derjenigen Stelle inseriert, die dem Narbengrunde entspricht, während sie nach PROGELS Beschreibung und Abbildung fadenförmig und deutlich unterhalb der Narbe inseriert sein sollen.» In den Berichten der deutschen botanischen Gesellschaft[3]) beschreibt er im folgenden Jahre ausführlich die langgriffeligen Blüten der *Curtia tenuifolia* und hebt besonders hervor, dass die Antheren verklebt sind und das breite Connectiv die Antherenhälften mit einer kurzen stumpflichen Spitze überragt. Kurzgriffelige Blüten standen ihm nicht zur Verfügung, waren ihm aber durch die Beschreibung PROGELS[4]) und dessen Abbildung einigermassen bekannt.

---

1) Fasc. XL (1865), pag. 215—218.

2) Bot. Centralblatt, LX (1894), pag. 358.

3) O. a. O., pag. 297. Die hier gegebene Beschreibung zeigt, dass der Verfasser genau dieselbe Blütenform, wenngleich das Material nicht ganz gut war, zur Untersuchung vorhatte, die ich unten beschreibe Was er im Botanischen Centralblatt sagt, deutet eine andere an. Vergl. die unten erwähnte var. *tenerrima* MALME.

4) — — — — »antheris lanceolatis, connectivo producto mucronatis, liberis, filamentis filiformibus.» — — — — — — »Stylus filiformis brevis». L. c. pag. 218.

Als ich, während meines Aufenthalts in Matto Grosso, am 14. Mai 1894 von einem Ausfluge nach dem Dorfe Guia nach Cuyabá zurückkehrte, hatte ich über einen mit niedrigen Rhynchosporen, Utricularien, Eriocaulaceen und ähnlichen Pflanzen bewachsenen Sumpf oder vielmehr eine feuchte Wiese zu reiten. Obgleich ich schon müde war, Cuyabá noch weit entfernt lag und ausserdem schwarze, gewitterdrohende Wolken im Südwesten emporstiegen, konnte ich doch nicht umhin, daselbst einen Augenblick zu verweilen, da ich von dem Sattel aus zwei Burmannien, *B. flava* MART. und *B. capitata* (WALT.) MART., erblickte. Unter den Pflanzen, die ich ausser diesen beiden sammelte, fand sich auch eine Gentianacee, die sich später als *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. herausgestellt hat. Leider untersuchte ich nicht beim Einsammeln die Blüten genauer und unterliess es auch, einige Individuen in Spiritus zu legen, was ich sonst öfters mit den kleinen Pflanzen that. Später, bei einer Untersuchung meines recht reichen Herbarmateriales, habe ich gefunden, dass die Blüten deutlich heterostyl-dimorph sind. Da ich somit feststellen kann, dass die beiden schon teilweise bekannten Blütenformen dieser Pflanze nicht zu verschiedenen Jahreszeiten auftreten, auch nicht geographischen oder von der Natur des Standortes bedingten Rassen angehören, sondern gleichzeitig und an demselben Standorte vorkommen, erlaube ich mir im folgenden dieselben zu beschreiben und einige Abbildungen von ihnen zu geben.

Die untersuchten Exemplare bilden die Nummer 1624 in den »Phanerogamæ Exped. I^mæ Regnell.»

Was den Habitus betrifft, kann ich mich darauf beschränken, auf die von PROGEL in der Flora brasiliensis gegebenen Abbildungen und seine Beschreibung hinzuweisen. Die von mir mitgebrachten Exemplare stimmen genau mit denselben überein, nur dass an grösseren Individuen die Blätter bisweilen 3-wirtelig sind. Unterschiede der vegetativen Organe zwischen der langgriffeligen und der kurzgriffeligen Form sind nicht vorhanden. Die fünf Kelchlappen, die eine Lenge von (4—)4,5—

5(—5,5) mm. erreichen, haben auch bei beiden ganz dieselbe Form und fast dieselbe Grösse. Anscheinend sind sie bei der kurzgriffeligen Form etwas länger; der Unterschied beträgt jedoch kaum 0,5 mm. Die Länge der Krone ist ebenfalls dieselbe, 8—9(—9,5) mm. Die Form derselben ist dagegen, wie auch zu erwarten stand, etwas verschieden, je nachdem die Blüte kurzgriffelig oder langgriffelig ist. Bei der ersteren ist die Röhre etwas schmäler und erweitert sich erst etwas unterhalb der Spitze der Kelchlappen; bei der anderen ist sie etwas weiter und erweitert sich schon unmittelbar oberhalb der Antheren. Ausserdem sind die Kronlappen der langgriffeligen Blüten merkbar

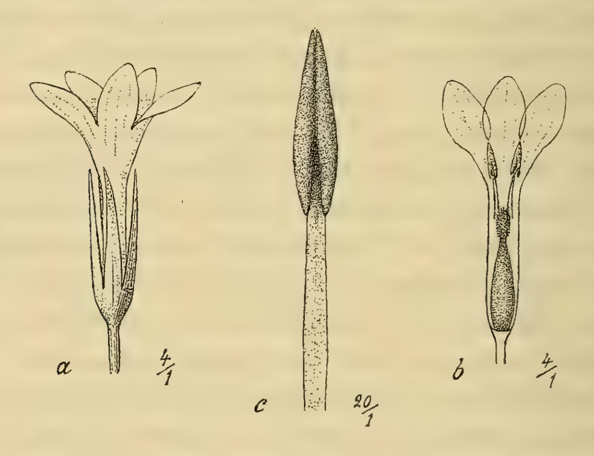


Fig. 1. *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. Kurzgriffelige Form. *a* Blüte. *b* Teil einer aufgeschnittenen Blüte. *c* Staubblatt.

grösser als diejenigen der kurzgriffeligen, während ihre Nervatur sowie die Form dieselben sind. In jeden Lappen gehen drei Nerven, von denen der mittlere der grösste ist und erst oberhalb der Mitte des Lappens und in der oberen Hälfte desselben mit den wenig verzweigten Seitennerven anastomosiert. (Vergl. die Abbild. 1 b und 2 a. Die Nerven sind etwas schematisch gezeichnet.)

Die Staubblätter der langgriffeligen Blüten sind etwas unterhalb der Mitte der Kronröhre inseriert (Abbild. 2 a). Die Staubfäden sind sehr kurz, kaum merkbar; die Antheren auf dem

Rücken angeheftet, intrors, unter sich zu einer Röhre stark verklebt, ungefähr 1,5 mm. lang und 0,5 mm. breit, am Grunde tief ausgerandet, linealisch mit breitem Connectiv, das mit einer stumpflichen, am Rande mit Papillen versehen Spitze die Antherenhälften überragt. Diese haben ungefähr die Breite des Connectivs. Der Pollen ist kugelig oder fast kugelig, (14—)16—17(—19) μ im Durchmesser.

Die Staubblätter der kurzgriffeligen Blüten sind ungefähr an der Mitte der Kronröhre inseriert und vollständig frei. Die Staubfäden sind fadenförmig und nach oben etwas verschmälert, 1,2—1,4 mm. lang; die Antheren auf dem Rücken angeheftet, introrS, 1,1—1,25 mm. lang, 0,25—0,3 mm. breit, am Grunde tief ausgerandet, pfeilförmig mit schmalem, die Antherenhälften

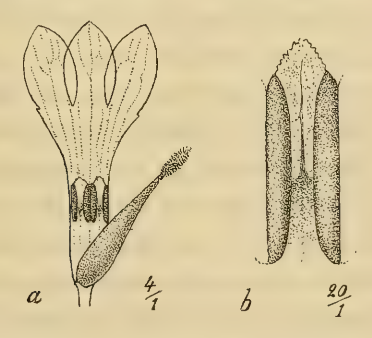


Fig. 2. *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. Langgriffelige Form. *a* Teil einer aufgeschnittenen Blüte. *b* Staubblatt.

nicht überragendem Connectiv.[1] Diese sind spitz, aber ohne pinselförmige Anhängsel. Der Pollen ist wie bei den langgriffeligen Blüten; er kommt aber in den letzteren in beträchtlich grösserer Menge vor, als in den kurzgriffeligen, was vielleicht daraus zu erklären ist, dass er mit erheblicherer Schwierigkeit und grösserer Gefahr verloren zu gehen von den tief sitzenden Antheren der langgriffeligen Blüte nach der ebenfalls tief verborgenen Narbe der kurzgriffeligen transportiert werden muss.

Der Stempel der langgriffeligen Blüte erreicht eine Länge von 5—6 mm. (in der Abbild. 2 a ist er nach der Seite gelegt

[1]) Also nicht »connectivo producto mucronatæ», wie PROGEL angiebt.

worden, damit man die Lage und die Form der Staubblätter sehen kann). Der Fruchtknoten nimmt kaum die Hälfte des Stempels ein und geht äusserlich allmählich in den Griffel über, so dass dieser folglich nicht deutlich abgesezt ist. Die Narbe ist ungefähr 1 mm. lang, schmäler als der Griffel, fast linealisch, walzig, ungeteilt, mit dichten, langen, keulenförmigen Papillen. Der Stempel der kurzgriffeligen Blüte ist 3—3,5 mm. lang. Der Fruchtknoten stimmt mit dem der langgriffeligen Form überein. Der Griffel ist dagegen sehr kurz (kaum 0,1 mm.), die Narbe etwas kürzer (0,75—0,9 mm. lang) und dicker, sonst von demselben Bau wie in den langgriffeligen Blüten.

Völlig reife Früchte finden sich nicht an dem mir zu Gebote stehenden Material. Von der kurzgriffeligen Form steht jedoch eine zu meiner Verfügung, die so reif ist, dass sie sich in der trockenen Luft des Museums zum Teil geöffnet hat. Sie ist länglich oder etwas kegelförmig und, den bleibenden Griffel mit der Narbe abgerechnet, 3,25 mm. lang. Der Fruchtknoten ist also während der Entwicklung der Samen sehr wenig in die Länge gewachsen. Die zahlreichen Samen sind anscheinend normal und gut entwickelt. Von der langgriffeligen Form habe ich nur jüngere Früchte untersuchen können; sie stimmen aber, so weit ich sehen kann, mit denen der kurzgriffeligen genau überein, nur dass der ebenfalls bleibende Griffel samt der Narbe viel länger ist. Solche Früchte sind übrigens schon von PROGEL[1]) abgebildet worden. Während die Krone (Taf. 59, Fig. III: 4) einer kurzgriffeligen Blüte angehört, stammen der Fruchtknoten (Fig. III: 10) und wenigstens die unreifen Früchte (Fig. III: (13)) zweiffellos aus einer langgriffeligen.

Ausser der *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. finden sich noch ein paar Species dieser Gattung im Regnell'schen Herbar.[2]) Um festzustellen, wie sie sich verhalten, habe ich auch ihre

---

[1]) Flora brasiliensis, l. c., pag. 218.

[2]) Vergl. MALME, Ex Herbario Regnelliano, Part. I (Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. Band 24. Afd. III (1898)).

Blüten untersucht. Von *Curtia conferta* (MART.) KNOBL. standen mir mehrere Bogen zur Verfügung. Im Bau der Blüten stimmen sie aber unter sich und mit der von GILG[1]) gegebenen Abbildung vollständig überein. Da die Narbe und die Antheren dieselbe Höhe erreichen, sind wohl auch keine heterostyl-dimorphen Blüten zu erwarten.

Coll. REGNELL III: 1789 ist von GILG als *Curtia tenella* (MART.) KNOBL. bestimmt worden. Da aber die Pflanze in vielen Hinsichten von der von PROGEL gegebenen Abbildung[2]) (und Beschreibung) abweicht, bezweifle ich die Richtigkeit jener Bestimmung. Die Regnellschen Exemplare sind ohne Zweifel Zwergexemplare, wie man sie von mehreren anderen Pflanzen, z. B. *Burmannia bicolor* MART. var. *aprica* MALME, an den hoch gelegenen Lokalitäten in der Umgegend von Caldas findet. Da die Kenntnis von der Gattung *Curtia* noch recht lückenhaft ist, können sie nicht mit Sicherheit bestimmt werden. In meinem Aufsatze »Ex Herbario Regnelliano. Part. I» habe ich die Pflanze unter *C. tenuifolia* erwähnt, obgleich sie kaum zu dieser Species gehört. Die vollständig freien Staubblätter sind ungefähr an der Mitte der Kronröhre inseriert und erreichen nicht den Grund der Kronlappen. Die Antheren sind 0,75—0,9 mm. lang, 0,25—0,3 mm. breit, länglich oder schmal pfeilförmig mit schmalem Connectiv, das mit einer winzigen, hyalinen Spitze die Antherenhälften überragt. Die Staubfäden sind kürzer als die Antheren (kaum 0,5 mm. lang). Der Stempel erreicht dieselbe Höhe wie die Staubblätter; der Fruchtknoten nimmt ungefähr die Hälfte desselben ein. Die Narbe ist walzig oder etwas kegelförmig, wenig dicker als der Griffel. Was die Nervatur der Kronlappen betrifft, ist zu bemerken, dass die beiden Seitennerven mit dem wenig oder gar nicht verzweigten mittleren Nerven nicht anastomosieren. Da in den untersuchten Blüten die Narbe und die Antheren sich in derselben Höhe befinden, so ist auch bei dieser Form dimorphe Heterostylie kaum zu erwarten.

---

[1]) ENGLER und PRANTL, Natürl. Pflanzenfam. IV Teil, 2 Abteil., pag. 91.

[2]) Flora brasiliensis, l. c., Tab. 59, fig. II.

Curtia Malmeana GILG, die ich im Süden von Rio Grande do Sul sammelte, stimmt in Bezug auf die Blüten mit der eben beschriebenen Pflanze genau überein.

An trockneren Lokalitäten als denen der *Curtia tenuifolia* fand sich in der Umgegend von Cuyabá mehrfach, aber immer spärlich, eine andere Form (oder Species) der Gattung — Phanerogamæ Exped. I Regnell. N:o 1602 — die von GILG als *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. var. bezeichnet worden ist. Da sie in mehreren Hinsichten von N:o 1624 — der echten *Curtia tenuifolia* nach der Abbildung PROGELS — abweicht, habe ich sie a. a. O. unter dem Namen *tenerrima* MALME kurz beschrieben. Vorläufig finde ich es angemessen, sie als eine Varietät der *C. tenuifolia* zu betrachten, besonders da das Material, das ich mitgebracht habe — teils Herbar- teils Spiritusmaterial —, weder sehr reich noch sehr gut ist. Eine erneuerte Prüfung an dem Standorte selbst wird jedoch wahrscheinlich zeigen, dass sie lieber als eine eigene Species anzusehen ist. Was die Blüte betrifft, so bietet schon die Krone durch die fast cylindrische Röhre und durch die Form und die Nervatur der Lappen erhebliche Unterschiede dar (Abbild. 3 b). In jeden Kronlappen gehen, wie bei den übrigen Species der Gattung, drei Nerven, von denen der mittlere sich bald verzweigt, aber fast nie mit den recht reich verzweigten Seitennerven anastomosiert. Der obere Teil (die obere Hälfte) der Kronröhre ist an der Innenseite mit zahlreichen, recht langen (bis 0,33 mm. langen), einzelligen, abwärts gerichteten Haaren versehen. Dergleichen Haare finden sich obgleich in geringer Menge, auch bei *C. tenuifolia*, sind aber an aufgeweichtem Material nur mit Schwierigkeit zu sehen. Die Staubfäden sind dagegen vollständig kahl. Die Staubblätter sind etwas unterhalb der Mitte der Kronröhre inseriert. Die Antheren sind 0,65—0,75 mm. lang, 0,15—0,18 mm. breit, länglich, am Grunde tief ausgerandet, mit schmalem Connectiv, das die Antherenhälften nicht überragt. Diese sind spitz, und jede ist mit einem pinselförmigen Anhängsel versehen, das mit dem der nebenliegenden Anthere verklebt ist. Die Staubfäden sind linealisch,

walzig, kürzer als die Antheren (0,35—0,4 mm. lang), aber fast ebenso dick wie diese. Der Pollen wie bei *C. tenuifolia.* Der Stempel erreicht den Grund der Antheren. Der kurze (ungefähr 0,4 mm. lange) Griffel ist von dem Fruchtknoten deutlich abgesetzt. Die fast walzige, 0,5 mm. lange Narbe hat denselben Bau wie bei *C. tenuifolia.*

In den vielen Blüten dieser Pflanze, die ich untersuchte, habe ich keine Abweichungen in den Längenverhältnissen der Staubblätter und des Griffels gefunden; da ausserdem die Antheren und die Narbe beinahe in derselben Höhe stehen, ist mithin das Vorhandensein dimorpher Heterostylie kaum anzu-

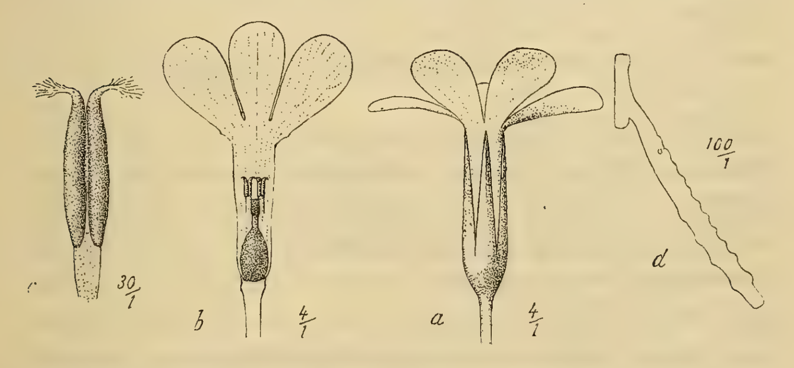


Fig. 3. *Curtia tenuifolia* (AUBL.) KNOBL. var. *tenerrima* MALME. *a* Blüte. *b* Teil einer aufgeschnittenen Blüte. *c* Staubblatt. *d* Haar aus der Kronröhre.

nehmen. Unter den wenigen in dieser Hinsicht untersuchten Species der Gattung bietet somit *Curtia tenuifolia* das einzige Beispiel derartig dimorpher Blüten dar. Dass aber eine weiter ausgedehnte Untersuchung andere Beispiele zu Tage fördern wird, lässt uns die PROGEL'sche Beschreibung[1]) von *Curtia patula* (MART.) KNOBL. vermuten. Da die Heterostylie der Blüten von *C. tenuifolia* jetzt festgestellt worden ist, dürfte man mit vollem Rechte annehmen können, dass die Varietäten der erwähnten Species, *Martiana* PROG. und *Sellowiana* PROG., eben die kurzgriffelige und die langgriffelige Formen sind.

[1]) Flora brasiliensis, l. c., pag. 217.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 296.)

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 4 (1898): Fasc. 3—4. 8:o.
New York. *American museum of natural history.*
Bulletin. Vol. 9 (1897). 8:o.
O'-Gyalla. *K. Ung. meteorologisch-magnetisches Central-Observatorium.*
Beobachtungen. 1897: 1—12. 4:o.
Osnabrück. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Jahresbericht. 12 (1897). 8:o.
Ottawa. *Field-naturalists' club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 11 (1897/98): N:o 12. 8:o.
Palermo. *R. Orto botanico.*
Bollettino. Anno 1 (1897): Fasc. 3—4. 8:o.
Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 5. 8:o.
— *Société de géographie.*
Comptes rendus des séances. 1898: N:o 3. 8:o.
Plymouth. *Marine biological association.*
Journal. N. S. Vol. 5: N:o 2. 1898. 8:o.
Potsdam. *Association géodésique internationale.*
Rapport administratif et financier 1897. 4:o.
Richmond. *Kew Observatory.*
Report. Year 1897. 8:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. (5) Cl. di sc. morali . . . Vol. 6: P. 2 (1898): 1 4:o.
Rendiconti. (5) Cl. di sc. fisiche . . . Vol. 7 (1898): Sem. 1: Fasc. 7—8. 8:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Anno 1897: N:o 4. 8:o.
— *Ministero della pubblica istruzione.*
Indici e cataloghi. 4: Vol. 2: Fasc. 5. 1897. 8:o.
Salem. *Essex institute.*
Bulletin. Vol. 26 (1894): N:o 4—12; 27 (1895): 1—12; 28 (1896): 1—6; 29 (1897): 1—6. 8:o.
San Francisco. *California academy of sciences.*
Proceedings. (3) Zool. Vol. 1: N:o 5; Geol. 1: 3; Bot. 1: 2. 1897. 8:o.
S:t Petersbourg. *Institut imp. des sciences biologiques.*
Archives des sciences biologiques. T. 6: N:o 2. 1898. 4:o.
São Paulo. *Museu Paulista.*
Revista. Vol. 2. 1897. 8:o.
Stonyhurst. *College observatory.*
Results of meteorological and magnetical observations. 1897. 8:o.

(Forts. å sid. 321.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

248. Isomorfi mellan salterna af vismut och de sällsynta jordarterna.

Af GÖSTA BODMAN.

[Meddeladt den 11 Maj 1898 genom P. T. CLEVE.]

Som bekant pläga såsom exempel på äkta isomorfi anföras salterna af enatomigt tallium å ena sidan och kalium, rubidium och cæsium å den andra liksom äfven salterna af tvåatomigt bly å ena sidan och kalcium, strontium och barium å den andra. Betraktar man dessa elements ställningar i det Mendelejeffska skemat, framställer sig den fordran, att äfven isomorfi skall förefinnas mellan salterna af vismut å ena sidan och af scandium, yttrium och lantan å den andra.

På uppmaning af professor CLEVE i Upsala har jag företagit mig att undersöka, huru förhållandet är hvad beträffar isomorfien mellan dessa grundämnens föreningar, om verkligen — såsom man af analogislutet skulle vänta sig — deras salter äro isomorfa.

De föreningar, som bäst lämpa sig för en sådan undersökning, äro nitraten, då ju dessa uppträda i form af stora, väl utbildade kristaller. Visserligen ha de sällsynta jordarternas nitrat den allmänna formeln

$$R^{III}(NO_3)_3 + 6\,aq,$$

under det att vismut ger ett nitrat med sammansättningen

$$Bi(NO_3)_3 + 5\,aq,$$

men detta utesluter ju ingalunda möjligheten af isodimorfi, dem emellan. Som exempel på isodimorfa salter med olika kristallvattenhalt behöfver jag endast anföra sulfaten af kadmium, koppar, järn och magnesium, hvilka vid vanlig temperatur uppträda såsom

$CdSO_4 + 3\,aq$; [1]) $CuSO_4 + 5\,aq$; $FeSO_4 + 7\,aq$ och $MgSO_4 + 7\,aq$.

Beviset för en möjlig isodimorfi mellan nitraten i fråga ville jag finna i en eventuell förmåga hos dem att med hvarandra gifva blandningskristaller af olika kemiska sammansättning och så beskaffade, att ändringen af de fysikaliska egenskaperna hos dessa blandningskristaller skedde kontinuerligt.

Material af några sällsynta jordarter, nämligen yttrium, lantan och neodym ställdes af professor CLEVE till mitt förfogande.

*Yttrium*materialet var i det allra närmaste fullständigt befriadt från närbeslägtade jordarter.

*Lantan*materialet var fullständigt rent.

Äfven med neodym gjordes blandningsförsök, ehuru dess ställning i Mendelejeffs skema ej tyder på isomorfi med vismut.

*Neodym*materialet var i det närmaste, dock ej fullständigt, befriadt från praseodym och samarium. Oxidens färg var nämligen ljusbrun beroende på en ringa mängd inblandad praseodymsuperoxid.

Arbetet gick nu ut på att söka erhålla blandningskristaller mellan vismutnitrat å ena sidan och nitraten af ofvannämda sällsynta jordarter å den andra.

För den skull iordningställdes en mängd lösningar, i hvilka proportionen mellan vismutnitratet och det andra nitratet vexlade. Ur lösningarne upptogos sedan kristallerna, allteftersom de ansköto, specifika vigten bestämdes, hvarefter analys verkställdes på samma kristaller, för hvilka spec. vigten förut bestämts.

---

[1]) RETGERS, Zeitschr. f. Phys. Chemie. Bd 16.

Neodymen visade sig gifva de bästa blandningskristallerna, och anföras längre fram exempel på dessas kemiska sammansättning och spec. vigt.

Specifika vigten bestämdes genom att väga kristallerna dels i luft dels i benzol, hvars spec. vigt var bestämd för olika temperaturer. Med denna metod erhöllos likväl allt för stora variationer, hvarför jag på senare fraktioner begagnat mig af en metod angifven af RETGERS.

Då $Bi(NO_3)_3 + 5\,aq$ har spec. vigten $= 2{,}830$ och för $Di(NO_3)_3 + 6\,aq$ spec. vigten är 2,24, så kan man genom att blanda bromoform (spec. vigten $= 2{,}877$) med benzol (spec. vigten $= 0{,}884$) i hvarje fall lätt åstadkomma en vätskeblandning af samma specifika vigt som blandningskristallen i fråga d. v. s. en vätska, sådan, att kristallen i densamma håller sig sväfvande. Genom att bestämma vätskans specifika vigt medelst vägning i densamma af en sänkkropp af känd specifik vigt och vigt i luft erhöll jag kristallens specifika vigt noggrant bestämd på tredje decimalen.

Efter fullbordad specifik vigtsbestämning aftorkades kristallerna omsorgsfullt, invägdes i en degel och glödgades, då man erhöll summan af de båda oxiderna. Denna oxidblandning löstes i salpetersyra, medan den ännu befann sig i degeln, och befriades sedan på vattenbad från öfverskott på syra. Nitraten nedfördes derefter i en bägare med vatten, hvarvid naturligen en del anhydrobasiskt vismutnitrat förblef uppslammadt; svafvelväte inleddes till full mättning, den utfällda svafvelvismuten affiltrerades, och filtratet fälldes med oxalsyra eller bättre med ammoniumoxalat. Fällningen togs på filtrum, torkades, glödgades och återstoden vägdes, hvarvid man erhöll halten af neodymoxid, Di_2O_3.

Då man känner oxidsumman samt Di_2O_3-halten, kan man lätt beräkna halten af

$$Di(NO_3)_3,\ Bi(NO_3)_3 \text{ och } H_2O.$$

Några exempel på resultaten anföras här nedan.

De kristaller, som upptogos ur lösningar, i hvilka vismutnitrat var öfvervägande, voro svagt men tydligt bleköda och visade i absorptionsspektrum de för neodymnitratet karakteristiska banden.

	Funnet.			Derur beräknas.		
	Spec. vigt.	Oxidsumma.	Di_2O_3.	$Di(NO_3)_3$.	$Bi(NO_3)_3$.	H_2O.
1)	2,775	47,44 %	4,71 %	9,30 %	72,08 %	18,62 %
2)	2,735	46,63 %	6,53 %	12,89 %	68,12 %	19,09 %
3)	2,700	46,16 %	7,03 %	13,88 %	66,49 %	19,63 %

Af dessa analyser beräknas följande molekylära sammansättning:

	$Di(NO_3)_3$.	$Bi(NO_3)_3$.	H_2O.
1)	1	6,5	36,5
2)	1	4,4	26,9
3)	1	4,0	25,8.

Såsom synes, är i dessa kristaller vismut öfvervägande. Man kan då vänta, att blandningskristallernas vattenhalt skall följa det vanliga vismutnitratets, d. v. s. vara 5 aq.

Analyserna visa, att detta äfven är förhållandet, och man torde derför kunna skrifva dessa blandningskristaller under den gemensamma formeln

$$(Bi, Di)\,(NO_3)_3 + 5\,aq.$$

Ur lösningar, i hvilka neodym var i hög grad öfvervägande, erhöllos kristaller af helt olika yttre utseende såväl till kristallhabitus som till färg, hvilken senare var betydligt starkare röd än vid de neodymfattiga blandningskristallerna.

Exempel på dessa mörkare kristallers kemiska sammansättning och spec. vigter anföras här nedan

	Funnet.			Därur beräknas.		
	Spec. vigt.	Oxidsumma.	Di_2O_3.	$Di(NO_3)_3$.	$Bi(NO_3)_3$.	H_2O.
4)	2,348	39,95 %	29,48 %	58,20 %	17,78 %	24,02 %
5)	2,403	40,94 %	25,34 %	50,03 %	26,49 %	23,48 %
6)	2,474	42,41 %	23,89 %	36,57 %	40,57 %	22,96 %

Den molekylära sammansättningen blir för dessa kristaller:

	$Di(NO_3)_3$.	$Bi(NO_3)_3$.	H_2O.
4)	3,92	1	29,6
5)	2,26	1	19,4
6)	1,08	1	12,4.

I dessa kristaller förekommer neodymnitratet, åtminstone molekylärt, öfvervägande, hvarför här kristallvattenhalten rättar sig efter neodymnitratet, d. v. s. den är = 6 aq.

Dessa senare blandningskristaller torde därför lämpligen skrifvas under formeln

$$(Di, Bi)(NO_3)_3 + 6\,aq.$$

Af dessa exempel framgår således, att det råder isodimorfi mellan nitraten af vismut och neodym, i det att det stabila $Bi(NO_3)_3 + 5$ aq är isomorft med den labila formen $Di(NO_3)_3 + 5$ aq, samt det stabila $Di(NO_3)_3 + 6$ aq är isomorft med den labila formen $Bi(NO_3)_3 + 6$ aq.

Ur de lösningar af vismutnitrat, hvilka voro försatta med lantannitrat och yttriumnitrat, hafva äfven kristaller erhållits, hvilkas varierande specifika vigt och kemiska sammansättning tyda på, att äfven här erhållits blandningskristaller med varierande sammansättning. Äfven i detta fall råder således isodimorfi mellan vismutnitrat å ena sidan och lantannitrat resp. yttriumnitrat å den andra.

Hvad de kristallografiska förhållandena beträffar, äro dessa ännu ej fullt utredda, men hoppas jag senare kunna meddela om dem. För öfrigt har jag för afsikt att mera ingående undersöka isomorfiförhållandena mellan vismutsalterna å ena sidan och i allmänhet motsvarande salter af de sällsynta jordarterna å den andra.

Komma äfven då att erhållas blandningskristaller, torde väl detta tala för, att de sällsynta jordarterna böra i det Mendelejeffska skemat införas såsom en enda, stor grupp närmast efter barium, något som ju äfven RETGERS föreslagit i Zeitschr. f. Phys. Chemie Bd. 16. I det skema RETGERS där uppställer

intager dock vismut en plats, som kanske snarare borde vara i den vertikalrad som börjar med bor. Genom denna förflyttning af vismut skulle också den af RETGERS påpekade skarpa skilnaden mellan MENDELEJEFFS skema och RETGERS' ändringsförslag bortfalla.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 314.)

Sydney. *Board for international exchanges.*
Historical records of New South Wales. Vol. 5. 1897. 8:o.
— *Geological survey of New South Wales.*
Records. Vol. 5: P. 4. 1898. 4:o.
Mineral resources. N:o 1—2. 1898. 8:o.
Tokyo. *Societas zoologica.*
Annotationes zoologicæ japonenses. Vol. 2: P. 1. 1898. 8:o.
— *Central meteorological observatory.*
Weather chart. 1898, Febr. Fol.
Toronto. *Meteorological service.*
Monthly weather review. 1897: 1, 3—6, 8—12. 4:o.
Utrecht. *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
Onweders, optische verschijnselen, enz. in Nederland. D. 18 (1897). 8:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
The Smithsonian institution, 1846—1896. The history of its first half-century. 1897. 8:o.
LANGLEY, S. P., The astrophysical observatory. 1897. 8:o.
Miscellaneous collections. Vol. 38: N:o 1084. 1897. 8:o.
— *Weather bureau.*
Monthly weather review. 1897: Summary; 1898: 1. 4:o.
— *U. S. Coast and geodetic survey.*
Report of the superintendent. Year 1895/96. 4:o.
Wien. *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 48 (1898): H. 2. 8:o.
Zürich. *Sternwarte des eidg. Polytechnikums.*
Publikationen. Bd 1. 1897. 4:o.

Af utgifvarne:

Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. 1898: N:o 1. 8:o.
Tidskrift för skogshushållning, utg. af C. G. HOLMERZ. Årg. 26 (1898): N:o 1—2. 8:o.
Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrsg. von A SEIDEL. Jahrg. 3 (1897): H. 3. 8:o.

Af författarne:

ARNELL, H. W., Musci novi. Caen 1898. 8:o.
— 4 småskrifter.
BOHLIN, K., Om fotografisk bestämning af latituden. Sthlm 1898. 12:o.
EKHOLM, N., L'expédition polaire en ballon de M. S.-A. Andrée. Paris 1898. 8:o.
— Om Andrées ballongfärd under de två första dagarne. Sthlm 1897. 8:o.
CHREE, C., Notes on thermometry. Lond. 1898. 8:o.

Af författarne:

CONWENTZ, Aus Schwedens Natur und Wissenschaft. Danzig 1898. 8:o.

LIVERSIDGE, A., 3 småskrifter. 8:o.

NEUSTROEV, A. N., Ukazatel k Russkim povremennym izdanijam i sbornikam za 1703—1802. St. Petersb. 1898. 8:o.

Zukunft. Aussichten für die Luftschiffahrt von A. P. Wien [1898]. 4:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 6.

Onsdagen den 8 Juni.

INNEHÅLL:

Föredrogos skrifvelser från Kongl. Finans Departementet med tillkännagifvande af Kongl. Maj:ts bifall till gjorda underdåniga framställningar derom, att foglar finge under eljest förbjuden jagttid för Riksmuseets räkning skjutas i trakten af sjön Tåkern i Östergötland af Kollegan vid Vadstena läroverk V. A. ENGHOLM och i trakten af Gellivare af Konservatorn C. O. ROTH.

Till införande i Akademiens skrifter antogos följande afhandlingar:

i Akademiens Handlingar:

»Rhodolocera Ethiopica. Die Tagfalter des ethiopischen Faunengebietes. Eine systematisch-geographische Studie», af Professor CHR. AURIVILLIUS;

i Bihanget till Handlingarne:

1:o) »Poissons de l'expédition scientifique à la Terre de Feu sous la direction du Docteur O. NORDENSKJÖLD», af Professor F. A. SMITT; 2:o) »Ueber eine sonderbare, am 2. Januar 1897 beob-

achtete Nordlichterscheinung», af Professor K. BOHLIN; 3:o) »Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit», af Professor S. ARRHENIUS; 4:o) »Ueber einige von KNUT BOHLIN in Pite lappmark und Vesterbotten gesammelte Süsswasseralgen», af Professor W. SCHMIDLE; 5:o) »Icke-elektrolyters inverkan på reaktionshastigheten vid saponifikation af etylacetat», af Kandidat C. KULLGREN; 6:o) »Catalogue of Linnean Type-Specimens of snakes in the Royal museum in Stockholm», af Doktor L. G. ANDERSSON; 7:o) »Om katodstrålarnes förmåga att urladda elektriskt laddade kroppar», af Kandidat A. ENSTRÖM;

i Öfversigten:

De i innehållsförteckningen angifna två afhandlingar.

Herr BOHLIN redogjorde för ofvannämnda af honom sjelf författade afhandling.

Genom anställdt val kallade Akademien Nordiska Museets grundläggare och föreståndare Filosofie Doktorn ARTUR HAZELIUS till sin ledamot.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Af H. MAJ:T KONUNGEN.

Expéditions scientifiques du Travailleur et du Talisman pendant les années 1880—83. Paris. 4:o.
VAILLANT, L., Poissons. 1888.
PERRIER, E., Échinodermes. 1894.
LOCARD, A., Mollusques testacés. T. 1. 1897.
The Fauna of British India. London. 8:o.
BLANFORD, W. T., Birds. Vol. 4. 1898.

Stockholm. *Karolinska institutet.*
2 dissertationer. 8:o.
— *Sveriges geologiska undersökning.*
Ser. C: Afhandlingar och uppsatser: N:o 145, 161 a—b, 163—171, 173—175. 1895—98. 8:o & 4:o.
Upsala. *Akademiska sjukhuset.*
Årsberättelser. N:o 13—14 (1895—96). 8:o.

(Forts. å sid. 369.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 6.
Stockholm.

Studier öfver vegetationen i mellersta Skandinaviens fjälltrakter.

1.

Om tundraformationer i svenska fjälltrakter.

Af Rutger Sernander.

[Meddeladt den 8 Juni 1898 genom Th. M. Fries.]

Om begreppet tundra och Dicranum-tundran på Kola-halfön.

Tundra är såväl inom den geografiska som botaniska litteraturen ett mycket sväfvande begrepp. [1])

En del forskare taga det i anslutning till Middendorff mycket vidsträckt, som en benämning för hela det arktiska slättlandet på norra halfklotets tvenne kontinenter ofvan skogsgränsen.

Andra däremot vilja inskränka det såsom namn för vissa karaktäristiska växtformationer inom detta område. Så kallar Grisebach endast de partier däraf tundra, som på grund af markens ringa värme hysa den allra fattigaste floran.

Ur geografisk synpunkt är det mycket, som talar för att taga tundra i dess mäst vidsträckta betydelse, att låta den

[1]) Jmfr t. ex. Th. von Middendorff, Reise in dem äussersten Norden und Osten Sibiriens. Vierte Lieferung. 1864.

A. Grisebach, Die Vegetation der Erde. Erster Band. 1872.

C. J. von Klinggräff, Zur Pflanzengeographie des nördlichen und arktischen Europas. Zweite Auflage. 1878.

F. R. Kjellman, Om växtligheten på Sibiriens nordkust. Vega-expeditionens vetenskapliga iakttagelser. Bd. I. 1882.

Alfr. Nehring, Ueber Tundren und Steppen. 1890.

E. Warming, Plantesamfund. 1895.

gamla världens skogsområde begränsas mot norr och söder af skoglösa områden: *tundra* och *stepp*.

I den botaniska litteraturen visar det sig emellertid en afgjord tendens att bevara namnet tundra endast för vissa af det arktiska gebietets växtformationer. I anslutning härtill torde det enligt min tanke vara lämpligast att begränsa namnet till sådana formationsgrupper, som i högre eller lägre grad äro för detta gebiet egendomliga och icke eller mera sällsynt förekomma i andra regioner. Då t. ex. GRISEBACH, som anser tundran upptaga större delen af området, vill med sin definition egentligen utesluta endast *gräs-* och *örtrika* formationer samt *busksnår*, vill jag ur hans tundrebegrepp ytterligare utsöndra WARMINGS »*Fjældmarker*», *kärr*, *mossar* och *hedformationer* (WARMINGS »*Lyng-Hede*»).

Jag skulle sålunda som *tundra* vilja uppfatta:

De formationer — hufvudsakligen förekommande inom norra halfklotets kontinentala arktiska område — på torr eller ej starkt försumpad mark, i hvilka bottenskiktet är slutet af mossor och lafvar, men fältskikten däremot, om de ej saknas, äro bildade af glest stående fanerogamer.

Efter *mossornas* och *lafvarnes* rol i bottenskiktet erhålla vi tvenne hufvudafdelningar: *mosstundra*, där mossorna, och *laftundra*, där lafvarne dominera.

Om man utesluter de öfvergångar till andra växtsamhällen, exempelvis till de egentliga försumpningarnes och hedarnes växtlighet, som naturligtvis i stor rikedom förekomma, torde tundran, tagen i ofvanstående betydelse, innefatta det arktiska kontinentalområdets säregnaste vegetationstyper.

På några ställen i V. F. BROTHERUS' Botanische Wanderungen auf der Halbinsel Kola (Bot. Centralblatt, Bd. 26) och än mer i A. O. KIHLMANS Pflanzenbiologische Studien aus Russich Lappland (Acta Societatis pro Fauna et Flora fennica. T. VI. N:r 3) meddelas anteckningar om en art af Kola-halföns

mosstundra, som bäst torde benämnas *Dicranum-tundra*, och som jag efter dessa skildringar skulle vilja karakterisera sålunda (Jmfr BROTHERUS l. c. p. 284 och KIHLMAN l. c. pp. 8, 9, 15, 118, 120, 124, 125 och 129):

Hvarandra närstående jämförelsevis artrika formationer, i hvilka bottenskiktet bildas af *Dicrana* mäst *D. elongatum* SCHLEICH., *tenuinerve* ZETTERST. och *scoparium* (L.) HEDW. med inströdda andra mossarter såsom *Jungermannier*, *Polytrichum juniperinum* WILLD. och *Hypnacéer* samt lafvar såsom *Cetrarier*, *Cladonier* och *Nephroma arcticum* (L.). Fältskikten äro mycket glesa, hufvudsakligen bildade af *ris*, särskildt *Empetrum*. De örter och gräs, som här finnas, äro enstaka, ofta sterila.

Dicranum-tundran är svagt torfbildande (KIHLMAN l. c. pp. 8 och 9), men förekommer icke på egentligen försumpad mark. De af densamma bildade torflagren växla i mäktighet mellan ett par cm. och 5 dm. (Orlow, KIHLMAN l. c. p. 9).

I dess utvecklingshistoria spelar *Lecanora tartarea* (L.) ACH. en viktig rol. Denna laf utbreder sig nämligen öfver stora partier af *Dicranum*-täcket och dödar detsamma under sin krusta.

Till följd häraf uppstå tork- och frostsprickor, genom hvilka vindarne få makt att rycka upp stora stycken af tundran och blotta det underliggande gruset. Den återväxt af formationen, som på dessa bara fläckar äger rum, skildrar KIHLMAN (l. c. p. 129) sålunda: Lefvermossorna bilda förposterna; i deras matta inrycka risen genom vandringsskott från de omgifvande, kvarblifna partierna. Mellan risen uppväxa bladmossor och bladlafvar. Sist komma busklafvarne, och formationen står nu åter färdig för att eventuelt genom öfverhandtagandet af *Lecanora tartarea* (L.) ACH. och dess upprifvande för vindarne en gång i framtiden ånyo få börja sin utvecklingsgång.

Men *Dicranum*-tundran kan äfven utveckla sig ur andra växtsamhällen. KIHLMAN beskrifver (l. c. p. 118) *Sphagnum*-formationer, som i stor utsträckning visa denna utvecklingsgång, och det är ej ovanligt, att under *Dicranum*-tundran hitta gammal *Sphagnum*-torf.

Till och med det motsatta förhållandet kan inträda. Från Orlow skildrar KIHLMAN (l. c. p. 120) fläckar af *Sphagnum nemoreum* SCOP., som utbreda sig i en *Dicranum elongatum*-formation. Dessa synas dock vara af efemär natur.

Från Grönland omnämner E. WARMING [1]) en formation, som erbjuder åtskilliga beröringspunkter med Kola-halföns *Dicranum*-tundra. Den uppträder på nordsluttningen af Præstefjæld vid Holstenberg i form af en yppig mossmatta med inströdda busk- och bladlafvar. Mossorna utgöras af *Dicrana* (t. ex. *D. elongatum* SCHLEICH. och *scoparium* (L.) HEDW.), *Polytrichacéer*, *Jungermanniacéer* etc.

Dicranum-tundra i Herjeådalen och Jämtland.

Som *laftundror* kan man anse de med hedformationerna mycket beslägtade, allmänt utbredda växtsamhällen från våra fjälltrakter, hvilka R. HULT [2]) kallat *Cladineta pura* och *Alectorieta pura*. Den sparsamma utbildningen af *mosstundra* torde däremot vara en af de viktigaste skiljemärkena mellan den arktiska och den skandinaviskt-alpina vegetationen.

Fullt absolut är dock ej denna brist. Jag lemnar å sido, om man får anse en del mindre moss-samhällen på klippgrund samt de af R. HULT [2]) beskrifna *Sphærocephaleta turgida* och *Cesieta pura* för tundror; jag syftar härvidlag närmast på de viktiga *Polytrichum*- och särskildt *Dicranum*-tundrorna.

I såväl *regio alpina superior* som *inferior*, från 1350 m. ö. h. ner till trädgränsen har jag sett denna senare formation på några fjäll i Jämtland och Härjeådalen. Då denna formation ur flere synpunkter erbjuder åtskilligt af intresse, ej minst därför, att helt säkert mosstundran under föregående skeden af den skandinaviska vegetationens utvecklingshistoria i denna ägt en viss betydelse, har jag från den senare provinsen utvalt en typisk förekomst, som jag ansett förtjena en mera ingående växtgeografisk och biologisk analys.

[1]) Om Grønlands Vegetation. Meddelelser fra Grønland 12. 1888, p. 133—134.
[2]) Die alpinen Pflanzenformationen des nördlichsten Finlands. Medd. af Societas pro Fauna et Flora fennica. 14. 1887.

Gråstöten kallas en låg mindre fjällhöjd af sparagmitskiffer invid sjön Malmagen (755 m. ö. h.) på nordöstra sluttningen af de mellan Norge och Härjeådalen belägna Rutfjällen. De efterföljande vegetationsskildringarne härifrån äro grundade på uppteckningar och samlingar från tvenne besök 1895 $^{11}/_{7}$ och 1896 $^{22}/_{6}$.

Skogsregionen på dess sluttning består af *Betuleta geraniosa* med *Ranunculus aconitifolius* L., *Betuleta hylocomiosa*, *Chordorrhizeta* och *Cariceta amblystegiosa*, *Sphagneta*, gråvidesnår samt källdragsformationer med *Saxifraga stellaris* L. och *Cerastium trigynum* VILL.

Videregionen upptages dels af gråvidesnår och hydrofila formationer med t. ex. *Viola palustris* L., *Phegopteris alpestris* (HOPPE) METT., *Carex alpina* SW. etc., dels af fjällhed, i hvilken *Rubus Chamæmorus* L. var vanlig. Ej långt under den af fjällhed och laföfverdragna klippblock upptagna toppen hade vegetationen en egendomlig karakter, som gör den fullt identisk med den nyss skildrade *Dicranum*-tundran på Kola-halföns ishafskust. Nedåt sträckte den sig ett par tiotal meter, men dock ej fullt ner till trädgränsen (c. 870 m. ö. h.).

Den här uppträdande *Dicranum*-tundran växer dels på afsatser, dels på sluttningar på den mot NO och N vettande bergssluttningen. Dess underlag är antingen naken häll eller vittringsgrus af ända till 10 cm. mäktighet. Förekomstsättet erbjuder många analogier med den nyss omnämda af WARMING skildrade mosstundran på Præstefjæld.

I sin typiska form är den sammansatt af i lägsta fältskiktet rikliga *ris* samt enstaka *örter* och *gräs* och i bottenskiktet ymniga *mossor* samt rikliga — ymniga *lafvar*. De ingående arterna äro:

Fanerogamer:

Arctostaphylos alpina (L.) SPRENG.

Azalea procumbens L.

Betula nana L.

Carex rigida GOOD.

Diapensia lapponica L.
Empetrum nigrum L.
Myrtillus nigra GILIB.
» *uliginosa* (L.) DREJ.
Pedicularis lapponica L.
Phyllodoce coerulea (L.) BAB.
Rubus Chamæmorus L.
Salix glauca L.
» *herbacea* L.
Vaccinium Vitis idæa L.

Mossor:

Blepharozia ciliaris (L.).
Cephalozia bicuspidata (L.) DUM.
Dicranum scoparium (L.) HEDW.
Harpanthus Flotowii NEES.
Hylocomium proliferum (L.).
» *parietinum* (L.).
Jungermannia gracilis SCHLEICH. [1])
» *lycopodioides* WALLR. v. *Flörkei* (W. M.).
» *minuta* CRANTZ.
» *ventricosa* DICKS.
Polytrichum juniperinum WILLD.

Lafvar:

Cetraria aculeata (SCHREB.) FR.
» *cucullata* (BELL.) ACH.
» *islandica* (L.) ACH.
» *nivalis* (L.) ACH.
Cladina rangiferina (L.).
» *silvatica* (L.).
Cladonia coccifera (L.) SCHÆR. *α communis* TH. FR.
» *decorticata* (FLK.) TH. FR. *α macrophylla* (SCHÆR.) TH. FR.

---

[1]) Vid bestämmandet af lefvermossorna har Konservator K. A. TH. SETH och vid bestämmandet af algerna Prof. G. LAGERHEIM vänskapsfullt lemnat mig hjälp

Cladonia gracilis (L.) COEM. *α chordalis* FLK.
» » » *δ cornuta* (L.) SCHÆR.
» *uncialis* (L.) FR.
Nephroma arcticum (L.).
Lecanora hypnorum (HOFFM.) ACH.
» *tartarea* (L.) ACH.
Lecidea Diapensiæ TH. FR.
Peltidea aphtosa (L.) NYL.
Peltigera canina (L.).
Sphærophorus fragilis (L.).
Stereocaulon paschale (L.) FR.

Svampar:

Sphæropezia Empetri (FUCK.) REHM och andra *pyrenomyceter* på *Empetrum.*

Diverse *pyrenomyceter* på *Vaccinium*-bladen.

Alger:

Botrydina vulgaris BRÉB.
Nostoc sp.
Prasiola furfuracea (MERTENS) MENEGH.

En jämförelse med KIHLMANS anteckningar visar att de flästa af Gråstöts-tundrans fanerogamer, mossor och lafvar finnas äfven i Kola-halföns *Dicranum*-tundra. De största olikheterna i deras sammansättning ligga däri, att de i den sistnämda tundran så viktiga *Dicranum elongatum* SCHLEICH. och *tenuinerve* ZETTERST. här saknas, samt att *Lecanora tartarea* (L.) ACH. äger så liten betydelse.

Formationen företedde öfvergångsformer till följande växtsamhällen.

Liksom vid Orlow funnos här och där små fläckar, i hvilka *Sphagnum nemoreum* SCOP. gjort betydliga inkräktningar på bottenskiktets lafvar och mossor.

Alla de uppräknade fanerogamerna ingå jämväl som karaktäristiska element i de centralskandinaviska fjällhedsformationerna. Dessa skilja sig från *Dicranum*-tundran genom tätare fältskikt, men glesare bottenskikt med delvis andra lafvar och framförallt

mossor. Det funnos äfven här partier, som genom risens ökade frekvens i fältskikten och mosstäckets uppluckring visade öfvergångar till den omgifvande fjällheden.

I de Herjeådalska fjällens videregion finnes ofta på mera fuktig mark en *Myrtillus nigra*-formation, påminnande om undervegetationen i vissa af den öfre skogsregionens *Betuleta. Myrtillus nigra* GILIB. är riklig eller mera; för öfrigt finnas i fältskikten *Anthoxanthum odoratum* L., *Betula nana* L., *Pedicularis lapponica* L., *Phegopteris alpestris* (HOPPE) METT., *Polygonum viviparum* L., *Rumex Acetosa* L., *Salix glauca* L., *Solidago Virgaurea* L., *Stellaria borealis* BIGEL., *Trientalis europæa* L. m. fl., och i bottenskiktet *Dicranum scoparium* (L.) HEDW., *Hylocomium proliferum* (L.), *Jungermannia minuta* CRANTZ och *quinquedentata* HUDS., *Nephroma arcticum* (L.), *Polytrichum commune* L. och *juniperinum* WILLD. m. fl. Formationen tyckes i många fall utveckla sig till gråvidesnår af *Salix lapponum* L. och *glauca* L. med *Anthoxanthum odoratum* L., *Cornus suecica* L., *Geranium silvaticum* L., *Luzula campestris* (L.), *Melampyrum pratense* L., *Myrtillus nigra* GILIB., *Ranunculus acris* L., *Rumex Acetosa* L., *Solidago Virgaurea* L. samt *Sphagnum Girgensohnii* RUSSOW och *nemoreum* SCOP. i bottenskiktet.

Äfven till denna *Myrtillus nigra*-formation funnos öfvergångsformer. Här var *Hylocomium proliferum* (L.) vanligast i det af ymniga mossor och rikliga lafvar sammansatta bottenskiktet. *Salix glauca* L. och *Betula nana* L. gingo, den förra strödd och den senare tunnsådd, upp som låga buskar; risen voro hufvudsakligen företrädda af riklig *Myrtillus nigra* GILIB. Örter och ormbunkar voro strödda: *Pedicularis lapponica* L., *Phegopteris alpestris* (HOPPE) METT., *Rumex Acetosa* L., *Solidago Virgaurea* L., *Stellaria borealis* BIGEL. och *Trientalis europæa* L.

Dessa trenne öfvergångsformationer torde kunna hålla sig jämförelsevis oförändrade ganska länge. Emellertid tyckas de långsamt utveckla sig till respektive *Sphagneta myrtillosa* HULT, *Empetreta lichenosa* HULT och *Saliceta herbida* HULT.

I sin typiska form tyckes *Dicranum*-tundran på Gråstöten vara en slutformation. I dess vidare utveckling komma lafvarne, som sedermera skall visas, att tilltaga i frekvens. På det stora hela taget torde dock ej under närmast kommande tider formationens sammansättning i väsentlig grad blifva ändrad.

Ur Dicranum-tundrans biologi.

En af de största svårigheterna vid analyser af växtformationer är att erhålla en exakt värdemätare på de ingående arternas frekvensgrader. Den inom Skandinavien vanliga NORRLIN-HULTSKA metoden att använda en graderad skala på fem grader — enstaka, tunnsådd, strödd, riklig och ymnig — är i en mängd fall synnerligen både praktisk och användbar och har gjort vår växtgeografiska forskning betydliga tjänster, men lemnar för många subjektiva felkällor för att kunna brukas vid mera detaljerade analyser.

Att räkna antalet exemplar eller individ på profytorna för att på så sätt erhålla absoluta, komparabla talvärden synes i början vara ett omöjligt och opraktiskt företag. De skäl, som särskildt tala häremot, äro:

Ett lika antal individ af olika arter kan på grund af sin olika storlek intaga himmelsvidt skilda volymer af det ifrågavarande växtsamhällets lefvande massa, och ej häller är individbegreppet tillräckligt objektivt för att användas såsom grundval.

Utplockandet af de med hvarandra ofta tätt sammanväfda exemplaren erbjuder för stora tekniska svårigheter.

Med allt erkännande af det berättigade i dessa invändningar skulle jag dock vilja påstå, att man i vissa fall och med ett förståndigt användande af de erhållna värdena dock skulle kunna afvinna en sådan räknemetod stora resultat.

Som morfologiskt individ får man räkna hvarje skottsystem (eller skott) i ett växtsamhälle, som för ett själfständigt näringslif och icke med lefvande skottpartier sammanhänger med moderväxten. Det är antalet sådana individ i *samma skikt* af formationerna, som närmast skola med hvarandra jemföras.

Men äfven individen i samma skikt kunna vara af betydligt olika storlek. De massor, exemplaren intaga, böra därför, tycker man, hällre jämföras, än deras antal. För skogsskikten är denna massuppskattning i viss mån använd bland forstmännen. Ett annat sätt att erhålla mera kommensurabla talvärden, som för de lägre skikten skulle kunna vara brukbart, är att till individens antal äfven bifoga deras vikt och då i lufttorrt tillstånd. Detta system bör användas, då vid profytans utskärande *bitar* af individ medkomma, då dessa annars vid enbart individräkning alltför mycket skulle höja den eller de ifrågavarande arternas frekvens.

Utplockandet af de särskilda individen kan möta så stora svårigheter, att t. ex. icke i samma profyta af en ängsmatta *alla* de här ingående individen — äfven med användande af all möjlig omsorg — kunna från hvarandra utredas. Vid de försök jag anstält häröfver tyckas dock, om man specialiserar sig på några få arter i taget, dessa kunna utplockas med sammanhängande skottsystem. Genom att fördela de olika arternas utpreparering på flere förståndigt utvalda profytor, *kan* man sålunda för deras individmängd erhålla tämligen kommensurabla talvärden. Af tekniska svårigheter torde man oftast blifva tvungen att vid vägningen utesluta rotsystemet, som i de flästa växtsamhällen helt enkelt icke kan fullständigt utprepareras. [1])

Jag gör mig inga förhoppningar att den nu antydda frekvensuppskattningsmetoden skall för rent växtgeografiska ändamål få någon mera allmän användning, ehuru den, om så blefve fallet, kanske i hög grad skulle omändra de gängse begreppen om vår vegetations värkliga sammansättning. Emellertid vore det synnerligen önskligt, att den formationsdissikering, som medföljer denna metod, mera allmänt komme till användning. Helt säkert skall ökad kännedom om de i denna vår vegetation ingående arternas egentliga skepnad samt framförallt kunskap om, huru kampen för tillvaron och kommensalismen växterna emellan

---

[1]) Angående svårigheterna att fullständigt utpreparera rotsystem jmfr t. ex. G. VOLKENS, Die Flora der Aegyptisch-arabischen Wüste 1887. Kap. III.

faktiskt gestaltar sig i naturen, rikligt ersätta det onekligen högst besvärliga tekniska arbetet.

Ur den nyss skildrade *Dicranum*-tundran på Gråstöten utskuros trenne profytor eller rättare profbitar. Resultatet af den analys, de på antydda grunder blifvit underkastade, är detta.

N:r 1.

Är 16 □-cm. och håller med den underliggande torfven, som hvilar på vittringsgrus, 4 cm. i höjd. (Insamlad 1896 22/6).

Den torfartade undre delen bestod af torfjord, något sand samt följande döda växtdelar:

Empetrum nigrum L.: stjelkar, blad, rötter och fruktstenar.

Betula alba BECHST. *v. subalpina* LARSS.: hängefjäll och frukter.

Betula nana L.: blad.

Salix herbacea L.: blad.

Dicranum scoparium (L.) HEDW., *Polytrichum juniperinum* WILLD., *Jungermannia minuta* CRANTZ och andra *Jungermanniacéer*: bladfragmentbärande stjelkar, ofta i samband med lefvande skott.

Nephroma arcticum (L.): svarta bitar ofta i samband med den lefvande bålen.

Cladina rangiferina (L.): svarta skottbitar.

I den lefvande växtmattan räknades följande morfologiska individ, eller om man så vill individualiserade skott:

Lägsta fältskiktet.

Empetrum nigrum L.: 4 grenar af stora i de till profbiten angränsande delarne sig utbredande individ. (Liksom N:r 2 med sparsamma *pyrenomyceter*). — Vigt (rotsystemet medräknadt) 0,217 gr.

Bottenskiktet.

Mossor:

Dicranum scoparium (L.) HEDW.:	425 individ.	—	Vigt 0,645	gr.
Cephalozia bicuspidata (L.) DUM.:	4 »	—	» 0,0006	»
Hylocomium proliferum (L.): . .	4 »	—	» 0,0135	»
Jungermannia lycopodioides WALLR. *v. Flörkei* (W. M.):	2 »	—	» 0,0007	»

Jungermannia minuta CRANTZ: .	43 individ.	—	Vigt	0,0044 gr.
Polytrichum juniperinum WILLD.:	11 »	—	»	0,066 »
Lafvar:				
Cetraria aculeata (SCHREB.) FR.:	2 »	—	»	0,003 »
» *cucullata* (BELL.) ACH.:	3 »	—	»	0,007 »
» *islandica* (L.) ACH: . .	2 »	—	»	0,0028 »
» *nivalis* (L.) ACH: . . .	7 »	—	»	0,01 »
Cladina silvatica (L.):	5 »	—	»	0,0108 »
Cladonia gracilis (L.) COEM. *α chordalis* FLK.:	1 »			0,012 »
Cladonia gracilis (L.) COEM. *δ cornuta* (L.) SCHÆR:	3 »			0,0234 »
Nephroma arcticum (L.):	1 »	—	»	0,9902 »

Alger:

Botrydina vulgaris BRÉB. } epifytiskt på mossorna.
Nostoc sp. }

I mosstäcket funnos inblandade några egendomliga rörlika bildningar, påminnande om mycket grofva *Vaucheria*-trådar, sannolikt af animaliskt ursprung. Vid dem funnos fästa följande alger, hvilka enligt LAGERHEIMS mening tyda på, att de här hafva en sekundär förekomst. Algerna äro:

Batrachospermum sp.
Bulbochæte sp.
Coleochæte sp.
Cosmarium cr. *Broomei* THWAIT.
» *Meneghinii* BRÉB.
Michrochæte sp.
Nostoc och *Anabaena sp.*
Oedogonium sp.
Dessutom *diatomacéer* och obestämbara *chlorophycéer.*

N:r 2.

Är 12 □-cm. och håller med den underliggande torfven, som hvilar på vittringsgrus, 5 cm. i höjd. (Insamlad 1895 11/7).

Den underliggande torfven består af torfjord, något sand samt följande döda växtdelar:

Empetrum nigrum L.: stjelkar, blad och rötter.

Betula nana L.: blad.

Vaccinium Vitis idæa L.: 6 blad och två bär samt en nyligen utdöd stjelk med hvilken de sammanhöra.

Dicranum scoparium (L.) HEDW.
Jungermannia minuta CRANZ
och andra *Jungermanniacéer*
Polytrichum juniperinum WILLD.
} bladfragmentbärande stjelkar, ofta i samband med lefvande skott.

Nephroma arcticum (L.): svarta bitar ofta i samband med lefvande skott.

I den lefvande växtmattan räknades:

Lägsta fältskiktet.

Empetrum nigrum L.: 5 grenar som i föregående profbit. — Vigt (rotsystemet medräknadt) . . . . 0,153 gr.

Bottenskiktet.

Mossor:

Dicranum scoparium (L.) HEDW.:	480	individ.	—	Vigt	0,4068 gr.
Jungermannia gracilis SCHLEICH.:	64	»	—	»	0,0140 »
» *minuta* CRANTZ:	1005	»	—	»	0,2486 »
» *ventricosa* DICKS.:	2	»	—	»	0,0003 »
Polytrichum juniperinum WILLD.:	19	»	—	»	0,076 »

Lafvar:

Cladonia gracilis (L.) COEM δ *cornuta* (L.) SCHÆR:	1	»	—	»	0,0040 »
Nephroma arcticum (L.): circa	2	»	—	»	0,396 »

Alger:

Botrydina vulgaris BRÉB.
Nostoc sp.
} epifytiskt på mossorna.

N:r 3.

Är 12 □-cm. och håller med den underliggande torfmassan 3 cm. i höjd. Busklafvarne höja sig något öfver den öfriga vegetationen. (Insamlad 1896 22/6).

Den underliggande torfven består hufvudsakligen af tämligen väl bibehållna växträster:

Empetrum nigrum L.: ett nyligen utdödt individ, blad, grenar och rötter.

Betula nana L.: blad.

Myrtillus uliginosa (L.) DREJ.: blad.

Vaccinium Vitis idæa L.: blad.

Dicranum scoparium (L.) HEDW. } Som i föregående profbitar.
Polytrichum juniperinum WILLD. }

Peltidea aphtosa (L.).

Hylocomium proliferum (L.). }
Jungermannia minuta CRANTZ och andra *Jungermanniacéer* } Som i föregående profbitar.
Nephroma arcticum (L.) }

Cladonia gracilis (L.) COEM. δ *cornuta* (L.) SCHÆR.: kolsvarta bitar.

Består af:

Lägsta fältskiktet.

Mossor:

Dicranum scoparium (L.) HEDW.:	54	individ.	—	Vigt	0,1207 gr.
Cephalozia bicuspidata (L.) DUM.:	4	»	—	»	0,0004 »
Harpanthus Flotowii NEES.: . . .	18	»	—	»	0,0037 »
Hylocomium proliferum (L.): circa	3	»	—	»	0,0175 »
Jungermannia gracilis SCHLEICH.:	35	»	—	»	0,0088 »
» *minuta* CRANTZ: . .	28	»	—	»	0,0032 »
Polytrichum juniperinum WILLD.:	13	»	—	»	0,1438 »

Lafvar:

Cetraria cucullata (BELL) ACH.: . .	1	»	—	»	0,0047 »
» *islandica* (L.) ACH: circa	10	»	—	»	0,2819 »
Cladina rangiferina (L.): »	12	»	—	»	0,1234 »
Cladonia gracilis (L.) COEM. δ *cornuta* (L.) SCHÆR.:	44	»	—	»	0,7859 »
Nephroma arcticum (L.): circa . .	2	»	—	»	0,3394 »

Alger:

Botrydina vulgaris BRÉB. } epifytiskt på mossorna.
Nostoc sp. }

Dessa trenne profbitar äro tagna så, att de tillsammans böra bilda ett ungefärligt generalprof på Gråstöte-tundrans sammansättning.

Om vi icke taga hänsyn till de rent kvantitativt föga rol spelande algerna och svamparne, erhållas följande siffervärden, afsedda att belysa densamma.

Antalet individ per □-cm. blir.

	I lägsta fältskiktet.	I bottenskiktet.
N:r 1 16 □-cm.	0,25	31,8
N:r 2 12 □-cm.	0,4	131,08
N:r 3 12 □-cm.	0	18,7
Alltså i medeltal	0,22 [1])	57,5 [2])

Den rol, arterna genom sin individmängd spela i formationen, uttryckes genom följande procentberäkning:

Lägsta fältskiktet.

	Antal individ.	Procent.
1) *Empetrum nigrum* L.	9	100
Summa	9	100

Bottenskiktet.

	Antal individ.	Procent.
1) *Jungermannia minuta* CRANTZ . . .	1076	46,782
2) *Dicranum scoparium* (L.) HEDW. . .	959	41,695
3) *Jungermannia gracilis* SCHLEICH. . .	99	4,304
4) *Cladonia gracilis* (L.) COEM. δ *cornuta* (L.) SCHÆR.	48	2,085
5) *Polytrichum juniperinum* WILLD. . .	34	1,478
6) *Harpanthus Flotowii* NEES.	18	0,782
7) *Cetraria islandica* (L.) ACH.	12	0,523
8) *Cladina rangiferina* (L.)	12	0,523
9) *Cephalozia bicuspidata* (L.) DUM. . .	8	0,348
10) *Hylocomium proliferum* (L.)	7	0,304
10) *Cetraria nivalis* (L.) ACH.	7	0,304
Transport	2280	99,128

[1]) Denna siffra har naturligtvis, då *Empetrum*-individen räknats efter fragment, intet värde, utan medtages endast för fullständighetens skull. Värkliga medelsiffran för individens antal per □-cm. i detta skikt torde efter ytterst approximativa beräkningar ej öfverstiga 0,001.

[2]) Att *Nephroma* här medräknats efter bitar af individ har, som genast torde inses, ytterst ringa betydelse.

	Antal individ.	Procent.
Transport	2280	99,128
11) *Cladina silvatica* (L.)	5	0,217
11) *Nephroma arcticum* (L.)	5	0,217 [1])
12) *Cetraria cucullata* (BELL) ACH.	3	0,134
13) » *aculeata* (SCHREB.) FR.	2	0,087
13) *Jungermannia lycopodioides* WALLR. *v. Flörkei* (W. M.)	2	0,087
13) *Jungermannia ventricosa* DICKS.	2	0,087
14) *Cladonia gracilis* (L.) COEM. *α chordalis* FLK.	1	0,043
Summa	2,300	100,000.

Helt annorlunda fördela sig arterna, om de ordnas efter den massa, de intaga i formationen. Procentberäkningen blir följande (Siffran efter hvarje växt anger numret, efter individmängd räknadt):

Lägsta fältskiktet.

	Vigt.	Procent.
1) *Empetrum nigrum* L. (1)	0,3700 gr.	100
Summa	0,3700 gr.	100.

Bottenskiktet.

	Vigt.	Procent.
1) *Nephroma arcticum* (L.) (11)	1,7256 gr.	36,223
2) *Dicranum scoparium* (L.) HEDW. (2)	1,1725 »	24,612
3) *Cladonia gracilis* (L.) COEM. *δ cornuta* (L.) SCHÆR. (4)	0,8133 »	17,072
4) *Polytrichum juniperinum* WILLD. (5) . .	0,2858 »	5,999
5) *Cetraria islandica* (L.) ACH. (7) . . .	0,2847 »	5,976
6) *Jungermannia minuta* CRANTZ (1) . .	0,2562 »	5,378
7) *Cladina rangiferina* (L.) (8)	0,1234 »	2,590
Transport	4,6615 gr.	97,850.

[1]) Liksom vid *Empetrum* medtages denna värdelösa siffra endast för fullständighetens skull. Värkliga siffran för individmängden pr □-cm. — här också efter mycket approximativa beräkningar — torde vara omkring 0,02; alltså 0,76 individ på 38 □-cm. och 0,033 % af de 2,300 individen. Den siffra, som här beräknats, är således alldeles för hög, men tillräckligt låg för att endast obetydligt neddraga procentsiffran för kommensalerna i skiktet.

	Vigt.		Procent.
Transport	4,6615	gr.	97,850
8) *Hylocomium proliferum* (L.) (10) . .	0,0310	»	0,650
9) *Jungermannia gracilis* SCHLEICH. (3)	0,0228	»	0,478
10) *Cladonia gracilis* (L.) COEM. *α chordalis* FLK. (14)	0,0120	»	0,251
11) *Cladina silvatica* (L.) (11)	0,0108	»	0,226
12) *Cetraria nivalis* (L.) ACH. (10) . . .	0,0100	»	0,209
13) » *cucullata* (BELL) ACH. (12). .	0,0070	»	0,146
14) *Harpanthus Flotowii* NEES. (6) . . .	0,0037	»	0,077
15) *Cetraria aculeata* (SCHREB.) FR. (13)	0,0030	»	0,062
16) *Cephalozia bicuspidata* (L.) DUM. (9)	0,0010	»	0,020
17) *Jungermannia lycopodioides* WALLR. v. *Flörkei* (W. M.) (13)	0,0007	»	0,014
18) *Jungermannia ventricosa* DICKS. (13)	0,0003	»	0,006
Summa	4,7638	gr.	99,989.

Vid uppdissekeringen af den täta, hårdt packade vegetationsmassan (märk specielt profbiten N:r 2) märker man snart, att det är särskildt två växtformer, som dominera öfver de andra och som värka bestämmande på hela formationens utveckling. Den ena är *Dicranum scoparium* (L.) med 24,612 % och den andra *Nephroma arcticum* (L.) med 36,223 % af den lefvande vegetationsmassans vigt i bottenskiktet.

Dicranum scoparium (L.) HEDW. bildar genom sitt växsätt ytterst täta tufvor. Sidogrenarne trycka sig nära intill moderaxlarne, och ett tätt rhizoidludd bidrager att uppfylla mellanrummen och till att sammanhålla skotten med hvarandra.

Individbildningen är mycket stark (*Dicranum*-individen 41,53 % af generalprofvets hela individantal), och den genom trängseln med grannarne strängt hopträngda skottkronan får en obetydlig horizontal utsträckning. Denna starka individbildning uppstår därigenom, att sidogrenarnes nedre partier jämte fästpunkten vid moderaxeln dö bort, sedan de fullständigt blifvit omslutna och öfverhöljda af de alltjämt tillväxande grannindividens skott-

massor och i denna trängsel blifvit beröfvade allt ljus. Likaså föryngra sig individ, hvilkas toppar till följd af öfverskuggning blifvit dödade, genom korrelativ utbildning och sträckning af hvilande längre ner sittande skott. Nya individ, nertill mer eller mindre sammanbundna af döda axelpartier, uppstå sålunda oaflåtligen. Antalet sidogrenar på hvarje individ blir obetydligt, sällan öfver 2 eller 3.

Dicranum-mattan är genomväxt af de tätt stälda skotten af *Nephroma arcticum* (L.). Under det att *Dicranum* är uppdelad i en mängd individualiserade skott, äro flikarne af *Nephroma* sammanhängande med lefvande partier öfver jämförelsevis stora ytor, så att den i de undersökta profbitarne uppträder med ett eller två brottstycken af ett »individ». Genom differentiering i uppåtriktade flikar förefinnes dock en tydlig ansats till individualisering, och individen, hvilkas begränsning på grund af svårigheten att bestämma gränsen mellan lefvande och död bål ej är den lättaste af fastställa, äro afgjordt mindre än hos de med normal skottbyggnad, som förekomma i andra formationer t. ex. barrskogar.

Bålen är, som nämdt, uppdelad i uppåtriktade flikar. Dessa äro formade till en i bottnen mer eller mindre sluten strut. I kanten af dessa strutar blir tillväxten fläckvis starkare än på de omgifvande partierna. Strutkanten blir härigenom på flere ställen utbuktad, och dessa utbuktningar gifva i sin ordning upphof till nya strutar.

Olikheterna i skottbyggnad mellan denna form och normalformen med dess plagiotropa, nerliggande bål ses lätt på bifogade tvenne vertikalsnitt (Fig. 1).

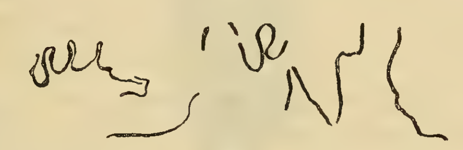
Med stor styrka prässa strutarne mosstäcket åt sidorna, och mellan flikarne intryckas skott af *Dicranum* och andra mossor. Vid snitt af i paraffin fixerade sådana partier finner man stjälkar, blad och rhizoider af *Dicranum*, *Polytrichum* etc. tätt hoptryckta mellan flikarne, som bukta sig i svaga vågor mot hvarandra. Ej ovanligt är, att vid ställen, där de vidröra hvarandra, sammanväxningar uppstå. Medullarlagrens löst förenade

hyfer fläta sig då samman, och vid sammanväxningsstället finnes af kortikalskikten endast isolerade små partier inströdda bland medullarhyferna.

Mossorna blifva antingen alldeles öfvervästa, eller ock endast delvis omslutna, så att de öfversta bladen eller skottspetsarne sticka upp mellan de sig hopslutande flikarne (Jmfr. Fig. 2). Endast såvida vegetationspunkten af skottet kommit ofvan omklamringen, kan detta rädda sitt lif.

Samma skott kan vid flere tillfällen af sitt lif blifva utsatt för denna fara, men lyckas rädda sig. På ett skott t. ex. af *Polytrichum juniperinum* WILLD. kvarsutto räster af *Nephroma*-bål resp. 20, 35 och 50 mm. under skottspetsen, representerande

Fig. 1.



a) *Nephroma* från *Dicranum*-tundran på Gråstöten.



b) *Nephroma* från *abiegnum hylocomiosum* i Jämtland.

tre särskilda omklamringar, hvarur skottet under tidernas lopp räddat sig.

Randen af *Nephroma*-flikarne växer ut allt mer och mer, och då den gärna håller sig en hårsmån öfver själfva spetsen af *Dicranum*-individen, lägger den under sig deras skott, det ena efter det andra. Dessa dö då ut, såvida ej det öfverskuggade skottet hinner i sned ställning växa åt sidan för att sedan återtaga sin ortotropa växt, eller ock hinner utveckla sidoskott, som i stället för moderaxeln företaga denna manöver. De blad, som utvecklas på skott med öfverväxt vegetationspunkt, visa en del etioleringsfenomen. Då den normala bladstorleken på den ifrågavarande tundraformen är omkring $4000 \times 500\ \mu$, finnas

sådana etiolerade blad, som på en längd af 1750 μ äro endast 118 μ på bredaste stället.

Det är trängseln med dessa tvänne växtformer, som tryckt sin prägel på de öfriga i *Dicranum*-tundran ingående arternas skottsystem och hela biologi. Och att trängseln är betydlig framgår af de nyss framstälda analyserna: ej mindre än omkring 57,5 individ på hvarje □-cm. i bottenskiktet, svampar och alger härvidlag ej inberäknade.

Fig. 2.



Nephroma, omslutande skottspetsar af *Dicranum*. (Vid basen utdöd *Polytrichum juniperinum* WILLD.)

De flästa af de ingående *fanerogamerna* äro sterila, eller bära endast sparsamt blommor och frukter. Inga groddplantor eller unga exemplar anmärktes i formationen.

Af mossorna anträffades inga med sporogon, men af *Polytrichum juniperinum* WILLD. funnos några exemplar med genomvuxna antheridieställningar.

Denna ringa sexuella förökning kompenseras på tvänne sätt. Antingen äro arterna utmärkta genom en mäktig vegetativ individbildning, eller ock utvidga de starkt sin skottkrona i horizontal riktning.

Hufvudmassan af fanerogamerna förete den senare skottbyggnadstypen med för hvarje form specifika egendomligheter t. ex. i de plagiotropa axlarnes bladbeklädnad och utbildning,

dels ofvan och i det lefvande växttäcket, dels i torfven; hufvudrotens och birötternas ömsesidiga arbetsfördelning etc. Gemensamt för dem alla med undantag af *Carex rigida* GOOD, *Pedicularis lapponica* L. och *Rubus Chamæmorus* L. är dock axlarnes förvedning (*Artostaphylos alpina* (L.) SPRENG, *Azalea procumbens* L., *Betula nana* L., *Diapensia lapponica* L., *Empetrum nigrum* L., *Myrtillus nigra* GILIB. och *M. uliginosa* (L.) DREJ, *Phyllodoce coerulea* (L.) BAB., *Salix glauca* L. och *S. herbacea* L., *Vaccinium Vitis idæa* L.).

Empetrum, som är den vanligaste af dem alla, har långa i torfmyllan gående axlar med uppstigande tämligen starkt förgrenade assimilations-skottsystem (eventuelt florala). Årsskotten äro i medeltal 7 mm. långa. Individbildningen är visserligen ej stark, då de förbindade axlarne äro af synnerligen långlifvad natur, [1]) men de särskilda partierna af de större exemplaren föra emellertid ett ganska individuelt lif genom sina birötter. Dessa kunna gå ganska högt upp — ända till 25 mm. under skottspetsen — på de ortotropa axelpartierna.

Betula nanas långskott äro plagiotropa och ligga utmed moss- och laftäcket. I sänkor resa sig dock öfre delarne af skotten till ett par decimeter höga, mer eller mindre ortotropa axlar.

Detsamma är förhållandet med *Salix glauca* L. I de nämda sänkorna blifva skotten, som rikligt bildas vid den af en kraftig hufvudrot sammanhållna basala grenkomplexen, mer eller mindre bågformigt uppåtböjda.

Pedicularis lapponica L. och i viss mån *Diapensia lapponica* L. äro de enda af den typiska tundrans blomväxter, som genom sin skottbyggnad och vegetativa propagation blifva »stavnsbundna».

I öfvergångsformen till *Myrtillus nigra*-formationen tillkomma däremot några andra sådana »stavnsbundna» arter jämte andra skott-typer.

Mossorna karakteriseras, såsom beskrifvits hos *Dicranum scoparium* (L.) HEDW., af en mycket stark skottaflösning och en härmed i samband stående mycket ringa horizontal utsträckning af

[1]) Jmfr KIHLMAN l. c. p. 226.

den genom trängseln med sina grannar starkt hopträngda skottkronan. Antalet sidogrenar blir obetydligt för hvarje individ, och tillkomme ej som t. ex. hos *Jungermanniacéerna* etioleringsfenomen för en del om ljus och utrymme kämpande skott-toppar (»flagell»-bildning), skulle äfven afvikelsen från normalhöjden i formationer med mera glest bottenskikt i allmänhet blifva större. Af *Jungermannia minuta* CRANTZ har jag mätt ogrenade exemplar af ända till 23 mm. längd.

Sphæropezia Empetri (FUCK) REHM. och de sparsamt uppträdande *Lecidea Diapensiæ* TH. FR., *Lecanora hypnorum* (HOFFM.) ACH. och *L. tartarea* (L.) ACH. buro apothecier, hvilka dock saknades hos alla *busk-* och *bladlafvar* med undantag af den sällsynta *Cladonia coccifera* (L.) och *Nephroma arcticum* (L.). Hos den senare voro de mycket sparsamma, men af normal storlek; ett apothecium försedt med skarpa inbuktningar mätte t. ex. 20 × 24 mm. Såväl hos denna art som hos de andra lafvarne bildades soredier mer eller mindre rikligt. Af *Cladonia* anmärktes groende soredier på blad af *Dicranum* och på några punkter af mosstäcket unga exemplar med obetydliga podetier.

Bland lafvarne utmärker sig, såsom förut skildrats, *Nephroma* för en vid, horizontel utbredning af sammanhängande ortotropa flikar, men visar i dessas byggnad och riktning en kraftig ansats till upplösning i individualiserade delar.

Hos busklafvarne märker man en reduktion af bålens groflek samt sidogrenarnes längd och antal. Den vanligaste af dem alla är den med svagt förgrenade eller enkla podetier försedda *Cladonia gracilis* (L.) COEM. δ *cornuta* (L.) SCHÆR. *Cladoniernas* phyllocladiebildning är mycket inskränkt.

Hos *Cladonierna* är enligt det gängse åskådningssättet podetiernas utveckling i viss mån begränsad och individbildningen i en vegetationsmatta uteslutande beroende på föryngring genom soredier och ascosporer eller phyllocladiernas delningar. I Gråstötstundran utgör *Cladonia gracilis* (L.) COEM. δ *cornuta* (L.) SCHÆR. härvidlag ett undantag. Podetierna hos denna form utveckla nämligen successive i sina öfre delar sidoskott, hvilka

återigen under kampen med de uppåt sig allt mer och mer utvecklande kommensalerna föryngra sig genom nya sidoskott. Till tre generationer har jag kunnat följa detta föryngringsmodus.

Ingen af *Cetraria*- och *Cladina*-arterna har förmått sammansluta sig till den tufform, som i de flästa andra formationer i högre eller lägre grad karaktäriserar deras uppträdande.

På den lilla fläck, där *Lecanora tartarea* (L.) ACH. slagit sig ner, förhåller den sig, som KIHLMAN skildrat från Kolahalföns *Dicranum*-tundra. Dess sorediebeströdda krusta har öfverdragit och dödat några flikar af *Nephroma arcticum* (L.) och ett par stjälkar af *Polytrichum juniperinum* WILLD., på hvilken den troget följt konturerna af dess blad, stam och antheridieställningar.

Flere af *Dicranum*- och *Polytrichum*-exemplaren lida genom de i medeltal 70 μ i diameter hållande kolonierna af *Botrydina vulgaris* och i mindre grad af *Nostoc*, som i stor ymnighet omgifva bladen. Algkolonierna äro ofta genomdragna af laf- eller svamphyfer. En *Nostoc*-art bildar på bålen af *Nephroma* talrika *cefalodier*, som hastigt tillväxa, så att gonidialsystemet i strutarnes botten nästan uteslutande kommer att bestå af denna *Nostoc*. Likaså bilda *phycocromacéer* cefalodier hos *Lecanora hypnorum* (HOFFM.) ACH. och *Stereocaulon paschale* (L.) FR.

På flere *Empetrum*-skott torde blad afvissna i förväg genom uppträdandet af *Sphæropezia Empetri* (FUNK) REHM.

På samma sätt lider *Diapensia* mycket genom den på bladen växande *Lecidea Diapensiæ* TH. FR.

Samtidigt med denna förbittrade strid sinsemellan hafva *Dicranum*-tundrans konstituenter att kämpa med de två för vår alpina vegetations fysiognomi så bestämmande naturfaktorer, som ligga i vindarnes å ena sidan mekaniska våld och å andra sidan uttorkande förmåga.

Som förut framhållits, utmärka sig de flästa fanerogamerna för låga eller rent af till marken tryckta ofvanjordiska axlar. Endast i dälderna tillåta de rasande fjällvindarne *Betula nana*

L. och *Salix glauca* L. att höja sitt grenverk ett par decimeter öfver bottenskiktet.

Busklafvarne äro med sin jämförelsevis exponerade ställning utsatta för att särskildt vid torka sönderrifvas och bortföras af vinden. Några af dem äga i utbildandet af *hapterer* ett förankringsmedel, som bidrager till deras fixerande och kvarhållande.

Då dessa organ hos lafvarne äro föga studerade och hos de ifrågavarande arterna förut ej kända, torde de förtjena en närmare skildring.

Då jag emellertid i en framtid skall återkomma till detta kapitel, nöjer jag mig med att nämna, att de anläggas redan högt upp på skottet dels apikalt, dels lateralt, samt att de äro mycket starkt utbildade, så att t. ex. ett *Dicranum*-blad, vid hvilket de fäst sig, förr sönderslites än den skottdel på lafven, från hvilken de utgå. De arter i tundran, hos hvilka jag anmärkt dessa hapterer, äro: *Cetraria cucullata* (BELL.) ACH., *islandica* (L.) ACH., *nivalis* (L.) ACH., *Cladina silvatica* (L.), *Cladonia gracilis* (L.) COEM. *δ cornuta* (L.) SCHÆR.

Podetierna hos *Cladonia uncialis* (L.) FR. och *Cl. gracilis* (L.) COEM. *δ cornuta* (L.) SCHÆR. visa mycket ofta egendomliga böjningsfenomen, som troligen äro orsakade genom vindens mekaniska värkan. Intressant är att hos den senare formen iakttaga gonidialsystemets utbildning. Hos de ifrågavarande arterna är detta ej jämt utbredt, utan fördeladt i mindre partier, som utåt te sig som små låga vårtlika uppböjningar på podetiernas yta. På dessa böjda podetier utveckla sig gonidialvårtorna mycket kraftigt på den dorsala mot ljuset vända brunfärgade sidan, då de däremot äro små och obetydliga på den ventrala ljusare. Kortikallagret är på de öfre vårtorna starkare utbildadt än på andra partier af podetierna, likaså äro de ytligt belägna hyfpartiernas väggar mera förtjockade.[1])

---

[1]) Det är denna form som utgör F. W. WALLROTHS *f. phymatophora* och af honom beskrifves sålunda (Naturgeschichte der Säulchen-Flechten; NAUMBURG 1829, p. 133): »ceratost. phymatophoris, phymatibus convexis gibbosis rugulosis s. lævigatis sparsis s. aggregatis dilutius saturatiusve fuscis stelidia graciliora hinc contrahentibus et genu instar flectentibus.»

Mer än andra alpina växtsamhällen äro de exponerade fjällslätternas vegetation under vissa tider utsatta för faran af uttorkning genom en transpiration hos de af atmosferen omspolade organen, hvilken ej till fullo motsvaras af tillförseln från de vattenupptagande delarne. För fanerogamerna kan denna uttorkning blifva ödesdiger nog, och på lafvar och mossor, som visserligen ej taga direkt skada af temporär uttorkning, värkar den dock hämmande på tillväxtfenomenen och arternas allmänna trefnad.

Dicranum-tundran är genom sin sammansättning, som i hög grad befordrar såväl upptagandet som upplagrandet af vatten i betydliga mängder, i detta hänseende gynsammare utrustad än flere andra alpina växtformationer.

Trots sitt hopträngda växsätt tillåter *Dicranum scoparium* (L.) HEDW. flere andra former, att, som af analyserna framgår, i ganska talrika exemplar med sig dela utrymmet. Det är *Dicranums* kraftigt värkande vattenupplagringsapparat, som i viss mån bidrager till, att de kunna uthärda den hårda kampen i trängseln med denna kraftiga kommensal. Själfva ombesörja de dock, som strax skall visas, genom sin egen organisation äfven en del af vattenhushållningen för sig själfva och hela samhället.

Dicranum uppsuger genom alla sina vegetativa delar ymmigt vatten. De långsträckta, kupiga, tätt stälda bladen, som vid anfuktan utspärras, kvarhålla äfven till en tid en tjock vattenmantel rundt stammen. Den egentliga vattenuppsugningsapparaten utgöres dock af det ludd af rhizoider, hvarmed stammen är omgifven. Rhizoiderna, som utgå redan tätt under vegetationspunkten, äro långa, 5,5—9 μ breda och starkt för-

---

Hos en form af *Cladonia gracilis* (L.) COEM. har TH. FRIES (Lichenographia scandinavica I, 1871, p. 82) beskrifvit brunaktiga vårtor, hvilka han visar bestå af tätt förenade hyfer, men sakna gonidier, och sålunda ej kunna kallas cefalodier. Både de af WALLROTH omnämda phymata och de af TH. FRIES beskrifna bildningarne anser K. B. J. FORSSELL (Studier öfver cephalodierna, Bihang till K. Sv. Vet.-Akad. Handl. Bd. 8, N:r 3, p. 80) som antagligen orsakade af parasitsvampar. Hvad formen *phymatophora* beträffar är detta, som ofvan visats, ej förhållandet. De ifrågavarande »phymata» äro helt enkelt gonidialvårtor.

grenade. I början äro de hyalina, men få snart brunfärgade väggar. De fläta icke hop sig till strängar eller filtväfnad, men uppnå däremot en betydlig längd, ända till 4 mm. och därutöfver.

Än starkare är rhizoidmanteln utbildad hos *Polytrichum juniperinum* WILLD. På växlande höjd af skottet — 2—8 mm. under vegetationspunkten — börjar den med jämförelsevis skarp gräns framträda kring stänglarne, hvilka te sig som hvita, torfven och mossmattan genomdragande *Rhizomorpha*-strängar. Strängarne äro 1 mm. i diameter — efter anfuktning, då rhizoidluddet sväller ut, 1,5 mm. —, hvaraf 1/3 kommer på själfva den från trenne sidor hoptryckta stammen. Filtmanteln, som omsluter de gamla bladrästerna fullständigt, har i sig äfven upptagit en mängd fragment af lafvar, *Dicranum*-skott, omsnärjt gamla stänglar och blad af *Empetrum* etc. De efter nederbörd utspärrade bladen på skottet ofvan rhizoidmanteln kvarhålla äfven förträffligt mellan sina skifvor och stammen vatten. De nedre delarne af bladen förblifva tryckta mot stammen och kvarhålla vattnet längst; de öfre böja sig utåt och kvarhålla det endast en kortare stund. Ungefär midt på det ofvan rhizoidmanteln belägna skottstycket börjar den öfre delen af bladet att med undantag af den starka medelnerven destrueras. Vid denna punkt börjar också bildningen af rhizoider från medelnerven. Rhizoiderna äro mycket förgrenade, 4,5—5,5 μ breda och hålla sig hyalina, äfven sedan de öfvergått till torfmassan.

Lefvermossorna och *Hylocomierna* kvarhålla innanför sina kupiga blad efter anfuktan en vattenmantel rundt stammen. *Hylocomium proliferum* (L.) har i sina parafyllier, *Blepharozia* i sina bladfransar och en del af lefvermossorna i sin rhizoidbildning organ, som ytterligare bidraga till nederbördens upptagande och fasthållande.

Lafvarne upptaga som bekant begärligt vatten genom hela sin yta. Om hos dem finnas väfnadspartier, särskildt utdanade för uppsugande och kvarhållande af atmosfärisk nederbörd, känner man icke närmare.

A. N. LUNDSTRÖM [1]) har angående *Nephroma arcticum* (L.) iakttagit, att regn ofta finnes uppsamladt »in den schalenförmig gebogenen Rändern des Thallus» (l. c. p. 54). Så är äfven förhållandet med den ifrågavarande tundra-formen, men denna omständighet torde för växtens lif hafva föga betydelse.

Hos denna form finnas emellertid några bildningar, hvilkas värkliga natur är svår att fastställa, men hvilka torde hafva en funktion just i detta hänseende. De utgöras af brunfärgade valkar, hvilka mer eller mindre sammanhängande upptaga randen af de strutlika flikarne, och hvilka vid anfuktan svälla upp och länge kvarhålla det uppsugna vattnet.

Det täta luddet på undersidan af *Peltidea aphtosa* (L.) uppsuger begärligt nederbörd, och då det på tundra-formen eger en mäktighet af omkring 1400 μ, bli de vattenmängder det upplagrar, ej obetydliga.

Rubus Chamæmorus L. och *Vaccinium Vitis idæa* L. hafva den förre i sina stipler, den senare i drushårsgroparne på bladens undersida organ för både uppsugning och kvarhållande af vatten. [2]) Den ledning och det uppfångande af nederbörd, som LUNDSTRÖM påvisat hos stammar och blad af *Myrtillus nigra* GILIB., *Salix glauca* L. och *S. herbacea* L., torde för dessa arters vattenhushållning äga mycket ringa betydelse.

Azalea och *Empetrum* ega som bekant ett vattenkvarhållande organ i sina epidermisceller med deras förslemmade innerväggar.

Tundra-växternas förmåga att magasinera vatten visas bäst af följande experimentela undersökning (våren 1898) öfver deras tillökning i vigt efter 10 minuters submersion i destilleradt vatten af + 18° C.

---

[1]) Pflanzenbiologische Studien I, Die Anpassungen der Pflanzen an Regen und Thau. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III.

[2]) Jmfr LUNDSTRÖM l. c.

	Insamlingstid.	Försöksväxternas vigt i lufttorrt tillstånd före submersionen.	Vigt efter submersionen.	Vigttillökning i procent.
Polytrichum juniperinum WILLD.	1896 22/6	0,1438 gr.	0,59 gr.	311
Cetraria islandica (L.) ACH . .	»	0,2819 »	0,95 »	238
Nephroma arcticum (L.)	»	0,3394 »	1,17 »	244
Empetrum nigrum L.	»	0,2170 »	0,319 »	47

Men äfven formationens afdöda partier bibehålla till en ej liten del sin eventuela egenskap att uppsuga och kvarhålla vatten. Då nu dessa delvis stå i samband med de lefvande skotten, underlättas ännu mer deras möjligheter att tillgodogöra sig underlagets fuktighet.

Sammansättningen af den torf, som underlagrar det lefvande vegetationstäcket, framgår ur analyserna af de tvenne profbitarne. Bland de där uppräknade växträsterna är det mossorna, som äga den största magasineringsförmågan. Denna belyses bäst af följande under samma förutsättningar gjorda experimentela undersökning.

	Insamlingstid.	Vigt före submersionen i lufttorrt tillstånd.	Vigt efter submersionen.	Vigttillökning i procent.
Profbiten N:r 2 med underliggande torf	1895 11/7	4,1109 gr.	14,54 gr.	253
Torf af samma typ som N:o 2 . . .	»	0,2750 »	0,77 »	180

Liksom Præstefjælds mosstundra har också formationen en direkt fördel af sin nordliga exposition, hvarigenom afdunstningen minskas och marken under lång tid får nytta af smältvattnet från vinterns snömassor.

De direkta s. k. transspirationsskydden äro synnerligen utpräglade. Angående dessa har jag föga att förmäla, öfver hvad man känner genom särskildt det sista årtiondets undersökningar. *Dicranum*-tundrans fanerogamer ingå äfven i fjällheden och hafva i denna blifvit föremål för omfattande undersökningar ur denna synpunkt. [1])

[1]) Jmfr E. WARMING, Om Grønlands Vegetation. Meddelelser om Grønland 12. 1888.

Liksom i fjällheden äga de flästa arterna xerofytkaraktär. Af lignoserna hafva 50 % (*Azalea procumbens* L., *Diapensia lapponica* L., *Empetrum nigrum* L., *Phyllodoce coerulea* (L.) BAB., *Vaccinium Vitis idæa* L. vintergröna blad med utpräglad xerofil byggnad; de andra 50 % (*Arctostaphylos alpina* (L.) SPRENG., *Betula nana* L., *Myrtillus nigra* GILIB., *M. uliginosa* (L.) DREJ., *Salix glauca* L., *S. herbacea* L.) ettåriga »lackerade», eller ymnigt hårklädda blad.

Slemlagren i *Empetrums* och ericinéernas epidermisceller kunna lika gärna räknas till transspirationsskydden som till de vattenupptagande organen.

»Anthokyan» anmärktes i de unga bladen t. ex. hos *Empetrum*.

Skottspetsarne på lignoserna dödas emellertid ofta, särskildt hos *Empetrum*. Någon gång beror detta på öfverväxning, men oftast på vindarnes uttorkande invärkan och frostfenomen. Genom korrelation ökas till följd häraf förgreningen starkt. *Lemlarne* hafva äfven härvidlag någon betydelse. På stammarne af *Betula nana* anmärktes spår af deras tänder, och i torfven funnos lemmel-exkrement.

Lignosernas bladstorlek är i allmänhet reducerad. Tydligast framstår detta hos *Vaccinium Vitis idæa* L. KIHLMAN, som gjort en del undersökningar öfver reduktionen af grankottfjällens och ericinébladens längd på vindöppna lokaler i Ryska Lappmarken, har en uppteckning angående dess bladform på *Dicranum*-tundran. Den lyder (*V* betyder förhållandet mellan skifvans längd och bredd) l. c. p. 155:

»Orlow; flaches, windoffenes *Dicranum*-Moor dicht an der Küste; sämmtliche Reiser sehr verkrüppelt; Blätter 4—6 mm. lang, ganzrandig oder unmerklich crenulirt; *V*: 1,4. Einzelne Blätter 8 mm. lang und dann meistens gegen die Spitze deutlich crenulirt; *V*: 1,9.»

Till jämförelse härmed meddelas några mätningar i mm. på affallna blad från Gråstötens *Dicranum*-tundra.

	Längd.	Bredd.	Anmärkningar.					
1)	. 6	4	Med	sparsamma	*pyrenomycet*-	perithecier.	Ingen	krenulering.
2)	. 4	3	»	»	»	»	»	»
3)	. 6	3,75	»	»	»	»	»	»
4)	. 6	4,75	»	»	»	»	»	»
5)	. 4,5	4	»	»	»	»	»	»
6)	. 8,5	5	»	talrika	»	»	»	»
7)	. 6	3,75	»	sparsamma	»	»	»	»
8)	. 7	4,5	»	talrika	»	»	Svag	»
9)	. 6	4,5	»	sparsamma	»	»	Ingen	»
10)	. 3,5	2,75	»	»	»	»	»	»
11)	. 4,5	3,75	»	»	»	»	»	»
12)	. 8,5	4,5	»	talrika	»	»	Typisk	»

Sålunda V: 1,46.

I skogstrakter med skyddadt läge är V 2,3—2,4.

Formationens utbredning och historiska utveckling.

Huru allmänt *Dicranum*-tundran kan uppträda i våra fjälltrakter återstår ännu att utreda. Mindre fläckar däraf finnas här och där i fjällhedarne, då däremot större förekomster efter min erfarenhet torde vara sällsynta. [1])

När och hur den nu skildrade *Dicranum*-tundran på Gråstöten konstituerades, kan icke med vår nuvarande kännedom om de alpina vegetationens historia afgöras. Att den icke i ordets rent *lokala* betydelse är en *relikt* af de tundre-forma-

[1]) I detta sammanhang bör påpekas att de, som af analyserna framgår, för *Dicranum*-tundran så utmärkande *Jungermannia gracilis* Schleich. och *J. minuta* Crantz ytterst ofta äfven i andra formationer förekomma intimt blandade med *Dicranum scoparium* (L.) Hedw.

I Upsala Botaniska Museum finnas t. ex. 100 exemplar af *Jungermannia gracilis* Schleich. från olika delar af Sverige, Norge, Danmark och Finland. Trots det att många nummer blifvit särskildt utpreparerade och frigjorda från föroreningar, innehålla bland dessa 100 exemplar ej mindre än *66* större eller mindre partier af *Dicranum scoparium* (L.) Hedw., med hvilken arten i naturen växt blandad i barrskogar och bergsklyftor, på klippor och fjällslätter etc.

Af *Jungermannia minuta* Crantz, som i samma museum representeras af 121 exemplar, insamlade under likartade förhållanden, innehålla *55* nummer *Dicranum scoparium* (L.) Hedw. i större eller mindre mängd.

tioner, som helt säkert omedelbart efter och under inlandsisens afsmältande utgjorde en del af Skandinaviens vegetation, håller jag för troligt. Björkbestånden i trädgränsen ligga blott omkring 20 m. under formationens nedersta del och så nära, att de, som af analyserna framgår, strött frukter och hängefjäll i densamma. Denna trädgräns har i Härjeådalen fordom legat högre,[1]) och knappast har en gammal *Dicranum*-tundra kunnat hålla sig oförändrad, omgifven som den då blef af skogsformationer.

Man har sökt påvisa,[2]) att under ett långt framskridet skede af *Litorina*-tiden en klimatförsämring inträdde, åtföljd af ett utvidgande af de glaciala och subglaciala florornas områden. Kanske framryckte under denna tid tundra-formationer öfver den mark, som då rycktes från skogarne i nedre delen af den nuvarande *regio alpina inferior*, och kanske är den nu skildrade en återstod af dessa genom en senare klimatförbättring splittrade växtsamhällen. I detta sammanhang torde äfven böra erinras om det parti af tundran, som visar öfvergång till *Myrtillus nigra*-formationen, ett växtsamhälle, som på det närmaste är beslägtadt med undervegetationen i vissa af den centralskandinaviska björkregionens *Betuleta*.

Då formationen konstituerades såsom sådan, ägde helt säkert lafvarne i jämförelse med hvad nu är förhållandet en ringa betydelse i det frodiga mosstäcket, och hvad formationens framtid beträffar, tyder mycket på, att busklafvarne skola komma att spela en allt större och större rol. Gamla partier sådana som det, hvarur profbiten N:r 3 är uttagen, uppdelas också i två etager: ett undre, den af *Nephroma* genomväfda mossmattan, och ett öfre af busklafvar. Små partier af formationen finnas äfven, där detta öfre etage är så tätt, att *Dicranum* och *Nephroma* i undre etaget äro stadda i utdöende. *Platysma*-formen (företrädd af *Cetraria islandica* (L.) ACH.) och *Cladonia*-formen

---

[1]) A. G. KELLGREN, Några observationer öfver trädgränserna i våra sydliga fjälltrakter. Öfvers. K. Vet. Akad. Förhandl. 1893.

[2]) RUTGER SERNANDER, Om s. k. glaciala relikter. Botaniska Notiser 1894. GUNNAR ANDERSSON, Svenska växtvärldens historia. Stockholm 1896.

(företrädd af *Cladonia gracilis* (L.) Coem. *δ cornuta* (L.) Scrær.) ställa sig härvidlag som de vigtigaste inkräktarne.

Mosstäckets stora lifskraft gör det emellertid osäkert, om någon gång utvecklingen skall kulminera i en laftundra eller lafhed. I någon mån ha dessutom mossorna tillfälle att återtaga utrymme, då luckor i beståndet uppstå genom trampning af djur (t. ex. renar) och vid torka genom vinden, som upprifver busklafvar och epifytiska lafvar med de underliggande partier, som de dödat.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 181.

Eine Verallgemeinerung der LAMÉ'schen Differentialgleichung.

Von HAKON GRÖNWALL.

(Mitgetheilt den 8 Juni 1898 durch G. MITTAG-LEFFLER.)

Der Zweck dieser Mittheilung ist Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen mit $2n$-fach periodischen Coefficienten aufzustellen, die unter den in meiner Dissertation [1]) behandelten Systemen enthalten sind, und die füglich als Verallgemeinerungen der LAMÉ'schen Differentialgleichung betrachtet werden können.

Um das Problem bestimmt zu fassen, ist es nothwendig zuerst über die in der Dissertation erlangten Resultate kurz zu berichten.

In der ersten Abtheilung derselben wird allgemein ein System der Form

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_\gamma} = \sum_\beta a_{\alpha\beta\gamma}(x_1, \ldots, x_n) z_\beta \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, \ldots, m \\ \gamma = 1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

wo die Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ eindeutige analytische Functionen sind, deren Singularitäten (was z. B. bei Functionen rationalen Charakters der Fall ist) sämmtlich durch eine Gleichung

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

gegeben sind, wobei Φ eine ganze Function bedeutet, in Betracht gezogen unter der Annahme, dass das System ein Funda-

[1]) Om system af linjära totala differentialekvationer, särskildt sådana med $2n$-periodiska koefficienter. Upsala 1898.

mentalsystem von m linear unabhängigen Particularintegralen $z_{\alpha 1}, \ldots, z_{\alpha m}$ besitzt, so dass das allgemeine Integral der Form annimmt

$$z_\alpha = \sum_\beta c_\beta \cdot z_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Die einzigen Singularitäten der Integrale sind die Singularitäten der Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$, und bei der Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes stellt es sich als nothwendig heraus, die verschiedenen irreductiblen ganzen Functionen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$$

die Factoren von Φ sind, herauszuscheiden. Unter eine irreductible ganze Function ist dabei eine solche verstanden, die nicht eine Spaltung in zwei ganze Factoren, welche beide Nullstellen besitzen, zulässt. Es wird ausführlich auf die Eigenschaften der Integrale eingegangen, wobei zugleich die Untersuchungen der Herren FUCHS, HORN u. A., die sich jedoch nur auf den Fall *rationaler* Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ beziehen, in wesentlichen Punkten verallgemeinert und ergänzt werden. Namentlich wird die Frage nach dem Bestimmtsein der Integrale an einem irreductiblen singulären Gebilde $f_1 = 0$ vollständig beantwortet, d. h. die Frage nach den Bedingungen, unter welchen sämmtliche Integrale, mit gewissen Potenzen von f_1 multiplicirt, in jedem Punkte von $f_1 = 0$, durch welchen kein von $f_1 = 0$ verschiedenes singuläre Gebilde hindurchgeht, bestimmte endliche Grenzwerthe besitzen, wie auch die Annäherung an diesen Punkt geschieht.

Sämmtliche Entwickelungen werden wesentlich erleichtert durch die Reduction des Systems (1) auf eine Normalform, was folgendermassen geschieht. Es gelingt immer, eindeutige Functionen $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_m(x_1, \ldots, x_n)$ derart zu bestimmen, dass

$$z = A_1 z_1 + \ldots + A_m z_m \tag{3}$$

ein Gleichungensystem der Form

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m z}{\partial x_1^m} + p_{11}\dfrac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} + \ldots + p_{m1} z = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = p_{1i}\dfrac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} + \ldots + p_{mi} z \qquad (i=2, \ldots, n) \end{cases}$$

genügt, welches ein Fundamentalsystem von m Integralen besitzt, und aus jedem Integral von (4) berechnet sich das entsprechende Integral $z_1, \ldots, z_m$ von (1) vermöge der Formel

$$(5)\qquad z_\alpha = B_{\alpha 1}\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}} + \ldots + B_{\alpha m} z \qquad (\alpha=1, \ldots, m)$$

wo die B aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta\gamma}$ und $A_1, \ldots, A_m$ leicht zu bildende Grössen sind.

Die zweite Abtheilung der Dissertation enthält die Anwendung der allgemeinen Resultate auf den Fall, wo die Coefficienten des Systems $2n$-fach periodisch und das allgemeine Integral eindeutig sind. Damit die Singularitäten durch Gleichungen der Form $\Phi = 0$ dargestellt werden können, ist nothwendig und hinreichend, dass gewisse Bilinearrelationen und entsprechende Ungleichungen von den Perioden erfüllt sind.[1]) Wir schreiben statt $x_1, \ldots, x_n$ $u_1, \ldots, u_n$ und bezeichnen ein primitives Periodensystem durch

$$\begin{matrix} 2\omega_{11}, & \ldots, & 2\omega_{1,2n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 2\omega_{n1}, & \ldots, & 2\omega_{n,2n}; \end{matrix}$$

ist $f_1(u_1, \ldots, u_n) = 0$ ein irreductibles singuläre Gebilde, so nennen wir die Gebilde

$$f_1\left(u_1 + \sum_{\mu=1}^{2n} m_\mu \cdot 2\omega_{1\mu}, \ldots, u_n + \sum_{\mu=1}^{2n} m_\mu \cdot 2\omega_{n\mu}\right) = 0,$$

wo die m ganze Zahlen sind, welche Gebilde offenbar auch singulär sind, dem Gebilde $f_1(u_1, \ldots, u_n) = 0$ congruent; dann

[1]) Vgl. z. B. WIRTINGER, Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen, Wiener Monatshefte 1895—96.

kann die Gesammtheit der $f_1 = 0$ congruenten Gebilde durch eine einzige Gleichung

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = 0$$

dargestellt werden, wo Φ eine JACOBI'sche [1]) Function ist, d. h. eine ganze Function mit den Eigenschaften

$$\Phi(u_1 + 2\omega_{1\alpha}, \ldots, u_n + 2\omega_{n\alpha}) = e^{2\pi i\left(b_\alpha + \sum\limits_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\alpha} \cdot u_\lambda\right)} \cdot \Phi(u_1, \ldots, u_n).$$

Jede in dieser Weise aus einem irreductiblen singulären Gebilde hergeleitete JACOBI'sche Function nennen wir eine einfache, und die durch Nullsetzen derselben gewonnenen einfachen singulären Gebilde spielen bei unserem System dieselbe Rolle wie die irreductiblen Gebilde im allgemeinen Falle.

Bei der Reduction auf die Normalform ist es erlaubt, $A_1, \ldots, A_m$ als $2n$-fach periodisch anzunehmen, infolgedessen sich auch die Coefficienten p und B als $2n$-fach periodische Functionen ergeben.

Wenn nun das allgemeine Integral unseres Systems eindeutig ist, so giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen, die sich in Gruppen vertheilen, von deren jede die Gestalt hat

$$\begin{aligned}
z_{\alpha 1} &= \varphi_{\alpha 1} \\
z_{\alpha 2} &= \varphi_{\alpha 2} + \varphi_{\alpha 1} \cdot F_{11} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_{\alpha \nu} &= \varphi_{\alpha \nu} + \varphi_{\alpha, \nu-1} F_{\nu-1,1} + \cdots + \varphi_{\alpha 1} F_{\nu-1, \nu-1}
\end{aligned}$$

wo sämmtliche φ Multiplicatorfunctionen mit denselben Multiplicatoren sind, d. h. die Gleichungen befriedigen

$$\varphi(u_1 + 2\omega_{1\alpha}, \ldots, u_n + 2\omega_{n\alpha}) = \mu_\alpha \cdot \varphi(u_1, \ldots, u_n) \quad (\alpha = 1, .., 2n)$$

wo die μ Constanten sind. $F_{\lambda\mu}$ bedeutet eine ganze homogene Function μ:ten Grades von $u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial \log \Phi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \log \Phi}{\partial u_n}$, wo Φ eine beliebige JACOBI'sche Function ist; dabei sind die Coefficienten $2n$-fach periodische Functionen, die für $\lambda = \mu$ constant sind.

[1]) Ueber die allgemeine Theorie der JACOBI'schen Functionen vgl. FROBENIUS, Journ. f. Math. Bd. 97.

Ist das allgemeine Integral rationalen Charakters, worüber durch eine *endliche* Zahl von algebraischen Operationen entschieden wird, so erfordert die wirkliche Aufstellung des Fundamentalsystems nur noch eine endliche Anzahl algebraischer Processe.

Indem man versucht, diese allgemeine Theorie auf möglichst einfache Beispiele anzuwenden, hat man zu beachten, dass nach dem oben gesagten die Systeme mit nur einem einfachen singulären Gebilde die einfachsten sind in demselben Sinne, wie unter allen linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten diejenigen mit nur einem singulären Punkte im primitiven Periodenparallellogramm. Es erscheint demnach als angemessen, die genannten Systeme zuerst in Betracht zu ziehen, wobei nach dem trivialen Falle $m = 1$ sich die Systeme zweiter Ordnung ($m = 2$) zunächst darbieten. Bei der bevorzugten Stellung, welche die Normalform innerhalb der allgemeinen Theorie, über die oben berichtet wurde, einnimmt, stellt sich alsdann von selbst die Frage, alle Systeme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2} + p_{11}\frac{\partial z}{\partial u_1} + p_{21}z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = p_{1i}\frac{\partial z}{\partial u_1} + p_{2i}z \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

mit nur einem einfachen singulären Gebilde und allgemeinem Integral rationalen Charakters aufzufinden. Der Beantwortung dieser Frage ist die dritte Abtheilung der Dissertation gewidmet, und es ergiebt sich das Resultat, dass jedes derartige System durch eine Transformation

$$z = Z \cdot e^{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n}$$

$$u = u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n ,$$

wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, c_2, \ldots, c_n$ Constanten sind, in das System

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} = [k(k+1)\mathfrak{p}(u-u_0) + B]z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u_i} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

wo k ganzzahlig, u_0 und B constant, also in die LAMÉ'sche Differentialgleichung übergeführt wird.

Um also etwas Neues zu erreichen, muss man einen Schritt weiter gehen, wofür sich zwei Wege darbieten. Erstens kann man, an der Normalform festhaltend, die Systeme dritter oder höherer Ordnung in Betracht nehmen. Dies führt aber auf äusserst complicirte Rechnungen, und es ist mir bis jetzt nicht gelungen, auf diesem Wege befriedigende Resultate zu erreichen.

Zweitens kann man aber, was in diesem Aufsatze geschehen soll, versuchen, die Systeme zweiter Ordnung

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial u_\gamma} = a_{11\gamma} z_1 + a_{12\gamma} z_2 \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial z_\gamma} = a_{21\gamma} z_1 + a_{22\gamma} z_2 \end{cases} \qquad (\gamma = 1, \ldots, n)$$

aufzustellen, die ein Fundamentalsystem rationalen Charakters und ein einziges, einfaches singuläre Gebilde besitzen.

Es sei dieses singuläre Gebilde $\Phi(u_1, \ldots, u_n) = 0$, wo Φ eine einfache JACOBI'sche Function ist. Dann hat ein eindeutiges Fundamentalsystem entweder die Form

$$(7) \qquad \begin{cases} z_{11} = \varphi_{11}(u_1, \ldots, u_n), \; z_{12} = \varphi_{12}(u_1, \ldots, u_n) \\ z_{21} = \varphi_{21}(u_1, \ldots, u_n), \; z_{22} = \varphi_{22}(u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

wo φ_{11} und φ_{21} die Multiplicatoren μ_α, φ_{12} und φ_{22} die Multiplicatoren $\mu'_\alpha\,(\alpha = 1, \ldots, 2n)$ besitzen, und überdies die φ nur für $\Phi = 0$ unendlich werden, oder die Form

$$(8) \begin{cases} z_{11} = \varphi_{11}(u_1, \ldots, u_n), \; z_{12} = \varphi_{12}(u_1, \ldots, u_n) + \varphi_{11}(u_1, \ldots, u_n) \cdot L \\ z_{21} = \varphi_{21}(u_1, \ldots, u_n), \; z_{22} = \varphi_{22}(u_1, \ldots, u_n) + \varphi_{21}(u_1, \ldots, u_n) \cdot L \end{cases}$$

wo die φ dieselben Multiplicatoren μ_α besitzen und nur an $\Phi = 0$ unendlich werden, L aber ein in $u_1, \ldots, u_n, \dfrac{\partial \log \Phi}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial \log \Phi}{\partial u_n}$ linearer und homogener Ausdruck mit constanten Coefficienten ist. In beiden Fällen hat also die Determinante des Fundamentalsystems die Gestalt

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix};$$

andererseits ist offenbar

$$\frac{\partial \log D}{\partial u_\alpha} = a_{11\alpha} + a_{22\alpha} \tag{9}$$

woraus erhellt das D keine Null- oder Unendlichkeitsstellen ausser den Punkten von $\Phi = 0$ haben kann, also

$$D = \Phi^k \cdot e^{G(u_1, \ldots, u_n)} \tag{10}$$

wo G eine ganze Function ist. Indem man $\frac{\partial^2 \log D}{\partial u_\lambda \, \partial u_\mu}$ bildet, folgt aus dieser und der vorhergehenden Gleichung dass $\frac{\partial^2 G}{\partial u_\lambda \, \partial u_\mu}$ $2n$-fach periodisch, also constant ist:

$$\frac{\partial G}{\partial u_\lambda} = c_\lambda + c_{\lambda 1} u_1 + \ldots + c_{\lambda n} u_n .$$

Indem man dies in (10) einträgt, so kommt, da nach (9) $\frac{\partial \log D}{\partial u_\lambda}$ $2n$-fach periodisch ist:

$$k \cdot 2\pi i \, b_{\lambda\alpha} + c_{\lambda 1} \cdot 2\omega_{1\alpha} + \ldots + c_{\lambda n} \cdot 2\omega_{n\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, 2n)$$

woraus, da die Determinante der Perioden erster und zweiter Gattung $2\omega_{\lambda\alpha}$ und $b_{\lambda\alpha}$ einer JACOBI'schen Function von Null verschieden ist, $k = c_{\lambda 1} = \ldots = c_{\lambda n} = 0$ kommt. Es bleibt also

$$D = e^{c_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n}$$

oder indem man z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} mit $e^{-\frac{1}{2}(c_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n)}$ multiplicirt, was die Form des Gleichungensystemes (6) nicht ändert:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = 1 . \tag{11}$$

Wenn umgekehrt diese Gleichung stattfindet, so hat, wie aus der Determinanten-Darstellung der Coefficienten von (6) durch das Fundamentalsystem unmittelbar ersichtlich ist, unser System das einzige singuläre Gebilde $\Phi = 0$.

Indem wir also die Gleichung (11) in allgemeinster Art durch Multiplicatorfunctionen auflösen, die nur an dem Gebilde

$\Phi = 0$ unendlich werden, und diese Auflösungen in die Gleichungen (7) (oder wenn sämmtliche Functionen die nämlichen Multiplicatoren besitzen, ebensogut in die Gleichungen (8)) eintragen, erhalten wir das allgemeinste System (6) der gesuchten Eigenschaft.

Es giebt immer derartige Systeme; denn man braucht nur zu setzen

$$\varphi_{12} = A \tag{12}$$

wo A eine von 0 verschiedene Constante, φ_{11} und φ_{22} als $2n$-fach periodische Functionen, die nur für $\Phi = 0$ unendlich werden, zu bestimmen, und φ_{21} aus der Gleichung

$$A\varphi_{21} = \varphi_{11}\varphi_{22} - 1$$

zu berechnen.

Um (11) allgemein aufzulösen, kann man folgendermassen verfahren. Nach Einführung neuer Veränderlichen $v_1, \ldots, v_n$, die lineare Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ sind, kann man ohne wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass Φ eine gewöhnliche Thetafunction sei. [1]) Indem wir die v um Constanten vermehren, können wir annehmen, dass die Charakteristik dieser Thetafunction Null sei. Es werden φ_{11}, φ_{12}, φ_{21}, φ_{22} auf einen gemeinsamen Nenner Φ_1 gebracht, der also eine Potenz von Φ ist, und es sei m die Ordnung der Thetafunction Φ_1. Da nach (11) ein Multiplicator μ_α von φ_{11} und φ_{21} mit dem entsprechenden Multiplicator μ'_α von φ_{22} durch die Gleichung $\mu_\alpha\mu'_\alpha = 1$ verbunden ist, so erhellt unmittelbar, dass

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \frac{\Phi_{11}(v_1 + a_1, \ldots, v_n + a_n)}{\Phi_1(v_1, \ldots, v_n)} e^{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n} \\
\varphi_{21} &= \frac{\Phi_{21}(v_1 + a_1, \ldots, v_n + a_n)}{\Phi_1(v_1, \ldots, v_n)} e^{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n} \\
\varphi_{12} &= \frac{\Phi_{12}(v_1 - a_1, \ldots, v_n - a_n)}{\Phi_1(v_1, \ldots, v_n)} e^{-\lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_n v_n} \\
\varphi_{22} &= \frac{\Phi_{22}(v_1 - a_1, \ldots, v_n - a_n)}{\Phi_1(v_1, \ldots, v_n)} e^{-\lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_n v_n}
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

[1]) Vgl. WIRTINGER, a. a. O.

wo Φ_{11}, Φ_{21}, Φ_{12}, Φ_{22} Thetafunctionen der Ordnung m und von der Charakteristik Null sind, die a und λ aber Constanten, von welchen man letztere von vorn herein gleich Null setzen kann, da die Determinante (11) ihren Werth dadurch nicht ändert. Man hat aber, indem mit $\vartheta(v_1, \ldots, v_n \,|\, \tau_{\alpha\beta})$ die Thetafunction erster Ordnung und von der Charakteristik Null bezeichnet wird

$$(14)\begin{cases} \Phi_1(v_1, \ldots, v_n) = \sum\limits_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} c_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} e^{2\pi i(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)} \cdot \\ \cdot \vartheta(mv_1 + \lambda_1\tau_{11} + \ldots + \lambda_n\tau_{1n}, \ldots, mv_n + \lambda_1\tau_{n1} + \ldots + \lambda_n\tau_{nn} \,|\, m\tau_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

wo die c Constanten sind und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ unabhängig von einander die Werthe 0, 1, ..., $m-1$ annehmen, und weiter

$$(15)\begin{cases} \Phi_{11}(v_1 + a_1, \ldots, v_n + a_n) = \sum\limits_{\lambda, \ldots, \lambda_n} A_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} e^{2\pi i(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)} \cdot \\ \qquad \cdot \vartheta(mv_1 + ma_1 + \lambda_1\tau_{11} + \ldots + \lambda_n\tau_{1n}, \ldots \,|\, m\tau_{\alpha\beta}) \\ \Phi_{21}(v_1 + a_1, \ldots, v_n + a_n) = \sum\limits_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} B_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} e^{2\pi i(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)} \cdot \\ \qquad \cdot \vartheta(mv_1 + ma_1 + \lambda_1\tau_{11} + \ldots + \lambda_n\tau_{1n}, \ldots \,|\, m\tau_{\alpha\beta}) \\ \Phi_{12}(v_1 - a_1, \ldots, v_n - a_n) = \sum\limits_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} C_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} e^{2\pi i(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)} \cdot \\ \qquad \cdot \vartheta(mv_1 - ma_1 + \lambda_1\tau_{11} + \ldots + \lambda_n\tau_{1n}, \ldots \,|\, m\tau_{\alpha\beta}) \\ \Phi_{22}(v_1 - a_1, \ldots, v_n - a_n) = \sum\limits_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} D_{\lambda_1, \ldots, \lambda} e^{2\pi i(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)} \cdot \\ \qquad \cdot \vartheta(mv_1 - ma_1 + \lambda_1\tau_{11} + \ldots + \lambda_n\tau_{1n}, \ldots \,|\, m\tau_{\alpha\beta}) . \end{cases}$$

Es gilt übrigens die Formel [1])

$$(16)\begin{cases} \vartheta(v_1 + a_1, \ldots, v_n + a_n)\vartheta(v_1 - a_1, \ldots, v_n - a_n) = \\ \qquad = \sum\limits_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} e^{\pi i \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 2\varepsilon_\alpha(v_\alpha + a_\alpha) + \pi i \sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{n} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \tau_{\alpha\beta}} . \\ \cdot \vartheta(2v_1 + \varepsilon_1\tau_{11} + \ldots + \varepsilon_n\tau_{1n}, \ldots, 2v_n + \varepsilon_1\tau_{n1} + \ldots + \varepsilon_n\tau_{nn} \,|\, 2\tau_{\alpha\beta}) \cdot \\ \cdot \vartheta(2a_1 + \varepsilon_1\tau_{11} + \ldots + \varepsilon_n\tau_{1n}, \ldots, 2a_n + \varepsilon_1\tau_{n1} + \ldots + \varepsilon_n\tau_{nn} \,|\, 2\tau_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

[1]) KÖNIGSBERGER, Journ. f. Math. Bd. 64. 1865.

wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die 2^n Combinationen von 0, 1 durchlaufen. Bilden wir jetzt aus (14) und (15) die Determinante (11), so entsteht in Zähler und Nenner ein Aggregat von Gliedern, auf die wir (16) anwenden können, woraus sich nach wenigen Rechnungen die Formel ergiebt

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}D_{\mu_1,\ldots,\mu_n}-B_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}C_{\mu_1,\ldots,\mu_n})\cdot\\
&\cdot\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} e^{2\pi i\sum\limits_\alpha(\varepsilon_\alpha m+\lambda_\alpha+\mu_\alpha)v_\alpha+2\pi i\sum\limits_\alpha\varepsilon_\alpha(ma_\alpha+\lambda_1\tau_{\alpha1}+\ldots+\lambda_n\tau_{\alpha n})+\pi i\sum\limits_{\alpha,\beta}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\tau_{\alpha\beta}}\cdot\\
&\cdot\vartheta(2mv_1+(\lambda_1+\mu_1+m\varepsilon_1)\tau_{11}+\ldots+(\lambda_n+\mu_n+m\varepsilon_n)\tau_{1n},\ \ldots\,|\,2m\tau_{\alpha\beta})\cdot\\
&\cdot\vartheta(2ma_1+(\lambda_1-\mu_1+m\varepsilon_1)\tau_{11}+\ldots+(\lambda_n-\mu_n+m\varepsilon_n)\tau_{1n},\ \ldots\,|\,2m\tau_{\alpha\beta})\\
&\qquad\qquad=\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n}c_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\cdot c_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\cdot\\
&\cdot\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} e^{2\pi i\sum\limits_\alpha(\varepsilon_\alpha m+\lambda_\alpha+\mu_\alpha)v_\alpha+2\pi i\sum\limits_\alpha\varepsilon_\alpha(+\lambda_1\tau_{\alpha1}+\ldots+\lambda_n\tau_{\alpha n})+\pi i\sum\limits_{\alpha,\beta}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\tau_{\alpha\beta}}\cdot\\
&\cdot\vartheta(2mv_1+(\lambda_1+\mu_1+m\varepsilon_1)\tau_{11}+\ldots+(\lambda_n+\mu_n+m\varepsilon_n)\tau_{1n}\,|\,2m\tau_{\alpha\beta})\cdot\\
&\cdot\vartheta((\lambda_1-\mu_1+m\varepsilon_1)\tau_{11}+\ldots+(\lambda_n-\mu_n+m\varepsilon_n)\tau_{1n},\ \ldots,\,|\,2m\tau_{\alpha\beta}).
\end{aligned}\right.
$$

Indem wir hier beiderseits vermittelst der Periodicitätsgleichungen alle Vielfachsummen von Perioden, welche in den von $v_1, \ldots, v_n$ abhängigen Gliedern vorkommen, mod. $2m$ reduciren, und die Coefficienten der so erhaltenen Functionen

$$\vartheta(2mv_1+\nu_1\tau_{11}+\ldots+\nu_n\tau_{1n},\ldots\,|\,2m\tau_{\alpha\beta})\ (\nu_1,\ldots,\nu_n=0,1,\ldots,2m-1),$$

unter denen keine lineare Abhängigkeit bestehen kann, einander gleich setzen, bekommen wir $(2m)^n$ Gleichungen zwischen den $5m^n+n$ Grössen $c, A, B, C, D, a_1, \ldots, a_n$. Für $n>2$ giebt es also mehr Gleichungen als Unbekannte, und es scheint als ob dieselben nur in dem durch (12) gekenntzeichneten Falle vereinbar seien. Indem ich mir die genauere Untersuchung der allgemeinen Gleichungen für einen folgenden Aufsatz vorbehalte, gehe ich jetzt zu dem Falle $n=2$ über.

Indem wir auf das gesuchte Fundamentalsystem in (11) eine lineare Transformation ausführen, können wir vier der Constanten

A, B, C, D beliebige Werthe geben. Es bleiben also von ihnen $4m^2 - 4$ übrig, während die c und a_1, a_2 $2m^2 + 2$, also im Ganzen $5m^2 - 2$ Constanten liefern, die $4m^2$ algebraischen Gleichungen genügen. Diese Gleichungen sind für die besondere Annahme (12) vereinbar und demzufolge sind also wenigstens in einer gewissen Umgebung der von (12) bedingten Werthe sämmtliche Constanten A, B, C, D, c als algebraische Functionen von $m^2 - 4$ der Constanten c und der Werthe gewisser Thetafunctionen von a_1, a_2 gegeben. Damit wir jetzt eine Lösung unserer Aufgabe besitzen, ist noch nothwendig (und hinreichend) dass die Thetafunction (14) einfach oder eine Potenz einer einfachen Theta sei. Untersuchen wir insbesondere, wann (14) eine einfache Theta darstellt. Eine nicht einfache Thetafunction kann, wie aus der Definition der Einfachheit hervorgeht, zunächst als ein Product zweier JACOBI'schen Functionen mit denselben Perioden erster Gattung dargestellt werden; diese Factoren sind aber, von dem Falle abgesehen, dass zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ eine gewisse quadratische Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten besteht,[1]) beide Thetafunctionen, und man hätte also wenn Φ_1 nicht einfach wäre:

$$\Phi_1(v_1, v_2) =$$
$$= \Phi_2(v_1 + (m - \nu)\alpha_1, v_2 + (m - \nu)\alpha_2) \cdot \Phi_3(v_1 - \nu\alpha_1, v_2 - \nu\alpha_2)$$

wo Φ_2 und Φ_3 Thetas von den Ordnungen ν und $m - \nu$ resp. sind. Ein solches Produkt enthält aber, α_1 und α_2 mitgerechnet, $\nu^2 + (m - \nu)^2 + 1$ Constanten, also da $\nu \geqq 1$, deren höchstens $m^2 - 2m + 2$. Geben wir jetzt a_1 und a_2 feste Werthe in der Nähe von 0,0, welches Werthpaar (12) entspricht, so sind, wie wir gesehen haben, alle c algebraische Functionen von $m^2 - 4$ unter ihnen. Sofort aber $m > 3$ wird, so ist diese Zahl grösser als $m^2 - 2m + 2$, und man kann also die $m^2 - 4$ willkürlichen unter den c so wählen, dass die durch (14) definirte Φ_1 eine einfache Thetafunction wird.

---

[1]) Dieser Fall ist neuerdings von Herrn HUMBERT eingehend untersucht worden, vgl. Comptes Rendus, 1898, Januar—April.

Hiermit ist aber nachgewiesen, dass wir wenigstens für $m > 3$ durch Auflösung der Gleichung (11) Systeme linearer totaler Differentialgleichungen in zwei unabhängigen und zwei abhängigen Veränderlichen darstellen können, die in dem früher erklärten Sinne Verallgemeinerungen der LAMÉ'schen Differentialgleichung sind.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 324.)

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1898: 1—23. 8:o.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 49 (1897): H. 4. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 48 (1892): Abth. 1—3. 8:o.
— *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen in den Jahren 1895 u. 1896. 4:o.
Verhandlungen der Konferenz der Vorstände deutscher meteorologischer Centralstellen, 1897. 8:o.
— *Forstliche Versuchsanstalten.*
Beobachtungs-Ergebnisse der forstlich-meteorologischen Stationen. Jahrg. 23 (1897). 8:o.
Bombay. *Government observatory.*
Magnetical and meteorological observations. 1896. 4:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 35 (1898): N:o 4. 8:o.
Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtani közlöny. K. 38 (1898): F. 1—4. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 11: H. 8. 1898. 8:o.
Jahresbericht. 1895. 8:o.
Calcutta. *Geological survey of India.*
Memoirs. Vol. 27: P. 2. 1897. 8:o.
Palæontologia Indica. Ser. 15: Vol. 1: P. 4; Vol. 2: P. 1. Ser. 16: Vol. 1: P. 2—3. 1897. Fol.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 32: N:o 1-2. 1898. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 6 (1898): N:o 6. 8:o.
Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Vorläufige Mitteilung der Beobachtungs-Ergebnisse von 12 Stationen 2. Ordn. in Sachsen. 1897: 1—6, 8. 4:o.
Constantinople. *Observatoire impériale.*
Phénomènes seismiques. 1897: 1—4. 4:o.
Observations météorologiques. 1897: 1—2. 4:o.
Erlangen. *Physikalisch-medicinische Societät.*
Sitzungsberichte. H. 29 (1897). 8:o.
Freiburg i. B. *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd 10 (1897/98): H. 1—3. 8:o.
Genova. *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*
Atti. Vol. 9 (1898): N:o 2. 8:o.
— *Musei di zoologia e anatomia comparata della R. Università.*
Bollettino. N:o 56—61. 1897. 8:o.

Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 70 (1898): H. 5—6. 8:o.

Hamburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. (4) 5. 1897. 8:o.

Harlem. *Musée Teyler.*
Archives. (2) Vol. 5: P. 4; 6: 1. 1898. 8:o.

Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*
Statistisk årsbok för Finland. Årg. 19 (1898). 8:o.

Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd 32 (1898): H. 1—2. 8:o.

Kharkow. *Université impériale.*
Annales. 1898: Kn. 1. 8:o.
— *Société des naturalistes à l'université.*
Travaux. T. 32 (1898). 8:o.

Kjöbenhavn. *Dansk meteorologisk Institut.*
Meteorologisk Aarbog. 1894: D. 2; 1896: 1. Fol.
Nautisk-meteorologiske Observationer. 1897. 4:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Berichte. Philol.-hist. Cl. Bd 50 (1898): 1. 8:o.
— *Verein für Erdkunde.*
Mittheilungen. 1897. 8:o.

Leon. *Observatorio meteorologico.*
Boletin mensual. 1897: 7—12. Fol.

Liège. *Société géologique de Belgique.*
Annales. T. 25: Livr. 1. 1898. 8:o.

London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1898): P. 7. 8:o.
— *Royal institution of Great Britain.*
Proceedings. Vol. 15: P. 2. 1898. 8:o.
— *Nautical Almanac office.*
Nautical Almanac circular. N:o 17. 1898. 8:o.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 58 (1898): N:o 6. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 73—74 (1898): 5. 8:o.
Proceedings. Session 1897/98: N:o 194—195. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 63 (1898): N:o 393—395. 8:o.
— *Zoological society.*
Proceedings. 1898: P. 1. 8:o.
Transactions. Vol. 14: P. 6. 1898. 4:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1898: N:o 133—135. 8:o.

London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 5. 8:o.
Annual report. 28 (1897). 8:o.

Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 42 (1897/98): P. 2. 8:o.
Manila. *Observatorio.*
Boletín mensual. 1897: 6—8. 4:o.
Melbourne. *Observatory.*
Record of results of observations. 1897: 1—6. 8:o.
Mexico. *Academia Mexicana de ciencias exactas, fisicas y naturales.*
Anuario. Año 2 (1896). 8:o.
Reseña presentada en la sesion $^{10}/_{1}$ 1898. 8:o.
— *Instituto médico nacional.*
Datos para la materia médica Mexicana. P. 2. 1898. 8:o.
— *Observatorio meteorologico central.*
Boletin mensual. 1898: 1. 4:o.
Montevideo. *Museo nacional.*
Anales. T. 2: Fasc. 8. 1898. 8:o.
München. *K. Meteorologische Central-Station.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 19 (1897): H. 3. 4:o.
Napoli. *Academia di archeologia, lettere e belle arti.*
Rendiconto. N. S. Anno 12 (1898): 1—2. 8:o.
Oaxaca. *Observatorio meteorologico del estado.*
Boletin. T. 1 (1897/98): N:o 1—8. Fol.
Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 6. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
La feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1898): N:o 332. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 19 (1898): Trim. 1. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 26 (1898): N:o 1. 8:o.
Mémoires. Paléontologie. T. 7: Fasc. 4: P. 2. 1898. 4:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 45 (1897): 1—3. 8:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 7.

Onsdagen den 14 September.

INNEHÅLL.

Tillkännagafs att Akademiens utländske ledamot f. d. Professorn vid universitetet i Helsingfors Arkiatern EVERT JULIUS BONSDORFF med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å ett af särskilda komiterade uppgjordt förslag till ny jagtstadga afgåfvo Herrar Baron SKOGMAN och Professor SMITT infordradt utlåtande i ämnet, hvilket utlåtande af Akademien godkändes.

Med anledning af en utaf K. Medicinalstyrelsen till Akademien öfverlemnad skrifvelse från Doktor ALEXANDER-KATZ i Görlitz om erhållande af vattenprof från Sveriges hafskuster afgåfvo Herrar RUBENSON och PETTERSSON infordradt utlåtande med tillkännagifvande, att genom den svenska hydrografiska

kommissionens försorg anordningar blifvit träffade för dylika vattenprofs upphemtande vid de båda fyrstationerna Måseskär och Väderöbod samt desammas öfversändande till Dr. ALEXANDER-KATZ.

Friherre NORDENSKIÖLD redogjorde för de undersökningar, som med magnetometer gjorts för utredande af beskaffenheten och omfånget af en jernmalmsfyndighet i Finska viken i grannskapet af Jan Månssons segerskär nära Hangö.

Herr MITTAG-LEFFLER öfverlemnade för intagande i Öfversigten dels en uppsats af honom sjelf: »Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion. Tredje meddelande» samt redogjorde för densammas innehåll, och dels de i innehållsförteckningen upptagna uppsatserna af Docenten H. GRÖNVALL och Ingeniören JOHN RHODIN.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

dels i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) »Zur Theorie der sogenannten Absorption gelöster Stoffe», af Fil. Kandidat L. LAGERGREN; 2:o) »Sur la forme générale des éléments elliptiques dans le problème des trois corps», af Fil. Kandidat H. VON ZEIPEL; 3:o) »Om absorptionsspectra hos erbium, holmium och tulium», af Lektor S. FORSLING; 4:o) »Stilbum vulgare Tode, ein bisher verkannter Basidiomycet», af Docenten H. O. JUEL; 5:o) »Faunan i Skånes yngre krita. II. Lamellibranchiater», af Docenten A. HENNIG; och

dels i Öfversigten: de i innehållsförteckningen uppräknade 7 uppsatser.

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 9 häften. 4:o.
— *Generalstaben.*
Norrbottens läns kartverk, 1 : 200,000. Bl. 41.
Karta öfver Sverige, 1 : 100,000. Bl. 90.

(Forts. å sid. 386.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 182.

Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion.

Tredje meddelande.

Af G. Mittag-Leffler.

(Meddeladt den 14 September 1898.)

Låt l vara en rät linie, hvilken går genom origo i det plan, som framställer den oberoende variabeln x. Låt variabeln ξ framställa de olika punkterna på l och låt ε vara en af dessa punkter.

Låt oss vidare med Shu, Chu, Thu, förstå

$$(1) \quad \begin{cases} Shu = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \\ Chu = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \\ Thu = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}. \end{cases}$$

Låt oss härefter införa afbildningsfunktionen:

$$(2) \quad \varphi(z \mid \varepsilon) = \frac{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{z}{\varepsilon}\right) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{z}{\varepsilon}\right) + Sh\frac{\pi}{2}}.$$

Låt oss vidare i x-planet konstruera en öppen figur X_ε hvilken må ha följande utseende. Den är symmetrisk i förhållande till l samt begränsas dels af tvänne med l paralella

räta linier, hvilka äro belägna på afståndet $|\varepsilon|$ från l, dels af en tredje mot l vinkelrät linie, hvilken går genom punkten $-\varepsilon$.

Om vi nu låta z beskrifva det inre af X_ε så afbildas denna figur i ett plan, som framställer variabeln φ konformt på det inre af en cirkel C, hvilken har origo till medelpunkt och *ett* till radie.

Hvarje entydigt gifvet ändligt ställe z, hvilket tillhör det inre af X_ε, motsvaras härvid af ett enda ställe φ, hvilket tillhör det inre af C och vice versa. Hvarje punkt å begränsningen af X_ε motsvaras likaså entydigt af en punkt å begränsningen af C och vice-versa, dock med undantag af $\varphi = 1$. Om detta ställe gäller, att när absoluta beloppet för z växer öfver hvarje gräns, under det att z alltid tillhör det inre eller begränsningen af X_ε, så närmar sig φ samtidigt till $\varphi = 1$. Linien l afbildas genom (2) på radien $(0, 1)$ till cirkeln C och förlängningen af l mellan 0 och $-\varepsilon$ på radien $(0, -1)$.

Hvarje till l symmetrisk figur, hvilken tillhör X_ε afbildas på en till diagonalen $(-1, +1)$ symmetrisk figur, hvilken tillhör C och vice-versa. När z genomlöper den med l paralella begränsningslinie, som vi dragit genom punkten $-\varepsilon + i\varepsilon$ från ∞ och till denna punkt, genomlöper φ samtidigt periferien till C från $\varphi = +1$ till $\varphi = \dfrac{i - Sh\frac{\pi}{2}}{i + Sh\frac{\pi}{2}}$. När vidare z från $-\varepsilon + i\varepsilon$ till $-\varepsilon$ genomlöper den mot L vertikala begränsningslinie, hvilken går genom punkten $-\varepsilon$, genomlöper φ samtidigt periferien till C från $\varphi = \dfrac{i - Sh\frac{\pi}{2}}{i + Sh\frac{\pi}{2}}$ till $\varphi = -1$.

Vi anteckna ytterligare följande. Låt oss med α och β förstå tvänne reella qvantiteter, af hvilka

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \begin{cases} -1 \leqq \alpha \\ -1 \leqq \beta \leqq +1 \end{cases}$$

och sätt

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z = \varepsilon(\alpha + i\beta).$$

Sätt vidare:

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = u + iv \\ &r = |\varphi| = \sqrt{u^2 + v^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Vi erhålla från (2)

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} &Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}\beta = Sh\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1+r^2-2u} \\ &Ch\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2}\beta = 2Sh\frac{\pi}{2}\frac{v}{1+r^2-2u} \end{aligned}\right.$$

$$(7) \quad r^2 = \frac{\left(Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}\beta - Sh\frac{\pi}{2}\right)^2 + Ch^2\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{2}\beta}{\left(Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}\beta + Sh\frac{\pi}{2}\right)^2 + Ch^2\frac{\pi}{2}(1+\alpha)\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{2}\beta}\,.$$

Likheten (7) lär oss, att om z genomlöper en vertikal linie mot l, som genereras, då α har ett fast värde och β varierar från noll till $+1$, så växer härvid absoluta beloppet för φ från

$$\frac{Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha) + Sh\frac{\pi}{2}}$$

till *ett*.

Låt oss i likheterna (6) åt r ge ett fast värde mindre än *ett*. Dessa likheter framställa då en kroklinie $X_{\varepsilon,\,r}$ uti x-planet, hvilken skär l och dess förlängning i de båda punkterna:

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned} &\xi = \varepsilon\alpha\,;\ Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha) = Sh\frac{\pi}{2}\frac{1-r}{1+r} \\ &\qquad\quad Sh\frac{\pi}{2}(1+\alpha) = Sh\frac{\pi}{2}\frac{1+r}{1-r} \end{aligned}\right.$$

samt är symmetrisk till l. Tänker man sig i φ-planet en cirkel med origo till medelpunkt och r till radie, förmedlar likheten (2) ett konformt och entydigt samband mellan de olika punkter, hvilka tillhöra denna cirkel och de olika punkterna af $X_{\varepsilon,\,r}$.

Låt oss nu med $F(z)$ förstå en analytisk funktion af variabeln z, hvilken har en gren, som för närmaste omgifningen af

$z=0$ förhåller sig regulärt. Låt oss vidare beteckna de värden som denna gren samt dess derivator i punkten $z=0$ antaga med

$$(9) \quad \left(\frac{dF^{(\mu)}(z)}{dz^{\mu}}\right)_{z=0} = F^{(\mu)}(0)\,;\ \mu = 0,\ 1,\ 2\ldots;\ F^{(0)}(0) = F(0)\,.$$

Om nu ϱ är radien till konvergenscirkeln för potensserien

$$(10) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(0)\frac{z^{\mu}}{\underline{|\mu}}$$

och ε väljes så att

$$(11) \quad |\varepsilon| < \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho$$

så blir den ifrågavarande grenen af vår analytiska funktion entydig och regulär åtminstone inom den del af X_ε, hvilken faller inom konvergenscirkeln med radien ϱ, och härmed äfven för ett område $X_{\varepsilon,r}$ der r blifvit vald tillräckligt liten. Om ε uppfyller villkoret (11) och den positiva qvantiteten r väljes tillräckligt liten, är således grenen $FX_{\varepsilon,r}(z)$, hvilken är definierad genom likheterna (9) entydig och regulär för hela området $X_{\varepsilon,r}$. Det finnes också vid gifvet ε en öfre gräns r_ε för alla de positiva värden på r, för hvilka detta förhållande eger rum.

Låt oss nu bilda den LAGRANGE'ska serien:

$$(12) \quad \mathfrak{P}(\varphi(z|\varepsilon)) = F(0) + A_1(\varepsilon)\frac{\varphi(z|\varepsilon)}{\underline{|1}} + \ldots + A_n(\varepsilon)\frac{\varphi(z|\varepsilon)^n}{\underline{|n}} + \ldots$$

i hvilken:

$$(13) \quad \begin{cases} A_1(\varepsilon) = \left(\dfrac{z}{\varphi(z)}F'(z)\right)_{z=0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n(\varepsilon) = \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\left(\dfrac{z}{\varphi(z)}\right)^n F'(z)\right)_{z=0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

samt

$$F'(z) = \frac{dFX_{\varepsilon,r}(z)}{dz}\,.$$

Denna serie konvergerar samt framställer grenen $FX_{\varepsilon,\,r}(z)$ inom hvarje område $X_{\varepsilon,\,r}$ der denna gren förhåller sig entydig och regulär.

Vi ha valt ε på linien l så att olikheten (11) är uppfylld, och vi ha med ξ betecknat de olika punkterna på l. Om vi analytiskt fortsätta elementet (10) längs linien l, kan det hända, att denna fortsättning kan utsträckas öfver hvarje ändligt ställe ξ men det kan också inträffa, att det finnes ett första ställe $\xi = \xi_0$ öfver hvilket en sådan fortsättning icke är möjlig.

Låt oss med ξ' beteckna ett ställe ξ, för hvilket

$$(15) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\xi'}{\xi_0} < 1\,,$$

men som i öfrigt må vara valdt huru nära ξ_0 som helst. Låt vidare ξ'' vara ett annat ställe ξ, sådant att

$$(16) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\xi'}{\xi_0} < \frac{\xi''}{\xi_0} < 1\,.$$

Låt oss vidare sätta:

$$(17) \quad \ldots \ldots \quad r = \frac{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\xi''}{\varepsilon}\right) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\xi''}{2}\right) + Sh\frac{\pi}{2}}\,.$$

Man kan alltid för $|\varepsilon|$ fastställa en sådan öfre gräns, att när $|\varepsilon|$ är beläget under densamma grenen $FX_{\varepsilon,\,r}(z)$ för hela området $X_{\varepsilon,\,r}$ förhåller sig entydig och regulär, och att härmed serien (12) är konvergent. Mot hvarje positiv qvantitet δ, huru liten som helst, svarar således alltid ett positivt helt tal $\overline{n}$, så stort att

$$\left| A_n(\varepsilon)\,\frac{\varphi(\xi''\,|\,\varepsilon)}{\lfloor n} \right| < \delta$$

så snart blott $n \geqq \overline{n}$.

Låt nu $\xi = \xi'$ vara ett ställe med följande egenskap. Det motsvaras af tvänne andra ställen $\xi = \varepsilon$ och $\xi = \xi''$, af hvilka ε uppfyller olikheten (11), och

$$(18) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\xi'}{\xi''} < 1\,,$$

samt hvilka äro sådana, att när δ är en godtycklig positiv qvantitet, hvilken som helst, finnes alltid ett positivt helt tal $\overline{n}$, sådant att:

$$\left| A_n(\varepsilon) \frac{\varphi(\xi'' \mid \varepsilon)}{\underline{|n}} \right| < \delta$$

så snart $n \geqq \overline{n}$. Då detta inträffar är serien $\mathfrak{P}(\varphi(\xi \mid \varepsilon))$, der $\frac{\xi}{\xi''} < 1$ en konvergerande serie, hvaraf åter följer, att serien $\mathfrak{P}(\varphi(z \mid \varepsilon))$ konvergerar inom området $X_{\varepsilon,\, r}$, der

$$r = \frac{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\xi''}{\varepsilon}\right) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\xi''}{\varepsilon}\right) + Sh\frac{\pi}{2}}$$

och att således $\xi = \xi'$ är ett regulärt ställe till grenen $FX_{\varepsilon,\, r}(z)$, och således kan inryckas inom en analytisk fortsättning längs linien l utaf elementet (10).

Vi ha således som nödvändigt och tillräckligt villkor för att ξ' skall vara ett sådant regulärt ställe till $F(x)$, hvilket kan inryckas inom en analytisk fortsättning längs l af funktionselementet

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(0) \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}$$

erhållit följande.

»Det skall alltid vara möjligt att till ξ' adjungera tvänne nya ställen ε och ξ'', hvilka också tillhöra l, och af hvilka ε uppfyller olikheten (11), samt ξ'' olikheten (18), samt hvilka ha följande egenskap. Om man godtyckligt fastställer ett positivt tal δ, huru litet som helst, kan man alltid till detsamma adjungera ett positivt helt tal $\overline{n}$, så stort att:

$$(19) \quad \ldots \quad \left| A_n(\varepsilon) \left(\frac{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\xi''}{\varepsilon}\right) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\xi''}{\varepsilon}\right) + Sh\frac{\pi}{2}} \right)^n \right| < \delta$$

så snart $n \geqq \overline{n}$.»

Man har förut känt kriterier, hvilka afgöra om ett ställe beläget på konvergeoscirkeln till serien (10) är regulärt eller ej, [1]) men ett kriterium, som besvarar frågan, huruvida ett ställe, hvilket som helst å en linie l genom origo är ett sådant regulärt ställe, hvilket kan inryckas inom en analytisk fortsättning längs l af elementet (10), och hvilket på samma gång är direkt uttryckt uti qvantiteterna $F^{(\mu)}(0)$; $\mu = 0, 1, 2 \ldots$ har icke hittills blifvit framställdt.

Vi vilja nu närmare granska sammansättningen af qvantiteterna $A_n(\varepsilon)$, hvilka ingå som koefficienter uti serien (12), samt härifrån öfvergått i kriteriet (19).

Vi ha:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \varphi(z \mid \varepsilon) = \frac{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{z}{\varepsilon}\right) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{z}{2}\right) + Sh\frac{\pi}{2}}$$

och således om vi sätta:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{\varepsilon} \cdot z = u$$

$$v_n = \left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{\varepsilon}\right)^n \left(\frac{z}{\varphi(z \mid \varepsilon)}\right)^n = \left(u\,\frac{Sh(\frac{1}{2}\pi + u) + Sh\frac{1}{2}\pi}{Sh(\frac{1}{2}\pi + u) - Sh\frac{1}{2}\pi}\right)^n.$$

Nu är:

$$Sh(\tfrac{1}{2}\pi + u) - Sh\tfrac{1}{2}\pi = Ch\tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{u}{\underline{|1}} + Th\tfrac{1}{2}\pi\frac{u^2}{\underline{|2}} + \frac{u^3}{\underline{|3}} + Th\tfrac{1}{2}\pi\frac{u^4}{\underline{|4}} + \ldots\right)$$

och således:

$$\frac{Sh(\frac{1}{2}\pi + u) - Sh\frac{1}{2}\pi}{u} = Ch\tfrac{1}{2}\pi\left(1 + Th\tfrac{1}{2}\pi\frac{u}{\underline{|2}} + \frac{u^2}{\underline{|3}} + Th\tfrac{1}{2}\pi\frac{u^3}{\underline{|4}} + \ldots\right)$$

$$= Ch\tfrac{1}{2}\pi\left(\alpha_0 + \alpha_1\frac{u}{\underline{|2}} + \alpha_2\frac{u^2}{\underline{|3}} + \alpha_3\frac{u^3}{\underline{|4}} + \ldots\right)$$

hvarest:

$$(22) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \alpha_{2m} = 1 \\ \alpha_{2m+1} = Th\frac{1}{2}\pi \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

[1]) c. f. t. ex. HADAMARD. Essai sur l'étude des functions données par leur développement de Taylor. Journal de Mathématiques pures et appliquées. Série IV. Tome 8.

BOREL. Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Journal de Math. p. et ap. Serie V. Tome 2.

Således:

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{Sh(\frac{1}{2}\pi + u) - Sh\frac{1}{2}\pi}{u}\right)^n = \\ = (Ch\tfrac{1}{2}\pi)^n \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\mu=0,1,2,\ldots m\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{\alpha_{\lambda_1}\cdot\alpha_{\lambda_2}\ldots\alpha_{\lambda_\mu}}{\underline{|\lambda_1+1}\,\underline{|\lambda_2+1}\ldots\underline{|\lambda_n+1}}\right)u^m . \end{cases}$$

Vidare är:

$$(24)\quad Sh(\tfrac{1}{2}\pi+u)+Sh\tfrac{1}{2}\pi = Ch\tfrac{1}{2}\pi\left(\beta_0+\beta_1\frac{u}{\underline{|2}}+\beta_2\frac{u^2}{\underline{|2}}+\beta_3\frac{u^3}{\underline{|3}}+\ldots\right)$$

hvarest

$$(25)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \begin{cases}\beta_0 = 2Th\frac{1}{2}\pi \\ \beta_{2m} = Th\frac{1}{2}\pi \qquad\qquad m=1,2,\ldots \\ \beta_{2m-1} = 1\end{cases}$$

och således:

$$(26)\quad (Sh(\tfrac{1}{2}\pi+u)+Sh\tfrac{1}{2}\pi)^n = (Ch\tfrac{1}{2}\pi)^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=0,1,\ldots m\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}}\frac{\beta_{\lambda_1}\beta_{\lambda_2}\ldots\beta_{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}}\right)\cdot u^m.$$

Låt oss nu sätta:

$$(27)\quad .\ .\ .\ .\ .\ v_n = \gamma_{n0}+\gamma_{n1}\cdot u+\gamma_{n2}u^2+\ldots$$

samt uti likheten

$$v_n\left(\frac{Sh(\frac{1}{2}\pi+u)-Sh\frac{1}{2}\pi}{u}\right)^n = (Sh(\tfrac{1}{2}\pi+u)+Sh\tfrac{1}{2}\pi)^n$$

utveckla högra och venstra membrum efter potenser af u, samt sätta koefficienterna för u^m lika med hvarandra, så erhålles, då vi för korthetens skull sätta:

$$(28)\quad .\ .\ .\ \sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=0,2,\ldots m\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}}\frac{\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2}\ldots\alpha_{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1+1}\,\underline{|\lambda_2+1}\ldots\underline{|\lambda_n+1}} = (n\,,\ m)$$

$$(29)\quad \begin{cases}\gamma_{n\,m}+\gamma_{n\,m-1}(n\,1)+\gamma_{n\,m-2}(n\,2)+\ldots+\gamma_{n\,0}(n\,m) = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=0,1,2,\ldots m\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}}\frac{\beta_{\lambda_1}\ldots\beta_{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\ldots\underline{|\lambda_n}}.\end{cases}$$

Nu är:

$$A_n(\varepsilon) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(\frac{z}{\varphi(z)}\right)^n F'(z)\right]_{z=0}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left[v_n F'\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi} u\right)\right]_{u=0}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi} \underline{|n-1}\left[v_n \cdot F'\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi} u\right)\right]_{u^{n-1}}$$

och vi erhålla således som uttryck för $A_n(\varepsilon)$

$$(30) \begin{cases} A_n(\varepsilon) = \gamma_{n0} F^{(n)}(0)\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^n + (n-1)\gamma_{n1} F^{(n-1)}(0)\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^{n-1} + \ldots \\ + (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot \gamma_{n\, n-3} F'''(0)\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^3 + \\ + (n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot \gamma_{n\, n-2} F''(0)\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2 \\ + (n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 \cdot \gamma_{n\, n-1} F'(0)\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right) \end{cases}$$

hvarest $\gamma_{n0}\, \gamma_{n1} \ldots \gamma_{n,\, n-1}$ äro gifna genom rekursionsformlerna (29) och $(n\, 1)\, (n\, 2) \ldots (n\, m)$ äro gifna genom formlerna (28). Af formlerna (28) jemförda med (22) framgår att $(n\, m)$ är en hel rationel funktion af $Th\frac{1}{2}\pi$ med positiva rationella talkoefficienten, hvilken i afseende på $Th\frac{1}{2}\pi$ är af graden m. Af rekursionsformlerna (29) jemförda med (25) framgår åter att $\gamma_{n,\, m}$ är en hel rationel funktion af $Th\frac{1}{2}\pi$ med rationella talkoefficienter, och som i afseende på $Th\frac{1}{2}\pi$ är af graden $n + m$.

Det resultat, vi härmed erhållit, kan sammanfattas i följande teorem:

Teorem. »Låt l vara en rät linie genom origo i planet för den oberoende variabeln x. Låt ξ vara ett gifvet ställe å l.

Låt vidare:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} F^{(\mu)}(0) \frac{x^\mu}{\underline{|\mu}}$$

med kongruensradien ϱ vara ett element af den analytiska funktionen $F(x)$.

Man kan alltid på följande sätt afgöra om ξ är ett sådant regulärt ställe till funktionen $F(x)$, hvilket kan inryckas inom en analytisk fortsättning längs linien l utaf funktionselementet $\mathfrak{P}(x)$.

Man bildar:

$$(n\,m) = \sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \\ 0,1,2,\ldots m \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = m}} \frac{\alpha_{\lambda_1}\cdot\alpha_{\lambda_2}\ldots\alpha_{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1+1}\,\underline{|\lambda_2+1}\ldots\underline{|\lambda_n+1}}$$

hvarest

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} &= 1 \\ \alpha_{2m+1} &= Th\tfrac{1}{2}\pi \end{aligned} \qquad m=0,1,2,\ldots$$

samt härleder ur rekursionsformeln

$$\gamma_{n\,m} + \gamma_{n\,m-1}(n\,1) + \gamma_{n\,m-2}(n\,2) + \ldots + \gamma_{n\,0}(n\,m) = \sum_{\substack{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \\ 0,1,2,\ldots\ldots \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = m}} \frac{\beta_{\lambda_1}\cdot\beta_{\lambda_2}\ldots\beta_{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\ldots\underline{|\lambda_n}}$$

der

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 2Th\tfrac{1}{2}\pi \\ \beta_{2m} &= Th\tfrac{1}{2}\pi \\ \beta_{2m-1} &= 1 \end{aligned} \qquad m=1,2,\ldots$$

qvantiteterna:

$$\gamma_{n0}\,\gamma_{n1}\ldots\gamma_{nm}\,.$$

Man bildar härefter uttrycket:

$$\begin{aligned} \frac{A_n(\varepsilon)}{\underline{|n-1}} = \gamma_{n,n-1}F'(0)\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right) + \gamma_{n,n-2}F''(0)\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2}{\underline{|1}} + \\ + \gamma_{n,n-3}F'''(0)\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^3}{\underline{|2}} + \ldots + \gamma_{n1}F^{(n-1)}(0)\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^{n-1}}{\underline{|n-2}} + \\ + \gamma_{n0}F^{(n)}(0)\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\pi}\right)^{n}}{\underline{|n-1}}\,. \end{aligned}$$

För att nu ξ skall vara sådant regulärt ställe, som vi angifvit, är följande nödvändigt och tillräckligt.

Det skall vara möjligt att till ξ adjungera tvänne sådana å linien l belägna ställen ε och η, att

$$|\varepsilon| < \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho \text{ och } \frac{\xi}{\eta} < 1$$

samt att till hvarje huru liten positiv qvantitet δ som helst alltid kan adjungeras ett positivt helt tal $\bar{n}$ så stort att

$$\left| A_n(\varepsilon)\left(\frac{Sh\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\eta}{\varepsilon}\right) - Sh\frac{\pi}{2}}{Sh\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\eta}{\varepsilon}\right) + Sh\frac{\pi}{2}}\right)^n \right| < \delta$$

så snart $n \geqq \bar{n}$.»

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 374.)

Stockholm. *Generalstabens Litografiska Anstalt.*
Postkarta öfver Sverige, 1 : 800,000. 4 Bl.
— *Kongl. Landtbruksstyrelsen.*
Meddelanden. 2 häften. 8:o.
— *Naturforskaremötet 1898.*
Diverse tryck.
— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*
Ymer. 1898: H. 2. 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1898: N:o 4—7. 8:o.
Lund. *Högre Allmänna Läroverket.*
Redogörelse 1897/98. 4:o.
Upsala. *Geological Institution of the university.*
Bulletin. Vol. 3: P. 2. 1897. 8:o. 4 ex.
Vesterås. *H. Allmänna Läroverket.*
Redogörelse för allmänna läroverken och pedagogierna i Vestmanland. 1897/98. 4:o.
Albany. *State Geologist.*
Report. Year 1882, 1884, 1894. 4:o & 8:o.
Natural history of New York. Palæontology by JAMES HALL. Vol. 8. Brachiopoda 2. 1894. 4:o.
Amsterdam. *Société mathématique.*
Revue semestrielle des publications mathématiques. T. 6 (1897/98): P. 2. 8:o.
— *Wiskundig Genootschap.*
Nieuw archief voor wiskunde. (2) D. 3: St. 4. 1898. 8:o.
Wiskundige opgaven met de oplossingen. D. 7: St. 5. 1898. 8:o.
— *K. Zoologisch Genootschap »Natura Artis Magistra».*
[Festskrift] 1838—1898. 8:o.
Baltimore. *Peabody Institute.*
Annual report. 31 (1897/98). 8:o.
— *Johns Hopkins university.*
American journal of mathematics. Vol. 19 (1897): N:o 3—4; 20 (1898): 1—2. 4:o.
American chemical journal. Vol. 19 (1897): 4—10; 20 (1898): N:o 1—4. 8:o.
The american journal of philology. Vol. 17 (1896): N:o 4; 18 (1897): 1—4. 8:o.
Studies in historical and political science. Ser. 15 (1897): 3—12; 16 (1898): 1—5. 8:o.
Circulars. Vol. 17: N:o 135—136. 1898. 4:o.
Batavia. *K. Natuurkundig Vereeniging in Nederl.-Indië.*
Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. D. 57. 1898. 8:o.
Boekwerken ter tafel gebracht in de vergaderingen van de directie. Jaar 1897. 8:o.

(Forts. å sid. 396.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 183.

Sur les fonctions qui ne satisfont à aucune équation différentielle algébrique.

Par Hakon Grönwall.

(Communiqué le 14 Septembre 1898 par G. Mittag-Leffler.)

1. Le premier exemple d'une fonction analytique qui ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique a été fourni par la fonction Γ. M. Hölder [1]) a démontré cette propriété de la fonction $\Gamma(x)$ en employant l'équation fonctionelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

pour abaisser successivement l'ordre d'une équation différentielle algébrique à laquelle satisferait $\Gamma(x)$, jusqu'à arriver à une équation d'ordre zéro, c'est à dire une équation algébrique $F(\Gamma(x), x) = 0$, ce qui est manifestement impossible, $\Gamma(x)$ étant une fonction transcendante. M. E. H. Moore [2]) a traité d'une manière analogue quelques autres fonctions satisfaisant à certaines équations fonctionnelles simples.

En étudiant d'une manière générale les singularités des fonctions analytiques définies par des équations différentielles, M. Painlevé [3]) montre que si une fonction analytique présente une ligne singulière isolée telle que, la variable tendant vers un point déterminé quelconque de cette ligne, la fonction et toutes ses dérivées tendent vers des limites déterminées (finies

---

[1]) Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen, Math. Annalen T. 28 (1887) p. 1—13.

[2]) Concerning Transcendentally Transcendental Functions, Math. Ann. T. 48 (1896) p. 49—74.

[3]) Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, Paris 1897, p. 441—443.

ou infinies), cette fonction ne peut satisfaire à aucune équation différentielle algébrique.

En considérant une série entière à coefficients rationnels, M. HURWITZ[1]) a fait voir que si les dénominateurs de ces coefficients satisfont à certaines conditions de divisibilité, la série ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique, lequel resultat généralise le théorème connu d'EISENSTEIN sur les fonctions algébriques.

Je vais former ci-dessous, en me plaçant à un point de vue différent de ceux que je viens d'indiquer, une classe de fonctions jouissant de la même propriété; la méthode suivie s'étend immédiatement au cas de plusieurs variables, ce qui n'est guère le cas des méthodes dont je viens de parler, et permet ainsi de construire des fonctions qui ne satisfont à aucune équation algébrique aux dérivées partielles.

2. *Soit z une série entière écrite sous la forme*

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) \tag{1}$$

où

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=m_\nu}^{n_\nu} a_\mu x^\mu, \qquad n_\nu \geqq m_\nu > n_{\nu-1}; \tag{2}$$

si les nombres entiers m_ν, n_ν satisfont aux conditions

$$n_\nu - m_\nu < N, \ \lim_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{n_\nu} = \infty, \tag{3}$$

N étant un nombre fixe, z ne peut satisfaire à aucune équation différentielle algébrique.

Car supposons que z satisfasse à une telle équation; en posant

$$y = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$$

on reconnaît facilement que y satisfait alors aussi à une telle équation (voir les travaux cités de M.M. HÖLDER et MOORE).

[1]) Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique, Annales de l'Ecole Normale, Sér. 3, T. 6 (1889) p. 327—332.

Or cette dernière équation, en y portant l'expression de y en z, devient une équation différentielle algébrique et *homogène* que nous écrivons sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} F\left(x\,;\, z\,,\, \dfrac{dz}{dx}\,,\, \ldots\,,\, \dfrac{d^\lambda z}{dx^\lambda}\right) = \\ = \sum c_{k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_\lambda} \cdot z^{k_0} \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^{k_1} \cdots \left(\dfrac{d^\lambda z}{dx^\lambda}\right)^{k_\lambda} = 0\,, \end{cases}$$

la sommation étant étendue à tous les nombres entiers $k_0, k_1, \ldots, k_\lambda$ qui satisfont à l'équation

$$(5)\qquad k_0 + k_1 + \ldots + k_\lambda = K,$$

K étant le dégré de homogénéité, et les $c_{k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_\lambda}$ étant des polynômes en x dont le dégré ne dépasse pas un nombre fixe k. Si nous portons l'expression (1) de z dans (4), il vient en posant $(\mu;\, \lambda) = \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - \lambda + 1)$

$$(6)\quad \begin{cases} 0 = \sum\limits_{(k)} \sum\limits_{(\mu)} c_{k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_\lambda}\, a_{\mu_1} \cdots a_{\mu_{k_0}} \cdot \mu_{k_0+1} \cdots \mu_{k_0+k_1} \cdot a_{\mu_{k_0+1}} \cdots a_{\mu_{k_0+k_1}} \cdots \\ (\mu_{k_0+k_1+\ldots+k_{\lambda-1}+1};\, \lambda) \ldots (\mu_{k_0+k_1+\ldots+k_\lambda};\, \lambda) \cdot a_{\mu_{k_0+\ldots+k_{\lambda-1}+1}} \cdots a_{\mu_{k_0+k_1+\ldots+k_\lambda}} \\ x^{\mu_1+\ldots+\mu_{k_0}+(\mu_{k_0+1}-1)+\ldots+(\mu_{k_0+k_1}-1)+\ldots+(\mu_{k_0+\ldots+k_{\lambda-1}}-\lambda)+\ldots+(\mu_{k_0+\ldots+k_\lambda}-\lambda)} \end{cases}$$

la sommation étant étendue aux $k_0, \ldots, k_\lambda$ satisfaisant à (5) et aux μ variant indépendamment de 0 à ∞.

Soient maintenant ν et p deux entiers que nous laissons arbitraires jusqu'à nouvel ordre, et divisons la série du membre droit de (6) en les parties $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ et B, en désignant par $A_{0, 0, \ldots, 0}$ l'ensemble des termes dans lesquels n'entre aucun a_μ d'indice supérieur à n_ν, par B l'ensemble des termes, en nombre infini, dans lesquels figure au moins un a_μ où $\mu > n_{\nu+p}$, et généralement par $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ (où $0 < \alpha_1 + \ldots + \alpha_p \leqq K$) l'ensemble des termes qui ont le dégré α_1 par rapport aux a_μ où $m_{\nu+1} \leqq \mu \leqq n_{\nu+1}$, ..., le dégré α_p par rapport aux a_μ où $m_{\nu+p} \leqq \mu \leqq n_{\nu+p}$.

Cela étant, on voit immédiatement que le plus grand dégré par rapport à x d'un terme appartenant à $A_{0, 0, \ldots, 0}$ est au

plus égal à $K \cdot n_\nu + k$, que le plus petit dégré en x d'un terme de B est égal ou supérieur à $m_{\nu+p+1} - \lambda$, et que le dégré par rapport à x d'un terme appartenant à $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ est compris entre les limites inférieure

$$\alpha_1(m_{\nu+1} - \lambda) + \ldots + \alpha_p(m_{\nu+p} - \lambda)$$

et supérieure

$$\alpha_1 \cdot n_{\nu+1} + \ldots + \alpha_p \cdot n_{\nu+p} + (K - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p)n_\nu + k.$$

Soient $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ et $A_{\beta_1, \ldots, \beta_p}$ deux des parties en lesquelles nous avons divisé la série dans (6), et formons la différence

$$\delta = \alpha_1(m_{\nu+1} - \lambda) + \ldots + \alpha_p(m_{\nu+p} - \lambda) -$$
$$- [\beta_1 n_{\nu+1} + \ldots + \beta_p n_{\nu+p} + (K - \beta_1 - \ldots - \beta_p)n_\nu + k]$$

qui peut aussi s'écrire

$$\delta = (\alpha_p - \beta_p)n_{\nu+p} + \ldots + (\alpha_1 - \beta_1)n_{\nu+1} - (K - \beta_1 - \ldots - \beta)n_\nu -$$
$$- [\alpha_1(n_{\nu+1} - m_{\nu+1} + \lambda) + \ldots + \alpha_p(n_{\nu+p} - m_{\nu+p} + \lambda)].$$

L'expression entre crochets est, en valeur absolue, inférieure à

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_p)(N + \lambda) + k \leqq K(N + \lambda) + k.$$

D'après (3), nous pourrons prendre ν assez grand pour que $n_\nu > 0$ et, quelque grand que soit le nombre fixe $\omega > 1$

$$\frac{n_{\nu+\lambda+1}}{n_{\nu+\lambda}} > \omega$$

pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$, d'où s'ensuit $n_{\nu+\lambda} > \omega^\lambda \cdot n_\nu$.

Supposons que $\alpha_r - \beta_r$ soit la dernière des différences $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_p - \beta_p$ qui soit différente de zéro; on aura

$$\left|\frac{\delta}{n_{\nu+r}} - (\alpha_r - \beta_r)\right| < |\alpha_{r-1} - \beta_{r-1}| \cdot \frac{1}{\omega} + \ldots + |\alpha_1 - \beta_1| \frac{1}{\omega^{r-1}} +$$
$$+ |K - \beta_1 - \ldots - \beta_p| \frac{1}{\omega^r} + \frac{K(N + \lambda) + k}{\omega^r \cdot n_\nu},$$

d'où

$$\left|\frac{\delta}{n_{\nu+r}} - (\alpha_r - \beta_r)\right| < K\left(\frac{1}{\omega} + \ldots + \frac{1}{\omega^r}\right) + \frac{K(N + \lambda) + k}{\omega^r}$$
$$< \frac{K}{\omega - 1} + \frac{K(N + \lambda) + k}{\omega},$$

et si ω est assez grand pour que le dernier membre soit inférieur à l'unité, δ aura le signe de $\alpha_r - \beta_r$.

Donc, si ν est assez grand pour que

$$(7) \qquad \frac{n_{\nu+\lambda+1}}{n_{\nu+\lambda}} > \omega > 1\,, \quad \frac{K}{\omega - 1} + \frac{K(N+\lambda)+k}{\omega} < 1\,,$$

et si p est un entier quelconque, les termes de $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ auront ses dégrés différents des dégrés des termes de $A_{\beta_1, \ldots, \beta_p}$, sinon $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ et $A_{\beta_1, \ldots, \beta_p}$ sont identiques, et on voit de même que chaque terme de B a un dégré supérieur aux dégrés des termes de tous les $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$. Par suite, l'équation (6) amène les égalités

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} = 0\,, \quad 0 \leqq \alpha_1 + \ldots + \alpha_p \leqq K\,.$$

Substituons maintenant dans le membre gauche de (4)

$$(8) \qquad z = [f_0(x) + \ldots + f_\nu(x)] + C_1 f_{\nu+1}(x) + \ldots + C_p f_{\nu+p}(x)\,,$$

ν étant un nombre déterminé par (7) et p un entier arbitraire; le résultat de la substitution sera un polynôme de dégré K par rapport à $C_1, \ldots, C_p$, et le coefficient de $C_1^{\alpha_1} \ldots C_1^{\alpha_p}$ sera $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$, c'est-à-dire égal à zéro. L'expression (8), où $C_1, \ldots, C_p$ sont des constantes *arbitraires*, est par conséquent une solution de (4). En vertu de la homogénéité de cette équation,

$$(9) \qquad z = C_0[f_0 + \ldots + f_\nu] + C_1 f_{\nu+1} + \ldots + C_p f_p$$

y satisfait aussi; posons

$$(10) \qquad z_q = f_{\nu+p+q}\,,$$

mettons la solution $z + C z_q$ dans (4) et développons suivant les puissances de C. En égalant le coefficient de C à zéro, il vient

$$(11) \qquad F_0(z) \cdot z_q + F_1(z) \frac{dz_q}{dx} + \ldots + F_\lambda(z) \frac{d^\lambda z_q}{dx^\lambda} = 0\,,$$

$F_0(z)$, $F_1(z)$, $\ldots$, $F_\lambda(z)$ étant les dérivées partielles de F par rapport à z, $\frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}$ respectivement. Deux cas peuvent se présenter: ou l'on peut déterminer p et les constantes dans (9)

de sorte que $F_0(z), \ldots, F_\lambda(z)$ ne s'annulent pas toutes; alors z_q satisfait à l'équation différentielle linéaire (11), d'où l'on déduit, par une transformation simple, une équation linéaire à laquelle satisfait l'expression (1). Ou bien $F_0(z)=0, \ldots, F_\lambda(z)=0$ pour chaque z de la forme (9); alors on n'aurait qu'à raisonner de la même manière sur une de ces équations, de degré $K-1$, que nous venons de le faire sur $F=0$, de degré K, pour reconnaître qu'en définitive l'équation différentielle à laquelle satisfait (1) peut être remplacée par une équation différentielle linéaire et homogène. D'autre part, cette dernière équation doit admettre toutes les solutions (10) pour q dépassant une certaine limite, ce qui est impossible, ces expressions étant toutes de degrés différents et par suite linéairement indépendantes, d'où le théorème.[1] C. Q. F. D.

Soit en particulier $m_\nu = n_\nu$, $n_\nu = \nu^\nu$, $a_\mu = 1$; la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu^\nu}$$

ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique; d'ailleurs elle ne rentre sous aucune des catégories étudiées dans les travaux cités au n:o 1.

Il convient d'ajouter que, d'après les travaux de MM. Hadamard, Borel et Fabry, la série (1) ne peut être prolongée au delà du cercle de convergence.

3. Considérons une série entière de n variables

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \tag{12}$$

où, $(x_1, \ldots, x_n)_\mu$ désignant un polynôme homogène de degré μ

$$f_\nu = \sum_{\mu=m_\nu}^{n_\nu} (x_1, \ldots, x_n)_\mu ,$$

$$n_\nu - m_\nu < N, \ \lim_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{n_\nu} = \infty .$$

[1]) Il aurait été plus simple de conclure le théorème de ce que l'expression (8) contient, pour p assez grand, autant de constantes arbitraires qu'on veut, tandis que la solution générale de (4) n'en renferme que λ; le raisonnement du texte a cependant l'avantage de conduire à la généralisation du n:o suivant.

On établit facilement que, si z satisfait à une équation aux dérivées partielles algébrique, $y = \frac{\partial \log z}{\partial x_1}$ satisfait également à une telle équation, qui, en introduisant de nouveau z comme inconnue, devient homogène en z et ses dérivées partielles. En raisonnant comme au n:o 2 sur cette dernière équation, on voit que, pour ν suffisamment grand et p quelconque, l'expression

$$C_0[f_0 + \ldots + f_\nu] + C_1 f_{\nu+1} + \ldots + C_p f_{\nu+p}$$

y satisfait, les C étant des constantes arbitraires; on voit de plus qu'une équation aux dérivées partielles jouissant de cette propriété ne saurait être que linéaire.

La question de trouver une équation aux dérivées partielles algébrique à laquelle satisfasse une série donnée (12) est donc réduite à celle-ci: reconnaître s'il existe une équation linéaire aux dérivées partielles, dont les coefficients sont des polynômes en $x_1, \ldots, x_n$, et dont toutes les expressions $f_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, à partir d'une certaine valeur de ν, forment des solutions particulières.

Au lieu d'entrer en des généralités concernant cette dernière question, nous nous bornerons à donner quelques exemples. Soit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

une des séries (1) considérées au n:o précédent; désignons par π_ν le nombre des facteurs premiers différents du nombre ν et posons

$$z = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) \cdot y^{\pi_\nu - 1}. \tag{13}$$

Comme on a $\lim_{\nu=\infty} \frac{\pi_\nu}{\nu} = 0$ et à fortiori $\lim_{\nu=\infty} \frac{\pi_\nu}{n_\nu} = 0$, on voit que cette série satisfait aux conditions imposées à la série (12). Soit

$$(14)\quad \begin{cases} a_{0\lambda}\dfrac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + a_{1\lambda}\dfrac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1}\partial y} + \ldots + a_{\lambda\lambda}\dfrac{\partial^\lambda z}{\partial y^\lambda} + a_{0,\lambda-1}\dfrac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial x^{\lambda-1}} + \ldots \\ \qquad + a_{\lambda-1,\lambda-1}\dfrac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial y^{\lambda-1}} + \ldots + a_{00}\, z = 0 \end{cases}$$

l'équation aux dérivées partielles, nécessairement linéaire, à laquelle satisfont, à partir d'un certain ν, les termes $f_\nu(x)y^{\pi_\nu - 1}$ de (13). En supposant ν premier $= p$, $\pi_\nu - 1 = 0$ et tous les $f_p(x)$ satisfont, pour p assez grand, à l'équation $a_{0\lambda}\dfrac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} +$ $+ a_{0,\lambda-1}\dfrac{\partial^{\lambda-1} z}{\partial x^{\lambda-1}} + \ldots + a_{00}z = 0$, d'où, les f_p étant linéairement indépendants, $a_{0\lambda} = a_{0,\lambda-1} = \ldots = a_{00} = 0$. En prenant $\nu = pq$, p et q étant deux nombres premiers différents, on voit de même que les coefficients des termes, où l'on différentie seulement une fois par rapport à y, s'annulent tous, et ainsi de suite, en posant $\nu = pqr$, $pqrs$, ... Donc (13) ne satisfait à aucune équation aux dérivées partielles algébrique.

Comme il est difficile de généraliser cet exemple à un nombre quelconque de variables, donnons-en un autre, qui est même plus simple:

$$(15)\qquad z = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu y^{\nu^\nu}.$$

On a

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}(x^\nu y^{\nu^\nu})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} =$$

$$= \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\alpha+1)\cdot\nu^\nu(\nu^\nu-1)\ldots(\nu^\nu-\beta+1)x^{\nu-\alpha}y^{\nu^\nu-\beta}$$

$$= c_{\alpha\beta}(\nu)x^{\nu-\alpha}y^{\nu^\nu-\beta},$$

d'où

$$(16)\qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{c_{\alpha'\beta'}(\nu)}{c_{\alpha\beta}(\nu)} = 0,$$

si $\beta > \beta'$ ou si $\beta = \beta'$, $\alpha > \alpha'$. En mettant $x^\nu y^{\nu^\nu}$ dans (14), on trouve

$$\sum_{\alpha+\beta \leqq \lambda} c_{\alpha\beta}(\nu)\cdot a_{\alpha\beta}(x,\ y)\cdot x^{-\alpha}y^{-\beta} = 0;$$

en divisant par $c_{0\lambda}(\nu)$ et faisant $\nu = \infty$ en donnant à x et y des valeurs quelconques différentes de zéro, on en tire à l'aide de (16) $a_{0\lambda} = 0$; puis en divisant par $c_{1,\lambda-1}(\nu)$ et faisant $\nu = \infty$, il vient $a_{1,\lambda-1} = 0$. En procédant ainsi, on trouve successivement à l'aide de (16) que tous les coefficients dans (14) sont identiquement nuls.

On démontre absolument de la même manière que la série dont le terme général est

$$(17) \qquad x_1^{\nu} x_2^{\nu^{\nu}} x_3^{\nu^{\nu^{\nu}}} \ldots x_n^{\nu^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\nu}}}}}$$

(multiplié, si l'on veut, par une constante) ne saurait satisfaire à aucune équation aux dérivées partielles algébrique.

Il est facile à démontrer qu'une série (12) où $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{n_\nu} = \infty$ ne peut être prolongée analytiquement au delà de la frontière de son domaine de convergence, laquelle démonstration s'accomplit à l'aide du théorème correspondant pour une seule variable et de quelques propositions tout à fait élémentaires de la théorie des séries entières de plusieurs variables.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 386.)

Belgrad. *Académie R. de Serbie.*
Spomenik (Mémoires) 31. 1898. 4:o.
Glas (Bulletin) 53. 1898. 8:o.
Godišnjak (Almanach) 10 (1897). 16:o.
Bergen. *Museum.*
SARS, G., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 2: P. 9—10. 1898. 8:o.
Berkeley. *University of California.*
Annual report of the secretary 1895/96. 8:o.
Register 1896/97. 8:o.
University chronicle. Vol. 1 (1898): N:o 1. 8:o.
Småskrifter. 12 st. 1897—1898. 8:o.
Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. 1897. 4:o.
Sitzungsberichte. 1898: 24—39. 8:o.
Acta Borussica. Behördenorganisation Bd. 2. 1898. 8:o.
— *K. botanischer Garten und Museum.*
Notizblatt. N:o 13—14. 1898. 8:o.
— *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1898: H. 1. 8:o.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 50 (1898): H. 1. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 17 (1898): N:o 7—8. 8:o.
— *K. Preussisches Meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen 2. und 3. Ordnung. 1897: H. 2. 4:o.
— *Entomologischer Verein zu Berlin.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd 42 (1897): H. 3—4. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Memoirs. Vol. 12 (1898): N:o 4. 4:o.
Proceedings. Vol. 33 (1897/98): N:o 9—17. 8:o.
— *Society of natural history.*
Memoirs. Vol. 5: N:o 3. 1898. 4:o.
Proceedings. Vol. 28 (1897/98): N:o 6—7. 8:o.
Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen. Bd 14: H. 3; 15: 2. 1897—98. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 35 (1898): N:o 5—6; 36 (1898): 7. 8:o.
— *Observatoire R. de Belgique.*
Bulletin mensuel. 1896: 12. 4:o.
Annales. — Observations météorologiques d'Uccle. 1894: Résumé; 1895: 6—7. 4:o.

(Forts å sid. 404.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 7.
Stockholm.

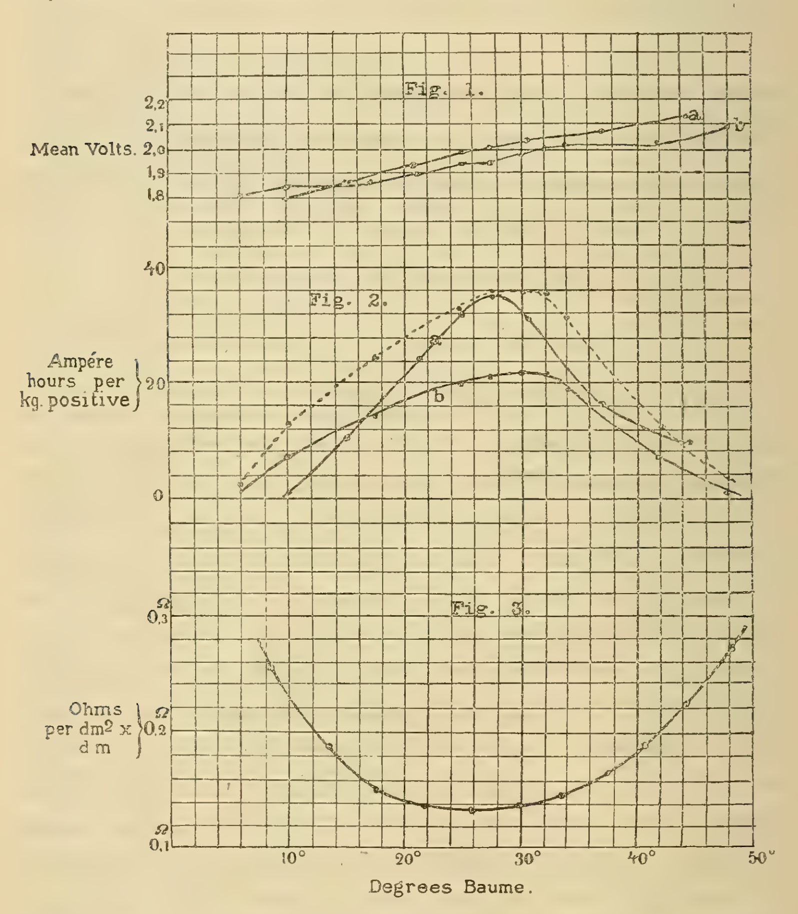
Short memoir, being a Contribution to the theory of voltaic Combinations of Lead and Peroxyde of Lead in an Electrolyte of dilute Sulphuric Acid, commonly known as Storage Batteries.

By JOHN G. A. RHODIN.

(Communicated 1898 September 14 by G. MITTAG-LEFFLER).

During the year 1893 to 1896 the writer was engaged in the scientific controlling of a large factory belonging to the Chloride Electrical Storage Syndicate Limited, and during this time questions of purely scientific nature arose daily which had to be treated before a practical application of the results could be made in the process of manufacture. I soon found that the notions and theories current in England and France were to an enormous extent lacking from the point of view of the student of the modern development of physical chemistry. It was however, impossible to apply the theories of VAN'T HOFF, ARRHENIUS, NERNST and others to the treatment of these problems, partly because these theories are applicable only to limit cases of dilution and current densities, and further because the amount of assumption used by these eminent pioneer investigators was so great as to necessitate the determination of constants for every special combination. I then chose to reason on the same lines without however tying myself down to the fundamental formulae used by the physico-chemical school, in as far as nume-

rical calculation was concerned. Early in 1895, a problem presented itself to my mind, viz., the variation to capacity of a Laurent-Cely Storage Cell in function of the concentration of the electrolyte used, viz: dilute sulphuric acid. I was happy enough to receive some curves from my colleagues at St. Ouen in Paris bearing upon this point; these curves are shown in Fig. 2 and drawn in full:



(curves *a* refer to 6 mm. plates and curves *b* to 10 mm. plates).

There are some objections to be made to the mode of experiment used. 1st. The electrolyte was of a limited quantity and thus subject to variations which were not noted. 2nd. The

variation of temperature was not given. 3rd. The two curves given were expressed as follows: —

for plates 10 and 6 mm. thick respectively.	abscissae:	ampere hours per kg. of peroxyde plate or so called positive plate.
	ordinates:	density of sulphuric acid in degrees Baume.

I objected to the nature of the abscissae and recalculated the curve for the 10 mm. plates in function of the abscissae for the 6 mm. plates, and obtained the curve drawn as a dotted line. I wanted to get at the ratio between the capacities of two plates of equal dimensions except in as far as the thickness was concerned. My mode of recalculation was simple. Supposing that the weights of the plates varied as the thickness which I knew to be approximately true, I had only to multiply the capacities given for the 10 mm. plates by 10 : 6 in order to reduce them from capacities per kg. to capacity per 10 mm. plate of the same dimensions as a 6 mm. plate weighing one kg. The dotted curve represents the result — and takes away the apparently paradoxical anomalies of the result sent from Paris which gives lower »capacities» för the thicker plates as well as intercepting places etc. The curves in Fig. 1 give the mean P. D. at the terminals of the cells during the experiments. I wish to point out that an excess of negative or spongy lead plate was used in order to limit the variations to the positive or peroxyde plate as much as possible. If we now comtemplate the nature of these curves, we find that they shew a capacity of zero for a current of 1 amp. per kg. 6 mm. plate, when the electrolyte has a finite concentration, then the capacities rise to two maxima which occur at the concentrations $27 \cdot 5^\circ B$ and $31 \cdot 5^\circ B$ respectively, then the capacities fall with the increasing density. Why should now the capacity of the cell be limited to zero when the acid is a good conductor viz: —

for 6 mm. positive plates at $5^\circ B$ approx., and
» 10 mm. » » » $9^\circ B$ » ?

My reasoning was this. The absence of capacity depends upon the circumstances that the current density in question is so great that *the layer of electrolyte which touches the metallic conductor would loose its ionised molecules so quickly that the diffusion of further* H_2SO_4 *molecules to this surface, would not be able to supply enough ions for carrying the current.* This would occur sooner in the 6 mm. plates than in the 10 mm. plates from following reason. The *active surface* of a Laurent-Cely positive plate is the surface where the grid or metallic lead frame work touches the pieces of peroxyde of lead, as there *might always be a space between these pieces of peroxyde of lead and the surface of the frame work filled with electrolyte which might be totally robbed of its ions.* This surface is for a 10 mm. plate equal to 10/6th of that for a 6 mm. plate approximately. Hence the current density 1 for a 6 mm. plate equals the current 0.6 for a 10 mm. plate and in conclusion if a concentration of ions equal to the unit stops the current output of a 6 mm. plate, this density might fall to the value 0.6 before fatally impeding the current output of a 10 mm. plate. (The densities 9 end $5°B$ fulfil these requirements approximately). This may be put down as a law as follows: —

$$\frac{T}{SC} = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$T =$ current to be kept up;

$C =$ specific conductivity of electrolyte for which $T = 0$;

$S =$ active surface in the above sense.

$K =$ algebraical constant.

I have thus shown that the concentration of the ions of the electrolyte is a most important item which determines the cessation of current output at a given rate — I shall now proceed to treat the case, when the capacity has a finite value, and shew how conditions, similar to those already mentioned, may develop after a finite period of work. I shall again only treat the case of the positive or peroxyde of lead plate. The positive Laurent-Cely plate consists of slabs of peroxyde of lead kept together by

means of a frame-work of metallic lead or lead alloy. These peroxyde slabs are porous and contain in the pores electrolyte of the same density as the density of that which fills the space between the plates when the cell is fully charged, and has been at rest for some time. As soon as the current output begins the electrolytic action will cause an alteration of the ion concentration of the electrolyte in the pores of the peroxyde, and at the same time a diffusion of ions from the outside will take place. If we then contemplate the possible interaction between the electrolytic dilution and the simultaneous concentration by diffusion, we shall be able to introduce a time element, which for a cell with the electrolyte at rest will determine the time limit called capacity.

If Fig. 4 represents schematically the elements of a storage battery and we consider the layers a, b and c, of electrolyte, peroxyde of lead and lead in contact with PbO_2, we can make the following deductions. For the time t the current I would rob the layer between b and c of ions to the extent of $I\varDelta_t$ hence, if the original number of active ions at this surface was d, the resulting number after the time t would equal: —

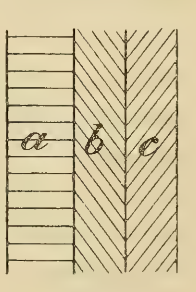


Fig. 4.

$$d - I\varDelta_t \qquad (2)$$

There would then be a difference of concentration between this surface and the neighbouring one equal to

$$d - (d - I\varDelta_t) = I\varDelta_t \qquad (3)$$

Hence there would be a diffusion of ions to this surface equal to a function of (3)

$$\varphi I\varDelta_t \qquad (4)$$

It is then easy to see that the final concentration of ions at this »active» surface would be after the time t:

$$x = d + \varphi I\varDelta_t - I\varDelta_t \qquad (5)$$

From obvious physical reasons it follows: —

$$I\Delta_t \geq \varphi I\Delta_t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Hence, X must keep constant or decrease. If it keeps constant this diffusion theory is not applicable to the explanation of cessation or current output which would then depend upon complete reduction of the PbO_2 or other chemical changes. If X decreases, it finally assumes a value equal to C in $eq:n$ (1) and the current ceases (or cannot be kept up), t in $eq:n$ (5) has then the value T, and T is then a function of the density of the electrolyte (5 by integration):

$$T = \psi d \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Hence the capacity of the cell is a function of the density of the electrolyte or

$$y = I\psi d \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

That this is a fact for plates like the Laurent-Cely plates which contains a large excess of peroxyde of lead is evident from the contemplation of the curves in Fig. II and III which indicate a very simple relation between the two characteristics of the accumulator, capacity and conductivity of the electrolyte which might be expressed in a form like the following: —

$$\frac{y}{z} = k + \theta^{z-m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

where y = capacity and z = conductivity of the electrolyte. θ, k and m are numerical constants. This last formula is not strictly correct, but shows the introduction of a function of θ depending upon the nature of the peroxyde of lead and its porosity etc., I do not wish to press this point as being very important. When we made the previous reasoning, *it was necessary to assume a large excess of peroxyde of lead as being present.* If my reasoning is correct, it follows that the Laurent-Cely plate and all other plates which show a rapid variation of capacity with the density of the electrolyte must have peroxyde of lead or spongy lead in too thick layers for the free admission

of the electrolyte to the active surface of the conductors of the electrodes. It also shews that it is futile to attempt to increase the capacity of secondary batteries by unlimited increase of »active material».

I wish to mention that all the formulae given above are capable of being developed into such a form as to admit numerical calculations after the determination of a few constants, if the ordinary laws of diffusion are applied e. g., if the current to be kept up is considerable.

By actual measurements I found that for currents exceeding 0.2 amperes per dm^2 exposed grid surface in the above sense, a thickness of peroxyde of lead equal to 0.1 mm. gave the maximum capacity, and this led me to construct the now well-known *R* type grid, the commercial success of which has shewn that a correctly constructed Plante plate as anode in connection with a Faure or Laurent-Cely Kathode plate was the correct solution of the lead storage battery problem. (Engl. patent 4 May 1895. J. RHODIN.)

I have published the above as an introductory chapter to the collection of notes which I accumulated on this most interesting subject, with a view to shew that problems of rather complex nature in connection with electro-chemical practise can be fairly easily treated if looked upon in a general manner theoretically, without any attempt to specialise except by experiments, which will then be easily arranged. The enormous value of the physical notions lately introduced into the chemical science even *to the practical* worker is also evident.

Manchester, March 1898.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. fr. sid. 396.)

Bucarest. *Institut météorologique de Romanie.*
Analele. T. 12 (1896). 4:o.
Buletinul observaţiunilor meteorologice. Anul 6 (1897): 1—12. 4:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 45 (1898): Entr. 2—6. 8:o.
Buffalo. *Society of natural sciences.*
Bulletin. Vol. 5 (1897): N:o 5; 6 (1898): 1. 8:o.
Buitenzorg. *Jardin Botanique.*
Annales. Vol. 15: P. 1. 1898. 8:o.
Mededeelingen. 26—27. 1898. 8:o.
RACIBORSKI, M., Die Pteridophyten der Flora von Buitenzorg. 1898. 8:o.
Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*
Journal. N. S. Vol. 61 (1892): P. 1: N:o 3; 66 (1897): 1: 4; 67 (1898): 1: 1; 66 (1897): 2: 4. 8:o.
Proceedings. 1897: N:o 9—11; 1898: 1—4. 8:o.
— *Geological survey of India.*
General report 1897/98. 8:o.
Memoirs. Vol. 25—26. 4:o.
» Palæontologia Indica. Ser. 16: Vol. 1: P. 1. 1895. Fol.
— *R. Botanical Garden.*
Annals. Vol. 8: P. 1—4. 1898. Fol.
— *Indiska regeringen.*
ALCOCK, A. W., Report on the natural history results of the Pamir boundary commission. 1898. Fol.
Cambridge. *Observatory.*
Astronomical observations. Vol. 23 (1872—1875). 4:o.
— *University library.*
Annual report of the library syndicate. 1897. 4:o.
— *Cambridge philosophical society.*
Proceedings. Vol. 9: P. 8 (1898). 8:o.
Cambridge, U. S. *Museum of comparative zoology at Harvard College.*
Bulletin. Vol. 28: N:o 5; 31: 7; 32: 3—8. 1898. 8:o.
— *Astronomical observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 41: N:o 5; 42: P. 1. 1897. 4:o.
Cape Town. *South African Philosophical society.*
Transactions. Vol. 1: P. 1—3; 2: 1—3; 3: 1—2; 4: 1—2; 5: 1—2; 6: 1—2; 7: 1—2; 8: 1—2; 9: 1—2; 10: 1. 1877—1897. 8:o.
— *South African Museum.*
Annals. Vol. 1 (1898): P. 1. 8:o.
Report. Year 1897. Fol.
— *Cape observatory.*
Annals. Vol. 4. 1897. 4:o.
Results of meridian observations of stars in the years 1892—95. 4:o.

(Forts. å sid. 446.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 1.

Ueber Kometenbahnexcentricitäten. I.

Von Elis Strömgren.

[Mitgetheilt den 14 September 1898 durch C. V. L. Charlier.]

Im Band 136 der Astronomischen Nachrichten (Pag. 133) findet sich ein Aufsatz von Thraen, der eine Rückwärtsrechnung der Störungen für den Kometen 1886 II enthält. In einem vorigen Bande (132) der A. N. hatte Thraen seine »Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1886 II» publicirt, aus welcher für den betreffenden Kometen eine hyperbolische Bahn ($e =$ 1,000 2286) mit Bestimmtheit hervorging.

Als Thraen später auf die Möglichkeit aufmerksam wurde, dass die Hyperbolicität des Kometen eine Folge von den durch die grossen Planeten in den Jahren vor dem Periheldurchgange bewirkten Störungen sein könnte, unternahm er eine Rückwärtsrechnung derjenigen Störungen, welche bei dem Kometen durch die Planeten Jupiter und Saturnus verursacht waren. Die Resultate dieser Arbeit hat er in den oben genannten Aufsatz niedergelegt.

Thraen erhält:

1885 Dec. 8 (Oskulationsepoche)	$e =$ 1.000 228
1884 Aug. 15	1.000 177
1883 April 23	1.000 052
1882 Okt. 5	1.000 002 ,

wo das Zeitintervall zwischen der ersten und der zweiten Epoche 520 Tage, zwischen der zweiten und der dritten 480 und zwischen der dritten und der vierten 200 Tage beträgt. Hieraus folgert

nun THRAEN, dass wenn wir zeitlich noch weiter zurückgehen würden, die Bahnexcentricität des Kometen 1886 II unter die Einheit herabsinken würde, und dass also der Komet sich ursprünglich in einer elliptischen Bahn unserer Sonne genähert hätte.

Als ich die Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II abgeschlossen und für diese eine unzweifelhaft hyperbolische Excentricität gefunden, deren wahrscheinliche Fehler nicht den dreissigsten Theil ihres eigenen Überschusses über die Einheit betrug ($e = 1{,}000\,4103 \pm 0{,}000\,0130$), beschloss ich, in derselben Weise wie es THRAEN bezüglich des Kometen 1886 II gemacht hatte zu untersuchen, ob nicht die Abweichung der Bahn von der Parabelform durch Störungen von Seiten der grossen Planeten verursacht wäre. Die Rechnung wurde nach der ENCKE'schen Methode ausgeführt, und zwar wurden Jupiter und Saturnus als störende Planeten herangezogen. Ich stand eben im Begriff die gewonnenen Störungswerthe für die Berechnung der Bahnexcentricitäten zu verwenden, als meine Aufmerksamkeit auf einen Umstand gelenkt wurde, welchen THRAEN übersehen hat, der mir aber für die in Frage stehende Aufgabe eine entscheidende Rolle zu spielen schien.

In meiner Arbeit über den oben genannten Kometen[1]) findet sich, Pag. 102—104, diejenige Auseinandersetzung, welche als Ausgangspunkt für meine fortgesetzte Rechnungen gedient hat. Ich werde hier das wichtigste rekapituliren.

Eine Störungsrechnung nach der ENCKE'schen Methode liefert die rechtwinkligen (Ekliptikal-) Koordinaten des gestörten Körpers so wie seine Geschwindigkeitskomponenten *in Bezug auf die Sonne.* Aus diesen relativen Koordinaten und Geschwindigkeiten lässt sich nach bekannten Formeln für jeden gegebenen Zeitmoment ein Elementsystem berechnen, die sogenannten oskulirenden Elemente. Da die Excentricität das einzige Element ist, das für unseren Zweck Bedeutung hat, bringe ich nur diejenigen Formeln, welche für die Berechnung dieses Elementes nötig sind:

[1]) Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II. Acta reg. soc. phys. Lund, T. VI, 1896.

$$k\sqrt{p}\cos i = \frac{1}{w}\left\{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right\}$$

$$k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega = \frac{1}{w}\left\{y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right\}$$

$$k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega = \frac{1}{w}\left\{x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right\}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$e\sin v = \frac{\sqrt{p}}{wk\cdot r}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\}$$

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1$$

d. i.

$$p = \frac{1}{w^2k^2}\left\{C^2 + C_1^2 + C_{11}^2\right\}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$e^2 = \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 + \frac{p}{w^2k^2\cdot r^2}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\}^2,$$

wo w das gewählte Zeitintervall (hier 40 Tage) bezeichnet und C, C_1, C_{11} an Stelle der drei Flächengeschwindigkeiten eingeführt sind.

Diese Formeln geben also die für jede Zeitepoche oskulirende Excentricität. Indessen auf die Frage nach der Bahn, in welcher sich der Komet ursprünglich unserer Sonne genähert hat, giebt die oskulirende Excentricität keine Antwort. In den durch die Störungsrechnung erhaltenen Werthen der Koordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen sind die durch die störenden Planeten bewirkten Schwankungen in den Koordinaten und Geschwindigkeiten *der Sonne* mit enthalten. Wenn wir mit *einem* störenden Planeten rechnen, wird die periodische Bewegung der Sonne eine kleine Ellipse; sind *zwei* störende Planeten vorhanden, bekommen wir zwei superponirte Ellipsen, und in den Bahnelementen des Kometen muss eine Periodicität hervortreten, welche zusammengesetzt ist aus den Perioden des Kreislaufes der störenden Planeten um die Sonne, Perioden, die aber durch die fortschrei-

tende Bewegung des Kometen im Weltraume modificirt sind, da die Schwankungen in den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Sonne für die oskulirenden Elemente des Kometen je nach der eigenen Lage und der eigenen Bewegung des Kometen eine verschiedene Rolle spielen.

Was nun zuerst die Schwankungen in den Geschwindigkeitskomponenten betrifft, so wird ihre Einwirkung auf die Bahnelemente des Kometen zunehmen, je weiter sich der Komet von der Sonne entfernt, weil mit wachsender Sonnendistanz die eigenen Geschwindigkeitskomponenten des Kometen abnehmen, während die Geschwindigkeiten *der Sonne* zwischen bestimmte Maximi- und Minimiwerthe oscilliren. Bezüglich der Schwankung in *den Koordinaten* der Sonne ist das Verhältniss umgekehrt, weil sich diese ebenso wie die *Geschwindigkeitskomponenten* der Sonne innerhalb gewissen fixen Grenzen halten, während die Koordinaten *des Kometen* unbegrenzt zunehmen.

Da also die oskulirenden Excentricitäten des Kometen (und ihre Bahnelemente überhaupt) eine periodische Schwankung aufzeigen müssen, welche mit wachsender Sonnendistanz jedenfalls nicht abnehmen wird, und da sie somit gegen gewisse Endwerthe nicht konvergiren, können sie offenbar für unsern Zweck nicht verwerthet werden.

Es giebt zwei Wege, um diese Schwierigkeit zu beseitigen. Wir können, nach bekannten Regeln, die Bewegung des Kometen auf den Schwerpunkt desjenigen Systemes, welches von der Sonne und von den störenden Planeten gebildet wird, beziehen. Dann verschwindet die Periodicität in den Geschwindigkeiten des Kometen, und die Excentricitätswerthe müssen allmählich gegen den Werth konvergiren, welcher die Bahnexcentricität angiebt zu einer Zeit, wo der Komet so weit entfernt war, das die Störungen in seiner Bewegung ausser Acht gelassen werden können, d. h. der Excentricitätswerth, welcher wirklich die ursprüngliche Beschaffenheit der Kometenbahn kennzeichnet.

Ich habe deshalb eine Berechnung dieser Excentricitätswerthe in Bezug auf den Schwerpunkt des Systems ausgeführt,

fand aber dass, wenigstens für diesen Kometen, die Konvergenz zu langsam fortschreitet, und habe mich deshalb nach einer anderen Methode umsehen müssen, welche dasselbe Resultat aber mit geringerer Arbeit liefert.

Wenn wir die Koordinaten des Kometen in Bezug auf die Sonne und seine Geschwindigkeiten in Bezug auf einen innerhalb des Systemes fixen Punkt der Berechnung der Elemente zugrunde legen, so bekommen wir neue Excentricitätswerthe, Werthe die nicht oskulirend sind und keine Schwerpunktsexcentricitäten darstellen, die aber doch gegen denselben Endwerth wie diese konvergiren, und zwar, wenigstens bei dem Kometen 1890 II, rascber als diese.

Dass die neuen Elemente gegen dasselbe Ziel wie die Schwerpunktselemente konvergiren müssen, geht aus der vorigen Darstellung mit Evidenz hervor: was die Geschwindigkeitskomponenten betrifft, so haben wir in beiden Fällen dieselben Werthe benutzt; als Werthe für *die Koordinaten* des Kometen haben wir in dem einen Falle die Koordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt, im anderen die Koordinaten in Bezug auf die Sonne angewandt, und wie oben angedeutet wurde, spielen die Differenzen in den Koordinaten eine um so geringere Rolle, je weiter sich der Komet von der Sonne entfernt.

* * *

In der oben genannten Arbeit »Berechnung der Bahn etc.» habe ich die Resultate der Rückwärtsrechnung bis auf 1886 Aug. 25 inclusive angegeben, wobei doch zu bemerken ist, dass die Störungen nur bis auf 1887 Febr. 1 direct berechnet worden, wonach ich die folgenden Werthe extrapolirt habe, eine Extrapolirung, die sich übrigens bei einer fortgesetzten Störungsrechnung als durchaus berechtigt erwiesen hat.

Später habe ich die Störungsrechnung bis auf 1883 Nov. 29 zurückgeführt, direct bis auf 1885 Jan. 2 inclusive, und von dann ab durch Extrapolirung. Ich bringe im Folgenden die Resultate dieser neuen Arbeit mit den früher publicirten zusammen.

Die Ekliptik-Elemente des Kometen waren:

Oskulationsepoche 1890 März 17.

$T =$ 1890 Juni 1.570 236 M. Z. Berlin.

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 68^\circ\, 56'\, 3''.83 \\ \Omega &= 320\;\; 20\;\; 43.02 \\ i &= 120\;\; 33\;\; 21.94 \end{aligned}\right\} \text{M. AE. 1890.0}$$

$\text{Log } q = 0.280\,4835$

$e = 1.000\,4103$

Hieraus wurden folgende Koordinaten berechnet:

Komet 1890 II.

Datum.	x_0	y_0	z_0
1890 Mai 16.0	+ 0.19394	— 1.26017	+ 1.43377
April 6	0.76803	1.50380	1.13089
Febr. 25	1.30047	1.66383	0.76408
Jan. 16.	1.77967	1.75457	+ 0.36438
1889 Dec. 7	2.20694	1.79341	— 0.04683
Okt. 28	2.58887	1.79509	0.45755
Sept. 18	2.93265	1.76999	0.86181
Aug. 9	3.24482	1.72576	1.25690
Juni 30	3.53086	1.66748	1.64210
Mai 21.	3.79455	1.59875	2.01683
April 11	4.03971	1.52205	2.38177
März 2.	4.26894	1.43933	2.73747
Jan. 21.	4.48405	1.35198	3.08397
1888 Dec. 12	4.68738	1.26090	3.42247
Nov. 2	4.88012	1.16694	3.75336
Sept. 23	5.06314	1.07085	4.07652
Aug. 14	5.23805	0.97281	4.39339
Juli 5	5.40518	0.87355	4.70360
Mai 26.	5.56570	0.77297	5.00830
April 16	5.72005	0.67169	5.30726
März 7.	5.86854	0.56968	5.60080
Jan. 27.	6.01215	0.46725	5.88952
1887 Dec. 18	6.15078	0.36438	6.17362
Nov. 8	6.28507	0.26121	6.45327
Sept. 29	6.41534	0.15796	6.72868
Aug. 20	6.54184	— 0.05453	7.00035
Juli 11.	6.66480	+ 0.04889	7.26812
Juni 1	6.78444	0.15228	7.53229
April 22	6.90102	0.25560	7.79304
März 13	7.01467	0.35883	8.05050
Febr. 1.	7.12563	0.46192	8.30491
1886 Dec. 23	7.23387	0.56484	8.55626
Nov. 13	7.33983	0.66757	8.80475
Okt. 4	7.44348	0.77009	9.05051
Aug. 25	7.54507	0.87237	9.29358
Juli 16.	7.64438	0.97444	9.53417
Juni 6	7.74182	1.07625	9.77226
April 27	7.83736	1.17780	10.00800
März 18	7.93117	1.27908	10.24140
Febr. 6.	+ 8.02323	+ 1.38008	— 10.47267

Komet 1890 II (Forts.).

Datum.	x_0	y_0	z_0
1885 Dec. 28	+ 8.11368	+ 1.48080	— 10.70183
Nov. 18	8.20261	1.58125	10.92897
Okt. 9	8.29001	1.68140	11.15403
Aug. 30	8.37597	1.78125	11.37720
Juli 21	8.46058	1.88083	11.59848
Juni 11	8.54384	1.98011	11.81792
Mai 2	8.62587	2.07911	12.03575
März 23	8.70667	2.17778	12.25178
Febr. 11	8.78626	2.27617	12.46614
Jan. 2	+ 8.86472	+ 2.37426	— 12.67885

Jupiter.

Datum.	x	y	z
1890 Mai 16	+ 2.61392	— 4.39338	— 0.04270
April 6	2.35308	4.55446	0.03621
Febr. 25	2.08396	4.69951	0.02961
Jan. 16	1.80757	4.82819	0.02289
1889 Dec. 7	1.52494	4.94017	0.01610
Okt. 28	1.23708	5.03522	0.00925
Sept. 18	0.94501	5.11314	— 0.00237
Aug. 9	0.64976	5.17385	+ 0.00452
Juni 30	0.35234	5.21727	0.01139
Mai 21	+ 0.05375	5.24339	0.01823
April 11	— 0.24500	5.25228	0.02500
März 2	0.54299	5.24405	0.03169
Jan. 21	0.83922	5.21890	0.03829
1888 Dec. 12	1.13274	5.17696	0.04475
Nov. 2	1.42266	5.11856	0.05108
Sept. 23	1.70808	5.04400	0.05724
Aug. 14	1.98816	4.95362	0.06323
Juli 5	2.26203	4.84779	0.06902
Mai 26	2.52891	4.72698	0.07459
April 16	2.78801	4.59162	0.07993
März 7	3.03859	4.44225	0.08503
Jan. 27	3.27995	4.27937	0.08988
1887 Dec. 18	3.51140	4.10357	0.09445
Nov. 8	3.73228	3.91542	0.09873
Sept. 29	3.94200	3.71556	0.10273
Aug. 20	4.13998	3.50463	0.10641
Juli 11	4.32567	3.28330	0.10978
Juni 1	4.49855	3.05226	0.11282
April 22	4.65820	2.81224	0.11554
März 13	4.80414	2.56394	0.11791
Febr. 1	4.93602	2.30813	0.11993
1886 Dec. 23	5.05344	2.04551	0.12161
Nov. 13	5.15610	1.77702	0.12293
Okt. 4	5.24369	1.50328	0.12389
Aug. 25	5.31600	1.22517	0.12449
Juli 16	5.37280	0.94348	0.12473
Juni 6	5.41393	0.65904	0.12460
April 27	5.43927	0.37267	0.12411
März 18	5.44870	— 0.08523	0.12326
Febr. 6	— 5.44221	+ 0.20246	+ 0.12204

Jupiter (Forts.).

Datum.	x	y	z
1885 Dec. 28	— 5.41975	+ 0.48956	+ 0.12047
Nov. 18	5.38137	0.77523	0.11854
Okt. 9	5.32714	1.05861	0.11627
Aug. 30	5.25716	1.33886	0.11365
Juli 21	5.17159	1.61513	0.11070
Juni 11	5.07061	1.88659	0.10741
Mai 2	4.95450	2.15242	0.10380
März 23	4.82349	2.41178	0.09989
Febr. 11	4.67789	2.66385	0.09567
Jan. 2	4.51811	2.90784	0.09115
1884 Nov. 23	4.34453	3.14295	0.08637
Okt. 14	4.15760	3.36840	0.08131
Sept. 4	3.95783	3.58345	0.07601
Juli 26	3.74573	3.78734	0.07046
Juni 16	3.52188	3.97936	0.06470
Mai 7	3.28693	4.15879	0.05873
März 28	3.04152	4.32503	0.05258
Febr. 17	2.78637	4.47737	0.04626
Jan. 8	2.52222	4.61528	0.03979
1883 Nov. 29	2.24985	4.73815	0.03319
Okt. 20	— 1.97009	+ 4.84546	+ 0.02648

Saturnus.

Datum.	x	y	z
1890 Mai 16	— 8.3015	+ 4.1292	+ 0.2637
April 6	8.1879	4.3279	0.2558
Febr. 25	8.0695	4.5240	0.2478
Jan. 16	7.9462	4.7175	0.2396
1889 Dec. 7	7.8182	4.9081	0.2312
Okt. 28	7.6854	5.0958	0.2227
Sept. 18	7.5481	5.2804	0.2141
Aug. 9	7.4062	5.4619	0.2054
Juni 30	7.2597	5.6400	0.1965
Mai 21	7.1089	5.8147	0.1875
April 11	6.9537	5.9859	0.1784
März 2	6.7943	6.1534	0.1692
Jan. 21	6.6306	6.3172	0.1599
1888 Dec. 12	6.4629	6.4771	0.1504
Nov. 2	6.2911	6.6330	0.1409
Sept. 23	6.1155	6.7848	0.1313
Aug. 14	5.9361	6.9323	0.1216
Juli 5	5.7529	7.0756	0.1119
Mai 26	5.5662	7.2145	0.1021
April 16	5.3760	7.3489	0.0922
März 7	5.1824	7.4787	0.0822
Jan. 27	4.9855	7.6038	0.0722
1887 Dec. 18	4.7855	7.7241	0.0622
Nov. 8	4.5824	7.8395	0.0521
Sept. 29	4.3764	7.9500	0.0420
Aug. 20	4.1676	8.0554	0.0318
Juli 11	3.9562	8.1558	0.0216
Juni 1	— 3.7423	+ 8.2510	+ 0.0115

Saturnus (Forts.).

Datum.	x	y	z
1887 April 22	— 3.5260	+ 8.3409	+ 0.0013
März 13	3.3074	8.4255	— 0.0089
Febr. 1	3.0867	8.5047	0.0191
1886 Dec. 23	2.8639	8.5785	0.0293
Nov. 13	2.6394	8.6468	0.0394
Okt. 4	2.4131	8.7095	0.0496
Aug. 25	2.1853	8.7667	0.0597
Juli 16	1.9561	8.8182	0.0697
Juni 6	1.7256	8.8641	0.0797
April 27	1.4939	8.9043	0.0897
März 18	1.2614	8.9387	0.0996
Febr. 6	1.0279	8.9674	0.1095
1885 Dec. 28	0.7938	8.9903	0.1192
Nov. 18	0.5592	9.0074	0.1289
Okt. 9	0.3242	9.0187	0.1385
Aug. 30	— 0.0890	9.0242	0.1481
Juli 21	+ 0.1463	9.0239	0.1575
Juni 11	0.3815	9.0177	0.1668
Mai 2	0.6164	9.0058	0.1760
März 23	0.8510	8.9880	0.1852
Febr. 11	1.0850	8.9644	0.1942
Jan. 2	1.3184	8.9351	0.2030
1884 Nov. 23	1.5509	8.9000	0.2117
Okt. 14	1.7825	8.8592	0.2203
Sept. 4	2.0128	8.8127	0.2288
Juli 26	2.2419	8.7606	0.2371
Juni 16	2.4696	8.7028	0.2453
Mai 7	2.6957	8.6394	0.2533
März 28	2.9201	8.5705	0.2611
Febr. 17	3.1426	8.4962	0.2688
Jan. 8	3.3632	8.4163	0.2763
1883 Nov. 29	3.5816	8.3312	0.2836
Okt. 20	+ 3.7977	+ 8.2407	— 0.2908

Für die Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten der störenden Planeten habe ich die Polarkoordinaten des Berliner Jahrbuches benutzt. Dabei ist zu bemerken, dass diese von 1884 ab von 1880.0 auf 1890.0 reducirt werden müssten.

Mit diesen Werthen für die Koordinaten des Kometen und der störenden Planeten wurde die Störungsrechnung ausgeführt und folgende Resultate erhalten. Die Bezeichnung ist in allen Punkten dieselbe wie die in Oppolzers »Lehrbuch etc.» angewandte.

	1890 Mai 16.	1890 April 6.	1890 Febr. 25.	1890 Jan. 16.	1889 Dec. 7.	1889 Okt. 28.	1889 Sept. 18.	1889 Aug. 9.	1889 Juni 30.	1889 Mai 21.
♃ X_1	+ 144.95	+ 149.66	+ 104.66	+ 4.24	— 92.31	— 137.77	— 142.13	— 129.03	— 111.96	— 96.00
— X_2	— 88.39	— 78.91	— 69.30	— 59.60	— 49.85	— 40.10	— 30.37	— 20.71	— 11.13	— 1.68
♄ X_1	— 11.06	— 9.82	— 8.92	— 8.25	— 7.72	— 7.30	— 6.96	— 6.66	— 6.40	— 6.17
— X_2	+ 14.07	+ 13.92	+ 13.77	+ 13.60	+ 13.43	+ 13.24	+ 13.05	+ 12.84	+ 12.63	+ 12.40
$\Sigma(X)$	+ 59.57	+ 74.85	+ 40.21	— 50.01	— 136.45	— 171.93	— 166.41	— 143.56	— 116.86	— 91.45
♃ Y_1	— 187.66	— 288.03	— 405.49	— 467.04	— 425.89	— 330.22	— 239.04	— 171.43	— 125.03	— 93.52
— Y_2	+ 148.56	+ 152.73	+ 156.28	+ 159.20	+ 161.51	+ 163.21	+ 164.33	+ 164.87	+ 164.86	+ 164.31
♄ Y_1	+ 7.01	+ 6.40	+ 5.89	+ 5.49	+ 5.16	+ 4.90	+ 4.68	+ 4.49	+ 4.33	+ 4.20
— Y_2	— 7.00	— 7.36	— 7.72	— 8.07	— 8.43	— 8.78	— 9.13	— 9.47	— 9.81	— 10.14
$\Sigma(Y)$	— 39.09	— 136.26	— 251.04	— 310.42	— 267.65	— 170.89	— 79.16	— 11.54	+ 34.35	+ 64.85
♃ Z_1	— 88.43	— 110.19	— 106.02	— 58.85	+ 4.16	+ 45.69	+ 61.46	+ 62.72	+ 58.25	+ 52.23
— Z_2	+ 1.44	+ 1.21	+ 0.98	+ 0.75	+ 0.53	+ 0.30	+ 0.08	— 0.14	— 0.36	— 0.57
♄ Z_1	— 1.52	— 0.96	— 0.49	— 0.11	+ 0.21	+ 0.48	+ 0.71	+ 0.91	+ 1.09	+ 1.25
— Z_2	— 0.45	— 0.43	— 0.42	— 0.41	— 0.40	— 0.38	— 0.37	— 0.36	— 0.34	— 0.33
$\Sigma(Z)$	— 88.96	— 110.37	— 105.95	— 58.62	+ 4.50	+ 46.09	+ 61.88	+ 63.13	+ 58.64	+ 52.58
Log h	8.826 283	8.751 343	8.621 203	8.468 203	8.313 433	8.166 643	8.031 163	7.907 383	7.794 403	7.691 263
— Log N	0.007 299	0.006 139	0.004 547	0.003 195	0.002 236	0.001 595	0.001 167	0.000 878	0.000 676	0.000 533
Log q	1.033 014	0.771 062	0.937 021	1,917 115	2.297 627	2.471 388	2.531 277	2.514 269	2.426 846	2.243 149
Log f	0.477 120	0.477 120	0.477 120	0.477 112	0.477 100	0.477 089	0.477 084	0.477 086	0.477 092	0.477 102
$\Delta\Sigma(X)$	— 4.94	+ 0.29	+ 1.11	+ 11.67	+ 26.18	+ 34.72	+ 35.44	+ 31.21	+ 24.89	+ 18.35
$\Delta\Sigma(Y)$	+ 7.60	— 0.25	— 0.68	— 4.58	— 4.75	+ 1.00	+ 9.17	+ 16.43	+ 21.51	+ 24.37
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 11.06	+ 1.90	+ 1.39	+ 5.99	+ 4.90	+ 0.07	— 3.94	— 5.39	— 4.70	— 2.72

	1889 April 11.	1889 März 2.	1889 Jan. 21.	1888 Dec. 12.	1888 Nov. 2.	1888 Sept. 23.	1888 Aug. 14.	1888 Juli 5.	1888 Mai 26.	1888 April 16.
♃ X_1	− 82.45	− 71.33	− 62.28	− 54.90	− 48.83	− 43.81	− 39.61	− 36.07	− 33.06	− 30.47
♃ $-X_2$	+ 7.62	+ 16.74	+ 25.67	+ 34.38	+ 42.86	+ 51.09	+ 59.06	+ 66.74	+ 74.14	+ 81.24
♄ X_1	− 5.97	− 5.78	− 5.61	− 5.45	− 5.31	− 5.17	− 5.05	− 4.93	− 4.81	− 4.71
♄ $-X_2$	+ 12.17	+ 11.92	+ 11.67	+ 11.40	+ 11.13	+ 10.85	+ 10.56	+ 10.25	+ 9.95	+ 9.63
$\Sigma(X)$	− 68.63	− 48.45	− 30.55	− 14.57	− 0.15	+ 12.96	+ 24.96	+ 35.99	+ 46.22	+ 55.69
♃ Y_1	− 71.76	− 56.39	− 45.24	− 36.93	− 30.61	− 25.70	− 21.82	− 18.69	− 16.14	− 14.04
♃ $-Y_2$	+ 163.25	+ 161.68	+ 159.64	+ 157.15	+ 154.22	+ 150.88	+ 147.14	+ 143.04	+ 138.58	+ 133.80
♄ Y_1	+ 4.07	+ 3.97	+ 3.87	+ 3.79	+ 3.71	+ 3.64	+ 3.57	+ 3.51	+ 3.45	+ 3.40
♄ $-Y_2$	− 10.47	− 10.80	− 11.12	− 11.43	− 11.73	− 12.03	− 12.33	− 12.61	− 12.89	− 13.16
$\Sigma(Y)$	+ 85.09	+ 98.46	+ 107.15	+ 112.58	+ 115.59	+ 116.79	+ 116.56	+ 115.25	+ 113.00	+ 110.00
♃ Z_1	+ 46.31	+ 41.05	+ 36.53	+ 32.71	+ 29.48	+ 26.75	+ 24.43	+ 22.45	+ 20.76	+ 19.29
♃ $-Z_2$	− 0.78	− 0.98	− 1.17	− 1.36	− 1.54	− 1.71	− 1.88	− 2.04	− 2.19	− 2.33
♄ Z_1	+ 1.39	+ 1.52	+ 1.64	+ 1.75	+ 1.85	+ 1.95	+ 2.04	+ 2.13	+ 2.21	+ 2.29
♄ $-Z_2$	− 0.31	− 0.30	− 0.28	− 0.27	− 0.25	− 0.23	− 0.22	− 0.20	− 0.18	− 0.17
$\Sigma(Z)$	+ 46.61	+ 41.29	+ 36.72	+ 32.83	+ 29.54	+ 26.76	+ 24.37	+ 22.34	+ 20.60	+ 19.08
$\log h$	7.596 643	7.509 463	7.428 943	7.354 093	7.284 283	7.219 033	7.157 713	7.099 993	7.045 393	6.993 703
$-\log N$	0.000 429	0.000 351	0.000 292	0.000 245	0.000 209	0.000 180	0.000 156	0.000 137	0.000 121	0.000 107
$\log q$	1.794 429	$1.790\ 707_n$	$2.279\ 571_n$	$2.503\ 586_n$	$2.647\ 308_n$	$2.750\ 781_n$	$2.829\ 775_n$	$2.892\ 098_n$	$2.942\ 321_n$	$2.983\ 309_n$
$\log f$	0.477 114	0.477 128	0.477 142	0.477 156	0.477 169	0.477 182	0.477 195	0.477 206	0.477 216	0.477 216
$\Delta\Sigma(X)$	+ 12.44	+ 7.46	+ 3.45	+ 0.31	− 2.09	− 3.90	− 5.23	− 6.17	− 6.82	− 7.24
$\Delta\Sigma(Y)$	+ 25.44	+ 25.22	+ 24.16	+ 22.58	+ 20.71	+ 18.72	+ 16.71	+ 14.74	+ 12.86	+ 11.10
$\Delta\Sigma(Z)$	− 0.19	+ 2.42	+ 4.85	+ 6.96	+ 8.71	+ 10.10	+ 11.16	+ 11.93	+ 12.43	+ 12.72

	1888 März 7.	1888 Jan. 27.	1887 Dec. 18.	1887 Nov. 8.	1887 Sept. 29.	1887 Aug. 20.	1887 Juli 11.	1887 Juni 1.	1887 April 22.	1887 März 13.
♃ X_1	− 28.24	− 26.29	− 24.59	− 23.09	− 21.77	− 20.59	− 19.53	− 18.58	− 17.72	− 16.95
♃ $-X_2$	+ 88.03	+ 94.51	+ 100.66	+ 106.49	+ 111.98	+ 117.14	+ 121.96	+ 126.43	+ 130.55	+ 134.33
♄ X_1	− 4.60	− 4.51	− 4.41	− 4.32	− 4.24	− 4.15	− 4.07	− 3.99	− 3.92	− 3.84
♄ $-X_2$	+ 9.30	+ 8.97	+ 8.62	+ 8.27	+ 7.92	+ 7.55	+ 7.18	+ 6.80	+ 6.42	+ 6.03
$\Sigma(X)$	+ 64.49	+ 72.68	+ 80.28	+ 87.35	+ 93.89	+ 99.95	+ 105.54	+ 110.66	+ 115.33	+ 119.57
♃ Y_1	− 12.28	− 10.79	− 9.52	− 8.42	− 7.48	− 6.65	− 5.92	− 5.28	− 4.70	− 4.19
♃ $-Y_2$	+ 128.70	+ 123.30	+ 117.64	+ 111.72	+ 105.55	+ 99.17	+ 92.57	+ 85.78	+ 78.82	+ 71.69
♄ Y_1	+ 3.35	+ 3.31	+ 3.26	+ 3.22	+ 3.18	+ 3.15	+ 3.11	+ 3.07	+ 3.04	+ 3.00
♄ $-Y_2$	− 13.42	− 13.68	− 13.92	− 14.16	− 14.38	− 14.60	− 14.81	− 15.00	− 15.18	− 15.36
$\Sigma(Y)$	+ 106.35	+ 102.14	+ 97.46	+ 92.36	+ 86.87	+ 81.07	+ 74.95	+ 68.57	+ 61.98	+ 55.14
♃ Z_1	+ 18.03	+ 16.92	+ 15.95	+ 15.11	+ 14.36	+ 13.70	+ 13.11	+ 12.59	+ 12.13	+ 11.71
♃ $-Z_2$	− 2.46	− 2.59	− 2.71	− 2.82	− 2.92	− 3.01	− 3.10	− 3.17	− 3.24	− 3.30
♄ Z_1	+ 2.37	+ 2.44	+ 2.52	+ 2.59	+ 2.66	+ 2.73	+ 2.80	+ 2.86	+ 2.93	+ 2.99
♄ $-Z_2$	− 0.15	− 0.13	− 0.11	− 0.09	− 0.08	− 0.06	− 0.04	− 0.02	0.00	+ 0.02
$\Sigma(Z)$	+ 17.79	+ 16.64	+ 15.65	+ 14.79	+ 14.02	+ 13.36	+ 12.77	+ 12.26	+ 11.82	+ 11.42
Log h	6.944 653	6.897 943	6.853 393	6.810 823	6.770 083	6.730 993	6.693 463	6.657 376	6.622 615	6.589 099
− Log N	0.000 096	0.000 086	0.000 077	0.000 070	0.000 064	0.000 058	0.000 054	0.000 049	0.000 043	0.000 042
Log g	3.017 000$_n$	3.044 724$_n$	3.067 453$_n$	3.085 949$_n$	3.100 779$_n$	3.112 348$_n$	3.121 023$_n$	3.127 073$_n$	3.130 705$_n$	3.132 100$_n$
Log f	0.477 234	0.477 242	0.477 248	0.477 254	0.477 258	0.477 268	0.477 265	0.477 268	0.477 268	0.477 268
$\Delta\Sigma(X)$	− 7.48	− 7.58	− 7.58	− 7.51	− 7.38	− 7.21	− 7.01	− 6.80	− 6.57	− 6.34
$\Delta\Sigma(Y)$	+ 9.45	+ 7.94	+ 6.55	+ 5.28	+ 4.14	+ 3.10	+ 2.17	+ 1.34	+ 0.59	− 0.07
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 12.83	+ 12.78	+ 12.60	+ 12.32	+ 11.96	+ 11.53	+ 11.05	+ 10.53	+ 9.97	+ 9.40

	1887 Febr. 1.	1886 Dec. 23.	1886 Nov. 13.	1886 Okt. 4.	1886 Aug. 25.	1886 Juli 16.	1886 Juni 6.	1886 April 27.	1886 März 18.	1886 Febr. 6.
♃ X_1	— 16.24	— 15.60	— 15.02	— 14.48	— 13.98	— 13.53	— 13.11	— 12.71	— 12.35	— 12.01
— X_2	+ 137.75	+ 140.81	+ 143.51	+ 145.85	+ 147.83	+ 149.43	+ 150.67	+ 151.53	+ 152.02	+ 152.12
♄ X_1	— 3.77	— 3.70	— 3.63	— 3.56	— 3.49	— 3.42	— 3.35	— 3.29	— 3.22	— 3.16
— X_2	+ 5.63	+ 5.23	+ 4.83	+ 4.42	+ 4.01	+ 3.59	+ 3.17	+ 2.74	+ 2.32	+ 1.89
$\Sigma(X)$	+ 123.37	+ 126.74	+ 129.69	+ 132.23	+ 134.37	+ 136.07	+ 137.38	+ 138.27	+ 138.77	+ 138.84
♃ Y_1	— 3.73	— 3.32	— 2.94	— 2.60	— 2.28	— 1.99	— 1.73	— 1.49	— 1.26	— 1.05
— Y_2	+ 64.41	+ 57.00	+ 49.46	+ 41.81	+ 34.07	+ 26.24	+ 18.34	+ 10.38	+ 2.38	— 5.66
♄ Y_1	+ 2.97	+ 2.94	+ 2.90	+ 2.87	+ 2.83	+ 2.80	+ 2.76	+ 2.72	+ 2.68	+ 2.65
— Y_2	— 15.53	— 15.68	— 15.82	— 15.95	— 16.07	— 16.18	— 16.27	— 16.36	— 16.43	— 16.49
$\Sigma(Y)$	+ 48.12	+ 40.94	+ 33.60	+ 26.13	+ 18.55	+ 10.87	+ 3.10	— 4.75	— 12.63	— 20.55
♃ Z_1	+ 11.35	+ 11.02	+ 10.73	+ 10.47	+ 10.24	+ 10.04	+ 9.86	+ 9.70	+ 9.57	+ 9.45
— Z_2	— 3.35	— 3.39	— 3.42	— 3.45	— 3.46	— 3.47	— 3.47	— 3.46	— 3.44	— 3.41
♄ Z_1	+ 3.06	+ 3.12	+ 3.19	+ 3.25	+ 3.31	+ 3.37	+ 3.43	+ 3.49	+ 3.55	+ 3.61
— Z_2	+ 0.03	+ 0.05	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.11	+ 0.13	+ 0.15	+ 0.16	+ 0.18	+ 0.20
$\Sigma(Z)$	+ 11.09	+ 10.80	+ 10.57	+ 10.36	+ 10.20	+ 10.07	+ 9.97	+ 9.89	+ 9.86	+ 9.85
Log h	6.556 732	6.525 455	6.495 193	6.465 883	6.437 469	6.409 897	6.383 125	6.357 109	6.331 801	6.307 177
— Log N	0.000 039	0.000 036	0.000 034	0.000 032	0.000 030	0.000 028	0.000 026	0.000 025	0.000 023	0.000 022
Log q	3.131 382$_n$	3.128 665$_n$	3.124 026$_n$	3.117 525$_n$	3.109 203$_n$	3.099 059$_n$	3.087 111$_n$	3.073 340$_n$	3.057 708$_n$	3.040 165$_n$
Log f	0.477 268	0.477 267	0.477 266	0.477 264	0.477 261	0.477 258	0.477 254	0.477 250	0.477 245	0.477 240
$\Delta\Sigma(X)$	— 6.12	— 5.90	— 5.68	— 5.48	— 5.28	— 5.10	— 4.93	— 4.77	— 4.63	— 4.50
$\Delta\Sigma(Y)$	— 0.66	— 1.18	— 1.63	— 2.02	— 2.36	— 2.65	— 2.89	— 3.10	— 3.26	— 3.39
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 8.81	+ 8.21	+ 7.61	+ 7.00	+ 6.41	+ 5.82	+ 5.24	+ 4.67	+ 4.12	+ 3.59

	1885 Dec. 28.	1885 Nov. 18.	1885 Okt. 9.	1885 Aug. 30.	1885 Juli 21.	1885 Juni 11.	1885 Mai 2.	1885 März 23.	1885 Febr. 11.	1885 Jan. 2.
♃ X_1	— 11.70	— 11.40	— 11.12	— 10.86	— 10.61	— 10.38	— 10.15	— 9.94	— 9.74	— 9.54
♃ — X_2	+ 151.85	+ 151.18	+ 150.13	+ 148.68	+ 146.83	+ 144.59	+ 141.91	+ 138.89	+ 135.42	+ 131.55
♄ X_1	— 3.09	— 3.02	— 2.96	— 2.89	— 2.83	— 2.76	— 2.70	— 2.63	— 2.56	— 2.50
♄ — X_2	+ 1.46	+ 1.03	+ 0.60	+ 0.16	— 0.27	— 0.70	— 1.13	— 1.56	— 1.99	— 2.42
$\Sigma(X)$	+ 138.52	+ 137.79	+ 136.65	+ 135.09	+ 133.12	+ 130.75	+ 127.93	+ 124.76	+ 121.13	+ 117.09
♃ Y_1	— 0.86	— 0.68	— 0.51	— 0.35	— 0.21	— 0.07	+ 0.05	+ 0.17	+ 0.28	+ 0.38
♃ — Y_2	— 13.72	— 21.78	— 29.83	— 37.86	— 45.86	— 53.80	— 61.66	— 69.44	— 77.12	— 84.67
♄ Y_1	+ 2.61	+ 2.56	+ 2.52	+ 2.47	+ 2.43	+ 2.38	+ 2.33	+ 2.28	+ 2.23	+ 2.17
♄ — Y_2	— 16.53	— 16.57	— 16.59	— 16.59	— 16.59	— 16.58	— 16.55	— 16.50	— 16.45	— 16.39
$\Sigma(Y)$	— 28.50	— 36.47	— 44.41	— 52.33	— 60.23	— 68.07	— 75.83	— 83.49	— 91.06	— 98.51
♃ Z_1	+ 9.35	+ 9.27	+ 9.20	+ 9.15	+ 9.11	+ 9.09	+ 9.07	+ 9.07	+ 9.08	+ 9.10
♃ — Z_2	— 3.38	— 3.33	— 3.28	— 3.21	— 3.14	— 3.06	— 2.97	— 2.88	— 2.77	— 2.65
♄ Z_1	+ 3.67	+ 3.73	+ 3.78	+ 3.84	+ 3.89	+ 3.94	+ 3.99	+ 4.04	+ 4.08	+ 4.13
♄ — Z_2	+ 0.22	+ 0.24	+ 0.25	+ 0.27	+ 0.29	+ 0.31	+ 0.32	+ 0.34	+ 0.36	+ 0.37
$\Sigma(Z)$	+ 9.86	+ 9.91	+ 9.95	+ 10.05	+ 10.15	+ 10.28	+ 10.41	+ 10.57	+ 10.75	+ 10.95
Log h	6.283 189	6.259 807	6.237 013	6.214 771	6.193 054	6.171 841	6.151 105	6.130 834	6.111 004	6.091 597
— Log N	0.000 021	0.000 020	0.000 019	0.000 018	0.000 017	0.000 016	0.000 015	0.000 014	0.000 013	0.000 013
Log q	3.020 627$_n$	3.000 011$_n$	2.975 184$_n$	2.948 998$_n$	2.920 260$_n$	2.888 712$_n$	2.854 078$_n$	2.815 977$_n$	2.773 924$_n$	2.727 286$_n$
Log f	0.477 235	0.477 230	0.477 225	0.477 218	0.477 212	0.477 205	0.477 199	0.477 192	0.477 186	0.477 179
$\Delta\Sigma(X)$	— 4.38	— 4.28	— 4.18	— 4.09	— 4.02	— 3.96	— 3.91	— 3.88	— 3.85	— 3.83
$\Delta\Sigma(Y)$	— 3.49	— 3.56	— 3.60	— 3.62	— 3.62	— 3.60	— 3.56	— 3.50	— 3.43	— 3.34
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 3.07	+ 2.58	+ 2.08	+ 1.62	+ 1.17	+ 0.75	+ 0.34	— 0.05	— 0.41	— 0.75

	(X)			(Y)			(Z)		
	$f = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1890 Mai 16 . .	+ 54.63		+ 75.86	— 31.49		— 152.26	— 77.90		— 113.09
		— 73.71			+ 141.49			+ 108.35	
April 6 . .	+ 75.14		+ 2.15	— 136.51		— 10.77	— 108.47		— 4.74
		+ 1.43			+ 4.98			— 0.12	
Febr. 25 . .	+ 41.32		+ 3.58	— 251.72		— 5.79	— 104.56		— 4.86
		+ 42.75			— 246.74			— 104.68	
Jan. 16 . .	— 38.34		+ 46.33	— 315.00		— 252.53	— 52.63		— 109.54
		+ 4.41			— 561.74			— 157.31	
1889 Dec. 7. . .	— 110.27		+ 50.74	— 272.40		— 814.27	+ 9.40		— 266.85
		— 105.86			— 834.14			— 147.91	
Okt. 28 . .	— 137.21		— 55.12	— 169.89		— 1648.41	+ 46.16		— 414.76
		— 243.07			— 1004.03			— 101.75	
Sept. 18 . .	— 130.97		— 298.19	— 69.99		— 2652.44	+ 57.94		— 516.51
		— 374.04			— 1074.02			— 53.81	
Aug. 9 . .	— 112.35		— 672.23	+ 4.89		— 3726.46	+ 57.74		— 570.32
		— 486.39			— 1069.13			+ 3.93	
Juni 30 . .	— 91.97		— 1158.62	+ 55.86		— 4795.59	+ 53.94		— 566.39
		— 578.36			— 1013.27			+ 57.87	
Mai 21 . .	— 73.10		— 1736.98	+ 89.22		— 5808.86	+ 49.86		— 508.52
		— 651.46			— 924.05			+ 107.73	
April 11 . .	— 56.19		— 2388.44	+ 110.53		— 6732.91	+ 46.42		— 400.79
		— 707.65			— 813.52			+ 154.15	
März 2 . .	— 40.99		— 3096.09	+ 123.68		— 7546.43	+ 43.71		— 246.64
		— 748.64			— 689.84			+ 197.86	
Jan. 21 . .	— 27.10		— 3844.73	+ 131.31		— 8236.27	+ 41.57		— 48.78
		— 775.74			— 558.53			+ 239.43	
1888 Dec. 12 . .	— 14.26		— 4620.47	+ 135.16		— 8794.80	+ 39.79		+ 190.65
		— 790.00			— 423.37			+ 279.22	

	(X)			(Y)			(Z)		
	$f = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1888 Nov. 2 . .	− 2.24		− 5410.47	+ 136.30		− 9218.17	+ 38.25		+ 469.87
		− 792.24			− 287.07			+ 317.47	
Sept. 23 . .	+ 9.06		− 6202.71	+ 135.51		− 9505.24	+ 36.86		+ 787.34
		− 783.18			− 151.56			+ 354.33	
Aug. 14 . .	+ 19.73		− 6985.89	+ 133.27		− 9656.80	+ 35.53		+ 1141.67
		− 763.45			− 18.29			+ 389.86	
Juli 5 . . .	+ 29.82		− 7749.34	+ 129.99		− 9675.09	+ 34.27		+ 1531.53
		− 733.63			+ 111.70			+ 424.13	
Mai 26 . .	+ 39.40		− 8482.97	+ 125.86		− 9563.39	+ 33.03		+ 1955.66
		− 694.23			+ 237.56			+ 457.16	
April 16 . .	+ 48.45		− 9177.20	+ 121.10		− 9325.83	+ 31.80		+ 2412.82
		− 645.78			+ 358.66			+ 488.96	
März 7 . .	+ 57.01		− 9822.98	+ 115.80		− 8967.17	+ 30.62		+ 2901.78
		− 588.77			+ 474.46			+ 519.58	
Jan. 27 . .	+ 65.10		− 10411.75	+ 110.08		− 8492.71	+ 29.42		+ 3421.36
		− 523.67			+ 584.54			+ 549.00	
1887 Dec. 18 . .	+ 72.70		− 10935.42	+ 104.01		− 7908.17	+ 28.25		+ 3970.36
		− 450.97			+ 688.55			+ 577.25	
Nov. 8 . .	+ 79.84		− 11386.39	+ 97.64		− 7219.62	+ 27.11		+ 4547.61
		− 371.13			+ 786.19			+ 604.36	
Sept. 29 . .	+ 86.51		− 11757.52	+ 91.01		− 6433.43	+ 25.98		+ 5151.97
		− 284.62			+ 877.20			+ 630.34	
Aug. 20 . .	+ 92.74		− 12042.14	+ 84.17		− 5556.23	+ 24.89		+ 5782.31
		− 191.88			+ 961.37			+ 655.23	
Juli 11 . .	+ 98.53		− 12234.02	+ 77.12		− 4594.86	+ 23.82		+ 6437.54
		− 93.35			+ 1038.49			+ 679.05	
Juni 1 . .	+ 103.86		− 12327.37	+ 69.91		− 3556.37	+ 22.79		+ 7116.59
		+ 10.51			+ 1108.40			+ 701.84	
April 22 . .	+ 108.76		− 12316.86	+ 62.57		− 2447.97	+ 21.79		+ 7818.43
		+ 119.27			+ 1170.97			+ 723.63	

1887 März 13 . .	+ 113.23		— 12197.59	+ 55.07		— 1277.00	+ 20.82		+ 8542.06
		+ 232.50			+ 1226.04			+ 744.45	
Febr. 1 . .	+ 117.25		— 11965.09	+ 47.46		— 50.96	+ 19.90		+ 9286.51
		+ 349.75			+ 1273.50			+ 764.35	
1886 Dec. 23 . .	+ 120.84		— 11615.34	+ 39.76		+ 1222.54	+ 19.01		+ 10050.86
		+ 470.59			+ 1313.26			+ 783.36	
Nov. 13 . .	+ 124.01		— 11144.75	+ 31.97		+ 2535.80	+ 18.18		+ 10834.22
		+ 594.60			+ 1345.23			+ 801.54	
Okt. 4 . . .	+ 126.75		— 10550.15	+ 24.11		+ 3881.03	+ 17.36		+ 11635.76
		+ 721.35			+ 1369.34			+ 818.90	
Aug. 25 . .	+ 129.09		— 9828.80	+ 16.19		+ 5250.37	+ 16.61		+ 12454.66
		+ 850.44			+ 1385.53			+ 835.51	
Juli 16 . .	+ 130.97		— 8978.36	+ 8.22		+ 6635.90	+ 15.89		+ 13290.17
		+ 981.41			+ 1393.75			+ 851.40	
Juni 6 . .	+ 132.45		— 7996.95	+ 0.21		+ 8029.65	+ 15.21		+ 14141.57
		+ 1113.86			+ 1393.96			+ 866.61	
April 27 . .	+ 133.50		— 6883.09	— 7.85		+ 9423.61	+ 14.56		+ 15008.18
		+ 1247.36			+ 1386.11			+ 881.17	
März 18 . .	+ 134.14		— 5635.73	— 15.89		+ 10809.72	+ 13.98		+ 15889.35
		+ 1381.50			+ 1370.22			+ 895.15	
Febr. 6 . .	+ 134.34		— 4254.23	— 23.94		+ 12179.94	+ 13.44		+ 16784.50
		+ 1515.84			+ 1346.28			+ 908.59	
1885 Dec. 28 . .	+ 134.14		— 2738.39	— 31.99		+ 13526.22	+ 12.93		+ 17693.09
		+ 1649.98			+ 1314.29			+ 921.52	
Nov. 18 . .	+ 133.51		— 1088.41	— 40.03		+ 14840.51	+ 12.49		+ 18614.61
		+ 1783.49			+ 1274.26			+ 934.01	
Okt. 9 . . .	+ 132.47		+ 695.08	— 48.01		+ 16114.77	+ 12.03		+ 19548.62
		+ 1915.96			+ 1226.25			+ 946.04	
Aug. 30 . .	+ 131.00		+ 2611.04	— 55.95		+ 17341.02	+ 11.67		+ 20494.66
		+ 2046.96			+ 1170.30			+ 957.71	
Juli 21 . .	+ 129.10		+ 4658.00	— 63.85		+ 18511.32	+ 11.32		+ 21452.37
		+ 2176.06			+ 1106.45			+ 969.03	
Juni 11 . .	+ 126.79		+ 6834.06	— 71.67		+ 19617.77	+ 11.03		+ 22421.40
		+ 2302.85			+ 1034.78			+ 980.06	
Mai 2 . . .	+ 124.02		+ 9136.91	— 79.39		+ 20652.55	+ 10.75		+ 23401.46
		+ 2426.87			+ 955.39			+ 990.81	

	(X)			(Y)			(Z)		
	$f = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1885 März 23 . .	+ 120.88		+ 11563.78	— 86.99		+ 21607.94	+ 10.52		+ 24392.27
		+ 2547.75			+ 868.40			+ 1001.33	
Febr. 11 . .	+ 117.28		+ 14111.53	— 94.49		+ 22476.34	+ 10.34		+ 25393.60
		+ 2665.03			+ 773.91			+ 1011.67	
Jan. 2 . . .	+ 113.26		+ 16776.56	— 101.85		+ 23250.25	+ 10.20		+ 26405.27
		+ 2778.29			+ 672.06			+ 1021.87	
1884 Nov. 23 . .	+ 108.82		+ 19554.85	— 109.07		+ 23922.31	+ 10.10		+ 27427.14
		+ 2887.11			+ 562.99			+ 1031.97	
Okt. 14 . .	+ 103.96		+ 22441.96	— 116.13		+ 24485.30	+ 10.04		+ 28459.11
		+ 2991.07			+ 446.86			+ 1042.01	
Sept. 4 . . .	+ 98.68		+ 25433.03	— 123.02		+ 24932.16	+ 10.02		+ 29501.12
		+ 3089.75			+ 323.84			+ 1052.03	
Juli 26 . .	+ 92.98		+ 28522.78	— 129.72		+ 25256.00	+ 10.04		+ 30553.15
		+ 3182.73			+ 194.12			+ 1062.07	
Juni 16 . .	+ 86.86		+ 31705.51	— 136.22		+ 25450.12	+ 10.10		+ 31615.22
		+ 3269.59			+ 57.90			+ 1072.17	
Maj 7 . . .	+ 80.32		+ 34975.10	— 142.50		+ 25508.02	+ 10.20		+ 32687.39
		+ 3349.91			— 84.60			+ 1082.37	
März 28 . .	+ 73.36		+ 38325.01	— 148.54		+ 25423.42	+ 10.34		+ 33769.76
		+ 3423.27			— 233.14			+ 1092.71	
Febr. 17 . .	+ 65.98		+ 41748.28	— 154.32		+ 25190.28	+ 10.52		+ 34862.47
		+ 3489.25			— 387.46			+ 1103.23	
Jan. 8 . . .	+ 58.18		+ 45237.53	— 159.82		+ 24802.82	+ 10.74		+ 35965.70
		+ 3547.43			— 547.28			+ 1113.97	
1883 Nov. 29 . .	+ 49.96		+ 48784.96	— 165.02		+ 24255.54	+ 11.00		+ 37079.67

wo die Grössen von 1884 Nov. 23 bis auf 1883 Nov. 29 extrapolirt sind.

Mit Hülfe von diesen Tabellen über die Störungswerthe wurde nun die Rechnung weiter geführt. Zuerst habe ich aus den für 1890 März 17 oskulirenden Elementen die ungestörten Koordinaten des Kometen x_0, y_0, z_0 und seine Geschwindigkeiten $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ berechnet. Dann wurden aus den Störungstabellen die Kometenstörungen in Koordinaten ξ, η, ζ und Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ genommen. Werden diese Störungswerthe zu x_0, y_0, z_0 und $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ resp. addirt, so erhält man die Koordinaten und die Geschwindigkeiten des Kometen in Bezug auf die Sonne $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, und aus diesen werden mit Hülfe der Formeln, pag. 407, die oskulirenden Excentricitäten abgeleitet.

Um *die konvergirenden* Excentricitätswerthe zu erhalten, haben wir zu den Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die von den Planetenstörungen bewirkten Geschwindigkeiten der Sonne zu addiren; diese Geschwindigkeiten, welche $\frac{d\xi_\odot}{dt}$, $\frac{d\eta_\odot}{dt}$, $\frac{d\zeta_\odot}{dt}$ bezeichnet werden können, erhalten wir durch Verwendung der Gleichungen:

$$\frac{d\xi_\odot}{dt} = -\frac{\Sigma m_1 \frac{dx_1}{dt}}{1 + \Sigma m_1}$$

$$\frac{d\eta_\odot}{dt} = -\frac{\Sigma m_1 \frac{dy_1}{dt}}{1 + \Sigma m_1}$$

$$\frac{d\zeta_\odot}{dt} = -\frac{\Sigma m_1 \frac{dz_1}{dt}}{1 + \Sigma m_1},$$

wobei m_1, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ die Massen und Geschwindigkeiten der störenden Planeten bezeichnen, welche Geschwindigkeiten aus den Tabellen pagg. 411—413 durch Anwendung der Formel:

$$\frac{df(a)}{dt} = f'(a) - \frac{1}{6} f'''(a) + \ldots$$

erhalten werden können.

Werden nun diese Werthe der Geschwindigkeiten der Sonne zu den relativen Geschwindigkeiten des Kometen addirt, so müssen wir wiederum die Formeln pag. 407 benutzen, wo als Koordinaten die gestörten Koordinaten des Kometen x, y, z zu gebrauchen sind und als Geschwindigkeiten die auf diese Weise korrigirten Koordinaten $\frac{dx}{dt} + \frac{d\xi_\odot}{dt}$, $\frac{dy}{dt} + \frac{d\eta_\odot}{dt}$, $\frac{dz}{dt} + \frac{d\zeta_\odot}{dt}$, welche Grössen im Folgenden $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ bezeichnet werden.

In der oben citirten Arbeit hatte ich diese Rechnungen für fünf Epochen mit einem Intervalle von 320 Tagen ausgeführt, und die Resultate deuteten eine kontinuirliche Abnahme der Excentricität an, obwohl aus den wenigen Daten keine sichere Schlussfolgerung bezüglich der Grenze, gegen welche die Excentricitätswerthe schliesslich konvergiren, gezogen werden konnte. Jetzt, wo ein grösseres Material vorliegt, habe ich die Rechnung weiter geführt und zwar mit kürzerem Intervalle, 160 Tage.

Um einen Anhaltspunkt für die Abschätzung der Genauigkeit der logaritmischen Rechnung zu gewinnen, habe ich auch für die ungestörten Koordinaten und Geschwindigkeiten die Ausdrücke C, C_1, C_{11} berechnet, Quantitäten, welche in der ungestörten Bewegung konstante Werthe besitzen müssen.

Wir bekommen also:

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
x_0	+ 2.932 662	+ 4.039 712	+ 4.879 996	+ 5.565 762	+ 6.150 839	+ 6.664 797	+ 7.125 620
y_0	— 1.770 007	— 1.522 071	— 1.166 978	— 0.773 028	— 0.364 351	+ 0.048 887	+ 0.461 921
z_0	— 0.861 788	— 2.381 802	— 3.753 195	— 5.008 236	— 6.173 643	— 7.268 123	— 8.304 894
$\frac{dx_0}{dt}$	— 0.327 0220	— 0.236 7304	— 0.187 7341	— 0.157 2724	— 0.136 4515	— 0.121 2572	— 0.109 6341
$\frac{dy_0}{dt}$	— 0.035 6340	— 0.079 9594	— 0.095 1337	— 0.100 9310	— 0.103 0132	— 0.103 4182	— 0.103 0052
$\frac{dz_0}{dt}$	+ 0.399 9681	+ 0.360 1721	+ 0.326 9982	+ 0.301 6306	+ 0.281 8395	+ 0.265 9434	+ 0.252 8406
ξ	— 31	— 239	— 541	— 848	— 1 093	— 1 223	— 1 196
η	— 266	— 672	— 921	— 955	— 790	— 459	— 5
ζ	— 51	— 40	+ 47	+ 196	+ 397	+ 644	+ 929
$\frac{d\xi}{dt}$	+ 310	+ 681	+ 792	+ 715	+ 488	+ 143	— 291
$\frac{d\eta}{dt}$	+ 1046	+ 870	+ 355	— 175	— 637	— 1001	— 1250
$\frac{d\zeta}{dt}$	+ 78	— 131	— 298	— 441	— 563	— 667	— 754
korr. $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$	— 2402	— 2399	— 2247	— 1971	— 1582	— 1103	— 556
korr. $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$	— 139	+ 481	+ 1073	+ 1612	+ 2071	+ 2438	+ 2691
korr. $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$	+ 41	+ 38	+ 32	+ 25	+ 14	+ 2	— 11

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
x_0	+ 7.545 066	+ 7.931 276	+ 8.290 123	+ 8.625 990	+ 8.942 258	+ 9.241 570	+ 9.526 049
y_0	+ 0.872 382	+ 1.279 073	+ 1.681 395	+ 2.079 086	+ 2.472 079	+ 2.860 400	+ 3.244 143
z_0	— 9.293 587	— 10.241 441	— 11.154 013	— 12.035 706	— 12.890 089	— 13.720 052	— 14.528 000
$\frac{dx_0}{dt}$	— 0.100 4235	— 0.092 9229	— 0.086 6806	— 0.081 3933	— 0.076 8489	— 0.072 8948	— 0.069 4181
$\frac{dy_0}{dt}$	— 0.102 1782	— 0.101 1424	— 0.100 0080	— 0.098 8359	— 0.097 6611	— 0.096 5033	— 0.095 3738
$\frac{dz_0}{dt}$	+ 0.241 8059	+ 0.232 3472	+ 0.224 1202	+ 0.216 8763	+ 0.210 4319	+ 0.204 6478	+ 0.199 4167
ξ	— 982	— 562	+ 71	+ 915	+ 1 956	+ 3 171	+ 4 524
η	+ 525	+ 1 081	+ 1 611	+ 2 065	+ 2 391	+ 2 544	+ 2 479
ζ	+ 1 246	+ 1 589	+ 1 955	+ 2 340	+ 2 743	+ 3 162	+ 3 597
$\frac{d\xi}{dt}$	— 786	— 1314	— 1850	— 2365	— 2833	— 3227	— 3519
$\frac{d\eta}{dt}$	— 1378	— 1379	— 1251	— 996	— 618	— 127	+ 467
$\frac{d\zeta}{dt}$	— 827	— 888	— 940	— 985	— 1027	— 1067	— 1109
korr. $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$	+ 36	+ 650	+ 1262	+ 1848	+ 2381	+ 2834	+ 3184
korr. $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$	+ 2826	+ 2832	+ 2712	+ 2462	+ 2087	+ 1599	+ 1008
korr. $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$	— 25	— 38	— 51	— 62	— 72	— 79	— 84

ξ, η, ζ und $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sind in derselben Decimale wie x_0, y_0, z_0 und $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ bez. ausgedrückt, d. i. jene in der sechsten, diese in der siebenten Decimale.

Die ungestörte Bewegung.

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
C	— 0.683 3338	— 0.683 3331	— 0.683 3335	— 0.683 3337	— 0.683 3336	— 0.683 3334	— 0.683 3335
C_1	— 0.738 6551	— 0.738 6546	— 0.738 6550	— 0.738 6549	— 0.738 6550	— 0.738 6551	— 0.738 6548
C_{11}	+ 0.891 1470	+ 0.891 1465	+ 0.891 1472	+ 0.891 1464	+ 0.891 1471	+ 0.891 1468	+ 0.891 1467

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
C	— 0.683 3335	— 0.683 3335	— 0.683 3342	— 0.683 3337	— 0.683 3338	— 0.683 3338	— 0.683 3335
C_1	— 0.738 6551	— 0.738 6552	— 0.738 6556	— 0.738 6553	— 0.738 6553	— 0.738 6553	— 0.738 6547
C_{11}	+ 0.891 1467	+ 0.891 1461	+ 0.891 1475	+ 0.891 1468	+ 0.891 1469	+ 0.891 1470	+ 0.891 1470

Die oskulirenden Werthe.

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
C	— 0.683 0581	— 0.683 0183	— 0.683 1893	— 0.683 4408	— 0.683 7029	— 0.683 9303	— 0.684 0880
C_1	— 0.738 6872	— 0.738 6730	— 0.738 7837	— 0.738 9772	— 0.739 2096	— 0.739 4413	— 0.739 6331
C_{11}	+ 0.891 1680	+ 0.891 1606	+ 0.891 1310	+ 0.891 0347	+ 0.890 8477	+ 0.890 5588	+ 0.890 1668
Log p	0.581 5329	0.581 5116	0.581 5945	0.581 7045	0.581 7932	0.581 8265	0.581 7787
e	1.000 3620	1.000 1916	1.000 1586	1.000 1828	1.000 2311	1.000 2862	1.000 3392

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
C	— 0.684 1514	— 0.684 1014	— 0.683 9276	— 0.683 6235	— 0.683 1934	— 0.682 6477	— 0.682 0051
C_1	— 0.739 7533	— 0.739 7690	— 0.739 6531	— 0.739 3798	— 0.738 9357	— 0.738 3095	— 0.737 4986
C_{11}	+ 0.889 6803	+ 0.889 1128	+ 0.888 4901	+ 0.887 8408	+ 0.887 2001	+ 0.886 6130	+ 0.886 1309
Log p	0.581 6343	0.581 3807	0.581 0159	0.580 5407	0.579 9664	0.579 3115	0.578 6033
e	1.000 3856	1.000 4214	1.000 4449	1.000 4537	1.000 4479	1.000 4267	1.000 3904

1889 Sept. 18	e = 1.000 3620		1886 Aug. 25	e = 1.000 3856	
April 11	1916		März 18	4214	
1888 Nov. 2	1586		1885 Okt. 9	4449	
Mai 26	1828		Mai 2	4537	
1887 Dec. 18	2311		1884 Nov. 23	4479	
Juli 11	2862		Juni 16	4267	
Febr. 1	3392		Jan. 8	3904	

Die konvergirenden Werthe.

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
Log x	0.467 2574	0.606 3247	0.688 3713	0.745 4585	0.788 8572	0.823 7072	0.852 7498
Log y	0.248 0403$_n$	0.182 6266$_n$	0.067 4053$_n$	9.888 7318$_n$	9.562 4606$_n$	8.685 0983	9.664 5630
Log z	9.935 4261$_n$	0.376 9128$_n$	0.574 3957$_n$	0.699 6678$_n$	0.790 5136$_n$	0.861 3838$_n$	0.919 2855$_n$
Log r	0.548 0543	0.692 8858	0.796 9706	0.876 5915	0.940 5829	0.993 8819	1.039 4578
Log $\left(\frac{dx}{dt}\right)$	9.514 8547$_n$	9.374 5691$_n$	9.273 8797$_n$	9.196 9992$_n$	9.135 3264$_n$	9.084 0513$_n$	9.040 2810$_n$
Log $\left(\frac{dy}{dt}\right)$	8.550 7578$_n$	8.902 1351$_n$	8.977 6820$_n$	9.003 4058$_n$	9.012 2879$_n$	9.013 9931$_n$	9.012 2511$_n$
Log $\left(\frac{dz}{dt}\right)$	9.602 0383	9.556 4989	9.514 5100	9.479 4155	9.449 9173	9.424 6806	9.402 7154
C	— 0.683 5241	— 0.683 1893	— 0.682 9282	— 0.682 6962	— 0.682 4872	— 0.682 3004	— 0.682 1452
C_1	— 0.738 7065	— 0.738 5642	— 0.738 3847	— 0.738 1718	— 0.737 9317	— 0.737 6694	— 0.737 3991
C_{11}	+ 0.890 9732	+ 0.890 6047	+ 0.890 3030	+ 0.890 0615	+ 0.889 8799	+ 0.889 7582	+ 0.889 6978
Log p	0.581 6095	0.581 2910	0.581 0121	0.580 7566	0.580 5246	0.580 3176	0.580 1445
e	1.001 0120	1.000 6288	1.000 4242	1.000 3069	1.000 2357	1.000 1903	1.000 1622

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
Log x	0.877 6065	0.899 3123	0.918 5647	0.935 8551	0.951 5422	0.965 8947	0.979 1190
Log y	9.940 9680	0.107 2622	0.226 0856	0.318 3036	0.393 4822	0.456 8128	0.511 4317
Log z	0.968 1252$_n$	1.010 2937$_n$	1.047 3551$_n$	1.080 3871$_n$	1.110 1635$_n$	1.137 2556$_n$	1.162 0982$_n$
Log r	1.079 2156	1.114 4434	1.146 0485	1.174 6937	1.200 8774	1.224 9818	1.247 3072
Log $\left(\frac{dx}{dt}\right)$	9.002 1596$_n$	8.968 4330$_n$	8.938.2164$_n$	8.910 8644$_n$	8.885 8931$_n$	8.862 9306$_n$	8.841 6823$_n$
Log $\left(\frac{dy}{dt}\right)$	9.008 7424$_n$	9.004 3089$_n$	8.999 3999$_n$	8.994.2700$_n$	8.989 0679$_n$	8.983 8793$_n$	8.978 7569$_n$
Log $\left(\frac{dz}{dt}\right)$	9.383 3139	9.365 9643	9.350 2889	9.336 0024	9.322 8847	9.310 7638	9.299 5016
C	— 0.682 0228	— 0.681 9385	— 0.681 8918	— 0.681 8840	— 0.681 9158	— 0.681 9811	— 0.682 0782
C_{I}	— 0.737 1296	— 0.736 8739	— 0.736 6374	— 0.736 4297	— 0.736 2639	— 0.736 1391	— 0.736 0615
C_{II}	+ 0.889 6948	+ 0.889 7482	+ 0.889 8553	+ 0.890 0112	+ 0.890 2038	+ 0.890 4273	+ 0.890 6754
Log p	0.580 0071	0.579 9113	0.579 8579	0.579 8484	0.579 8828	0.579 9559	0.580 0668
e	1.000 1447	1.000 1346	1.000 1289	1.000 1260	1.000 1249	1.000 1243	1.000 1230

Datum.	e	f'	f''	f'''	f''''
1889 Sept. 18.	1.001 012				
		— 383			
April 11	1.000 629		+ 178		
		— 205		— 90	
1888 Nov. 2	1.000 424		+ 88		+ 47
		— 117		— 43	
Mai 26	1.000 307		+ 45		+ 25
		— 72		— 18	
1887 Dec. 18	1.000 235		+ 27		+ 8
		— 45		— 10	
Juli 11	1.000 190		+ 17		+ 4
		— 28		— 6	
Febr. 1	1.000 162		+ 11		+ 2
		— 17		— 4	
1886 Aug. 25.	1.000 145		+ 7		+ 1
		— 10		— 3	
März 18.	1.000 135		+ 4		+ 2
		— 6		— 1	
1885 Okt. 9	1.000 129		+ 3		+ 0
		— 3		— 1	
Mai 2.	1.000 126		+ 2		
		— 1			
1884 Nov. 23.	1.000 125		+ 0		
		— 1			
Juni 16	1.000 124		+ 0		
		— 1			
Jan. 8	1.000 123				

* * *

Wenn wir die zwei Reihen der Excentricitätswerthe untersuchen, finden wir die Auseinandersetzung pagg. 406—409 vollauf bestätigt. Die oskulirenden Excentricitäten zeigen eine periodische Ab- und Zunahme, und die nach meinem Vorschlage aus den gestörten Koordinaten und den gestörten, für die Bewegung der Sonne korrigirten, Geschwindigkeiten berechneten Excentricitätswerthe liefern eine Tabelle, wo die Differenzen (resp. die Derivirten) aller Ordnungen gegen Null konvergiren, woraus mit Bestimmtheit hervorgeht, dass die Excentricitätswerthe selbst gegen einen gewissen Endwerth konvergiren, der übrigens bei der letzten angewandten Zeitepoche beinahe erreicht worden war.

Das Resultat der Rechnung ist: *Der Komet 1890 II hat sich ursprünglich in einer hyperbolischen Bahn mit der Excentricität* 1.000 12 *der Sonne genähert.*

Dass die *oskulirenden* Excentricitäten nicht für unseren Zweck zu gebrauchen sind, war schon a priori klar und ist durch die numerische Rechnung vollauf bestätigt worden. Dass die Excentricitätswerthe THRAENS kontinuirlich abzunehmen scheinen, ist zweifelsohne eine Folge davon, dass seine Rechnung einen allzu kurzen Zeitraum umfasst. Wenn wir z. B. bei dem Kometen 1890 II die oskulirenden Excentricitäten ins Auge fassen, finden wir, dass sie von 1888 Nov. 2 bis zu 1885 Mai 2 kontinuirlich zunehmen, obgleich die ausführliche Tabelle deutlich angiebt, dass diese Zunahme nur periodischer Natur ist. Eine Rechnung, welche einen grösseren Zeitraum umfasst und mit kleinerem Intervalle ausgeführt wird, wird ohne Zweifel ein Resultat ergeben, das mit dem für den Kometen 1890 II erhaltenen vollkommen analog ist.

* * *

Zuletzt wollen wir mit einigen Worten eine andere Frage berühren, welche mit den Hauptpunkten der vorigen Darstellung am engsten verknüpft ist. Aus dem oben Erwähnten geht es hervor, dass die oskulirende Excentricität einer Kometenbahn zur Zeit des Periheldurchganges nicht benutzt werden kann, um einen exakten Ausdruck der Beschaffenheit der Bahn zu geben für die Zeit, wo der Komet sich in grosser Entfernung von der Sonne befindet. Dies aus zwei Gründen, erstens in Folge der Störungen in der Lage und in den Geschwindigkeiten des Kometen und zweitens in Folge derjenigen Korrektionen, welche auf Grund der Bewegung der *Sonne* in den Geschwindigkeiten des Kometen gemacht werden müssen.

Bei einer Kometenbahn mit einer Excentricität, welche zu der Oskulationsepoche etwas kleiner als die Einheit ist, d. h. bei einer sehr langgestreckten elliptischen Bahn, kann man, um einen sicheren Werth der Umlaufszeit des Kometen zu bekommen, nicht ohne weiteres die oskulirende Excentricität verwenden. Um in dieser Beziehung zu einem Resultate zu gelangen, ist es

nothwendig eine Rückwärtsrechnung der Störungen auszuführen und ausserdem für die Geschwindigkeiten der Sonne Korrektionen zu machen.

RIEM hat in einem kleinen Aufsatze »Über eine frühere Erscheinung des Kometen 1881 III Tebbut» nachzuweisen versucht, dass der Komet 1881 III einer derjenigen Kometen sei, von welchen alte chinesische Beobachtungen vorliegen.

Für den Kometen 1881 III hat RIEM gefunden:[1])

Oskulationsepoche 1881 Juni 7.5.

$$q = 0.734\,5580$$
$$e = 0.995\,9540.$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich eine Umlaufszeit (oskulirende!) von 2446 Jahren. Jedoch darf man diese Umlaufszeit zwischen 2390 und 2480 variiren, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerahten. RIEM gelangt nun zu dem Resultate, dass der Komet 1881 III mit einem in China im Jahre 612 v. Chr. beobachteten Kometen identisch ist, und bestimmt daraus die Umlaufszeit zu 2493 Jahren, ein Werth, der ja dem erhaltenen Maximiwerthe 2480 sehr nahe kommt.

Wenn wir bei dem Kometen 1890 II die oskulirende Excentricität 1890 März 17 (1.000 410) mit dem erhaltenen Grenzwerthe (1.000 123) vergleichen, so finden wir eine Differenz von 0.000 287. Wenn ich bei dem Kometen 1881 III eine Variation der Excentricität von nur 0.000 200 annehme und q als konstant voraussetzt, erhalten wir folgende Werthe der Umlaufszeit:

$e =$ 0.995 754	0.995 954	0.996 154
$T =$ 2276	2446	2640,

wo also die zwei Abweichungen der Umlaufszeit mit der Annahme, der Komet 1881 III wäre der 612 Jahre vor unserer Zeitrechnung beobachtete, nicht vereinbar wären.

---

[1]) Über die Bahn des grossen Kometen 1881 III. Abh. der Kais. Leop.-Carol. deutschen Akad. der Naturforscher. Halle, 1896.

Ich habe indessen eine Rückwärtsrechnung der Störungen für diesen Kometen angefangen, und ich werde hoffentlich mit der Zeit die Frage beantworten können, ob der dritte Komet von 1881 mit dem im Jahre 612 v. Chr. beobachteten identisch sein kann, eine Frage, die meines Erachtens noch als eine offene bezeichnet werden muss.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 2.

Eine Metode den Jupitersradius zu bestimmen.

Von C. A. Schultz-Steinheil.

[Mitgeteilt den 14 September 1898 durch C. V. L. Charlier.]

Den Durchmesser eines Planets durch direkte Messungen zu bestimmen ist eine Sache, die sich als sehr schwierig erwiesen hat, da viele Umstände beitragen, eine solche Bestimmung unsicher zu machen. Umfassende teoretische so wie praktische Untersuchungen hierüber sind von Seeliger in einer Abhandlung: »Die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen» und von Hartwig in seiner Abhandlung: »Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars» ausgeführt worden. Lange war es meine Absicht, den Jupitersradius zu bestimmen gemäss einer Metode, wo die Ungelegenheiten, welche bei den direkten Messungen der Scheibe unvermeidlich sind, zum grössten Teile vermieden werden, obgleich ich nicht Gelegenheit gehabt habe, für diesen Zweck dienliche Instrumente anzuwenden. Als ich in der Mitte von Februar dieses Jahr nach Lund übersiedelte, und der Direktor der Sternwarte Prof. Charlier mir gütigst gestattete, den Refraktor zu benutzen, war es meine Hoffnung, Messungen zur Bestimmung des Jupitersradius ausführen zu können. Da es aber den ganzen Frühling nebelich war, und erst kurz vor der Mitte des Sommers heiter wurde, als Jupiter schon zu nahe am Horizonte lag, um für Beobachtung dienlich zu sein, ist diese meine Hoffnung bis

jetzt betrogen worden. Obwohl ich also noch nicht Gelegenheit gehabt habe, die Güte der Metode durch Beobachtung zu prüfen, glaube ich doch, dass es nicht ohne Interesse sein kann, die Principien der Metode in aller Kürze darzulegen.

Der Grundgedanke derselbe ist: die Rektascentions- und Deklinations-differenzen zwischen einem Satelliten und dem Schatten, welchen ein anderer Satellit auf den Jupiter wirft, zu messen. Dadurch wird ganz und gar die schwierige Einstellung des Mikrometerfadens auf dem Rande der Jupitersscheibe, was eben die Hauptursache der Unsicherheit der direkten Bestimmungen ist, vermieden. Da Sonnenfinsternisse auf dem Jupiter sehr oft vorkommende Ergebnisse sind, muss eine solche Bestimmung des Jupitersradius leicht während eines Winters ausgeführt werden können, wenn nur nicht die Witterung so beispielslos ungünstig ist, wie sie in Lund das letzte Jahr war. Da der Schatten der Satelliten bei verschiedenen Gelegenheiten auf beträchtig verschiedene Latituden fällt, wäre es nach dieser Metode vielleicht möglich, den Jupitersradius auf verschiedenen Latituden zu bestimmen, und dadurch zur Bestimmung der Form des Jupiters beizutragen.

Wir nehmen ein Koordinatensystem mit Origo im Centrum vom Jupiter, mit der xy-Ebene parallel der Ekliptik an, und lassen die x-Achse vorläufig unbestimmt.

In diesem Systeme seien

die Koordinaten der Sonne (S) . . . . X Y Z R

» » des Satelliten, dessen Schatten beobachtet wird (s) . . . . x y z r

» » eines anderen Satelliten (s_1) . . . . x_1 y_1 z_1 r_1

» » des Schattens auf dem Jupiter (σ) . ξ η ζ ϱ

m der Abstand zwischen σ und s_1

I der Winkel zwischen ϱ und r_1.

Die zu bestimmende Grösse ist also in erster Hand der Abstand vom Jupiterscentrum bis σ, und deshalb werden Rektascentions- und Deklinations-differenzen zwischen σ und s_1 gemessen.

Die Gleichung des Geraden durch S und s ist

$$\frac{p-x}{\cos\alpha}=\frac{q-y}{\cos\beta}=\frac{r-z}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo

$$\cos\alpha=\frac{X-x}{P};\ \cos\beta=\frac{Y-y}{P};\ \cos\gamma=\frac{Z-z}{P}$$

$$P^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2; \qquad P>0$$

und $p\ q\ r$ die laufenden Koordinaten sind.

Zur Bestimmung der $\xi\ \eta\ \zeta$ haben wir

$$m^2=(x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1-\zeta)^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}.$$

Daraus folgt

$$\xi=x-z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\zeta$$

$$\eta=y-z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\zeta$$

welche Werte von ξ und η in (2) eingesetzt

$$\left.\begin{aligned} m^2\cos^2\gamma=&[(x_1-x)\cos\gamma+z\cos\alpha-\zeta\cos\alpha]^2\\ &+[(y_1-y)\cos\gamma+z\cos\beta-\zeta\cos\beta]^2\\ &+[(z_1-z)\cos\gamma+z\cos\gamma-\zeta\cos\gamma]^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

geben, oder

$$m^2\cos^2\gamma=(f-\zeta\cos\alpha)^2+(g-\zeta\cos\beta)^2+(h-\zeta\cos\gamma)^2 \qquad (4)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} f&=(x_1-x)\cos\gamma+z\cos\alpha\\ g&=(y_1-y)\cos\gamma+z\cos\alpha\\ h&=(z_1-z)\cos\gamma+z\cos\gamma\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

oder, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} F^2&=f^2+g^2+h^2\\ G&=f\cos\alpha+g\cos\beta+h\cos\gamma\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

wird

$$\zeta=+G\pm\sqrt{G^2-F^2+m^2\cos^2\gamma}.$$

Die $\xi\ \eta$ und ζ werden also durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\zeta \\ \eta &= y - z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\zeta \\ \zeta &= + G \pm \sqrt{G^2 - F^2 + m^2\cos^2\gamma}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Das Zeichen in der letzten Gleichung kann folgendermassen bestimmt werden, wenn π der Abstand zwischen σ und s ist.

$$\varrho^2 = r^2 + \pi^2 - 2r\pi\cos(r\pi)$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} &\pi = r\cos(r\pi) - \sqrt{r^2\cos^2(r\pi) + \varrho^2 - r^2} \\ &\text{hier das Zeichen} - \text{weil} \\ &\qquad \pi < r\cos(r\pi) \\ &\zeta = z - \pi\cos\gamma\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8)$$

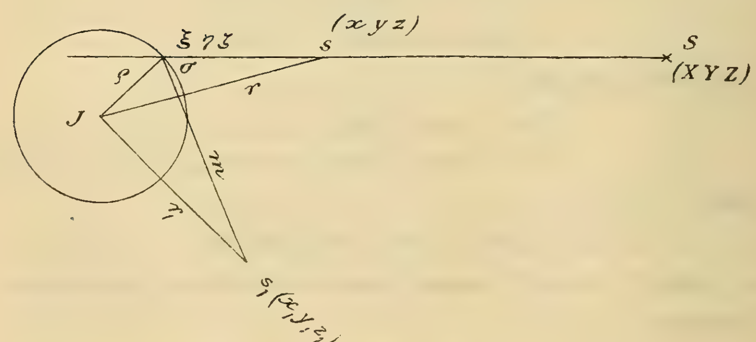
Durch (8) wird ζ bestimmt, wenn ϱ bekannt ist, was auch annähernd wahr ist. Da man also den Wert von ζ sehr nahe kennt, kann man über das Zeichen in der letzten Gleichung (7) beurtheilen.

Das System (7) giebt ξ η und ζ ohne Kenntniss von ϱ. Die dritte Gleichung (7) kann für numerische Rechnung nach den gewöhnlichen Metoden, um Gleichungen zweiten Grades zu berechnen, bequem gemacht werden.

ϱ wird durch eine der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 &= m^2 - r_1^2 + 2(\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1) \\ \varrho^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

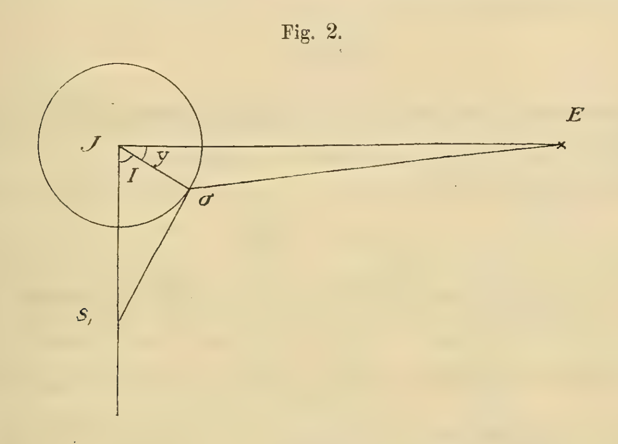
Fig. 1.



Während der Beobachtung soll s_1 so liegen dass r_1 nahe senkrecht gegen den Geraden ist, der durch J und E (Erde) geht, so dass man nicht m in Verkürzung sieht und der Beobachtungsfehler nachher vergrössert wird.

Wir haben jetzt zu untersuchen wo auf Jupiter der Schatten liegen muss, damit die Beobachtungen gute Resultate geben sollen.

Fig. 2.



Hier nehmen wir der Einfachkeit wegen an, dass s_1 J E und σ in einer Ebene liegen.

$$\wedge\ s_1JE \text{ und } s_1\sigma E \text{ aprox. } 90^\circ$$

$$\wedge\ s_1J\sigma = I \text{ und } \wedge\ \sigma JE = y\,.$$

Je grösser y ist je näher am Rande liegt der Schatten und, da $\wedge\ JE\sigma$ immer sehr klein ist so, liegt der Schatten am Rande der Jupitersscheibe von der Erde gesehen, wenn $y = 90^\circ$. Da σ gut beobachtet werden kann auch sehr nahe am Rande (was ich gefunden habe) müssen die Beobachtungen angefangen werden können, wenigstens wenn $y = 60^\circ$ d. h. $I = 30^\circ$.

Fig. 1. giebt

$$m^2 = \varrho^2 + r_1^2 - 2r_1\varrho \cos I$$

also

$$d\varrho = \frac{\varrho \cos I - r_1}{\varrho - r_1 \cos I}\, dr_1$$

oder wenn wir setzen

$$r_1 = a \cdot \varrho \qquad\qquad a > 1$$

$$d\varrho = \frac{\cos I - a}{1 - a \cos I} dr_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

welche Gleichung die Änderung von ϱ mit r_1 giebt

1:o) $I = 0$.

Wir bekommen dann

$$d\varrho = dr_1$$

ein Fehler in r_1 bewirkt also einen gleichgrossen Fehler in ϱ.

2:o) $I = 90°$

die Gleichung (10) giebt

$$d\varrho = - a dr_1$$

d. h. ein Fehler in r_1 bewirkt einen a Mal so grossen Fehler in ϱ.

Für $\cos I = \frac{1}{a}$ wird $\frac{\cos I - a}{1 - a \cos I} = \infty$ welches, wenn a nicht zu klein angenommen wird, in der Nähe von $I = 90°$ eintrifft.

Die Beobachtungen um ϱ zu bestimmen müssen also ausgeführt werden, wenn der Schatten nicht zu weit vom Rande liegt, und da der Schatten auch in der Nähe vom Rande ganz scharf ist, so kann dies nicht für die Güte der Beobachtung nachteilig sein. Wenn I nahe 90° ist, sehen wir, dass ein Fehler in ϱ einen viel kleineren Fehler in r_1 bewirkt, also geben Beobachtungen in der Nähe von der Mitte der Scheibe eine gute Bestimmung von r_1.

Um zu untersuchen, wie Fehler in m und ϱ auf einander einwirken, schreiben wir

$$d\varrho = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos I}}{1 - a \cos I} dm$$

für $I = 0°$ $d\varrho = dm$; für $I = 60°$ (und $a = 25$) $d\varrho = - 2dm$ approx. Wenn $\cos I = \frac{1}{a}$ liegt der Schatten nahe an der Mitte der Scheibe.

Zwischen den Änderungen von r_1 und m besteht folgende Relation

$$dr_1 = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos I}}{a - \cos I} dm ,$$

welche giebt wenn $I = 90°$

$$dr_1 = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} dm .$$

Beobachtungsfehler werden also sowohl bei Bestimmung von ϱ wie von r_1 vergrössert, aber nicht in hohem Grade. Da die Beobachtungen in Rektascention so wie in Deklination mit Fadenmikrometer ausgeführt werden können, werden aber die Beobachtungsfehler klein und daher auch der Fehler des Resultats klein. Für diese Bestimmung ist es nicht Vortheilhaft σs statt m zu messen, weil besonders in der Nähe von der Opposition $\wedge\, E\sigma s$ sehr klein ist, und daher die Beobachtungsfehler sehr viel vergrössert werden.

Um ξ η und ζ zu bestimmen kann man auch, vielleicht besser, folgendes System, welches viel einfacher ist, anwenden

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \pi \cos \alpha \\ \eta &= y - \pi \cos \beta \\ \zeta &= z - \pi \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (11)$$

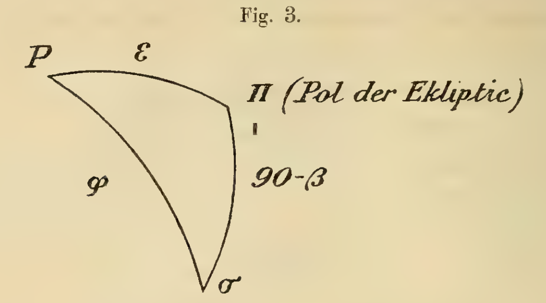
wo π nach (8) durch successive Annäherungen bestimmt wird.

Nachdem ein ϱ_φ (Colatitud φ) bestimmt ist, muss man daraus ϱ_0 (Äquatorsradius) bestimmen. Wenn wir die x-Achse des Koordinatsystemes im aufsteigenden Knoten vom Jupitersäquator auf die xy-Ebene legen, haben wir:

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= \varrho \cos \beta \sin \lambda \\ \zeta &= \varrho \sin \beta . \end{aligned}$$

Wenn wir weiter mit φ den Abstand vom Jupiters Pol (P) bis zum Schatten (σ) bezeichnen, so ergiebt sich

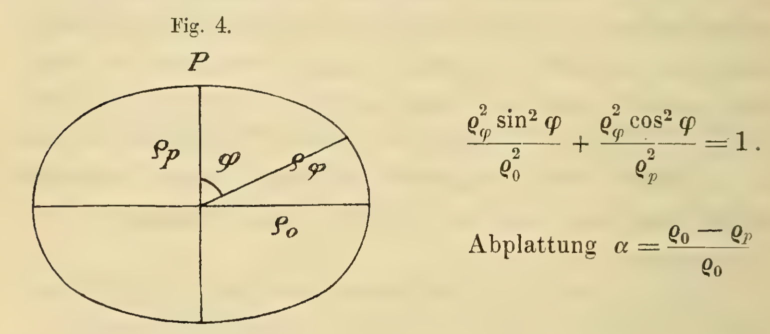
Fig. 3.



$$\cos \varphi = \cos \varepsilon \sin \beta - \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda$$

aus welcher Gleichung φ bestimmt wird.

Fig. 4.



$$\frac{\varrho_\varphi^2 \sin^2 \varphi}{\varrho_0^2} + \frac{\varrho_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{\varrho_p^2} = 1 .$$

$$\text{Abplattung} \quad \alpha = \frac{\varrho_0 - \varrho_p}{\varrho_0}$$

also

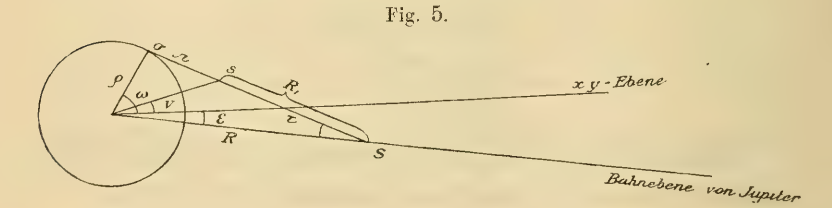
$$\frac{\sin^2 \varphi}{\varrho_0^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho_0^2 (1-\alpha)^2} = \frac{1}{\varrho_\varphi^2}$$

$$\because \varrho_0 = \varrho_\varphi \cdot \frac{\sqrt{1 - \alpha(2-\alpha) \sin^2 \varphi}}{1-\alpha} .$$

Hier ist angenommen, dass der Jupiter ein Rotationsellipsoid ist.

Wir haben noch den grössten Abstand vom Jupitersekvator, wo ein Schatten fallen kann, zu bestimmen.

Fig. 5.



$$\frac{\sin \tau}{\sin (v + \varepsilon)} = \frac{r}{R_1}; \quad \frac{\varrho}{R_1 + \pi} = \frac{\sin \tau}{\sin (\omega + \varepsilon)}$$

$$\therefore \sin (\omega + \varepsilon) = \frac{R_1 + \pi}{\varrho} \cdot \frac{r}{R_1} \cdot \sin (v + \varepsilon)$$

$$\therefore \sin (\omega + \varepsilon) = \frac{r}{\varrho} \left(1 + \frac{\pi}{R_1}\right) \sin (v + \varepsilon)$$

oder annähernd

$$\sin (\omega + \varepsilon) = \frac{r}{\varrho} \sin (v + \varepsilon) .$$

Für die verschiedenen Satelliten bekommt man hieraus die gesuchten grössten Abstände approx.

	I.	II.	III.	IV.
$\omega - v =$	16°	26°	44°	90°.

Natürlich können aber Beobachtungen bei diesen Grenzlagen des Schattens nicht mit gutem Erfolge ausgeführt werden, da der Schatten dann so schief fällt, dass er nicht gut definiirt sein kann. Wir sehen doch, dass Beobachtungen auf beträchtig verschiedene Latituden ausgeführt werden können.

Da die x-Achse unseres Koordinatensystemes nicht durch den Frühlingspunkt geht, müssen die Koordinaten, die angewandt werden, zuerst auf unseres System reduzirt werden.

Wir wollen noch den Einfluss eines Fehlers in I auf die Bestimmung von ϱ untersuchen und gehen von der Gleichung

$$\varrho^2 = m^2 - r_1^2 + 2\varrho r_1 \cos I$$

aus, also

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{r_1 \cos I}{\varrho - r_1 \cos I} \cdot \frac{d \cos I}{\cos I}$$

setzen wir z. B.

$$r_1 = 24\varrho ; \; \cos I = 30° ; \; dI = 10' ; \; \varrho = 40''$$

wird

$$d\varrho = 0'',071 .$$

Wir sehen also, dass auch mit recht grossen Fehlern in I man gute Werte von ϱ bekommen kann. Ein Fehler in der

Longitude des Satellitens hat dagegen eine grosse Einwirkung auf I; sollte diese Kvantitet nicht genügend genau bestimmt werden können, kann man folgendermassen verfahren. Wenn der Schatten auf der Mitte der Scheibe fällt, kann man I gleichzeitig mit r_1 bestimmen und mit diesem Werte von I, kann man für naheliegende Zeiten die Werte von I durch Extrapolation verbessern.

Wir haben noch zu zeigen wie man m aus den Beobachtungen erhält. Wir nehmen an, dass die Beobachtungen wegen Refraktion etc. korrigirt sind und nennen die so reduzirten Beobachtungen $d\alpha$ und $d\delta$.

$$(d\alpha \cos \delta)^2 + (d\delta)^2 = \omega^2$$

wo ω der Winkel ist, unter welchem m von Centrum der Erde aus gesehen wird.

$$d\alpha \cos \delta \sqrt{1 + \left(\frac{d\delta}{d\alpha \cdot \cos \delta}\right)^2} = \omega$$

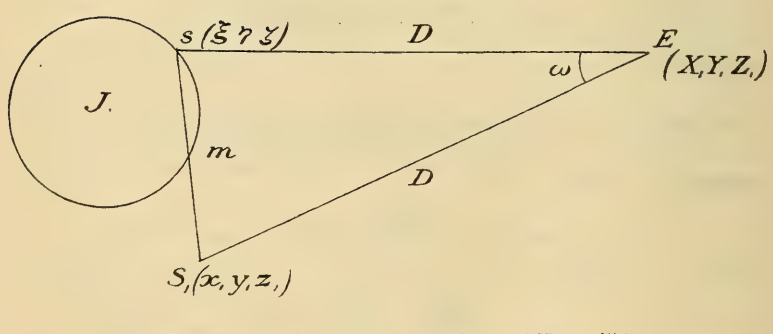
oder

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{\cos p} = \omega \quad \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

wo

$$\frac{d\delta}{d\alpha \cos \delta} = \operatorname{tg} p$$

Fig. 6.



$$D^2 = (X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2 + (Z_1 - \zeta)^2$$
$$D_1^2 = (X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 + (Z_1 - z_1)^2$$

$$m^2 = D^2 + D_1^2 - 2DD_1 \cos\omega$$

$$\therefore m^2 = (D - D_1)^2 + 4DD_1 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

$$\therefore m = \frac{D - D_1}{\cos q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

wo

$$\operatorname{tg}^2 q = \frac{4DD_1}{(D - D_1)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

da $\xi\eta\zeta$ aus m berechnet werden und D aus $\xi\eta\zeta$, müssen wir als erste Annäherung

$$m = 2D_1 \sin \tfrac{1}{2}\omega$$

oder

$$m = D_1 \omega \sin 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

setzen, was möglich ist, da die Beobachtungen ausgeführt werden sollen, wenn σE nahe senkrecht zu σs_1 ist.

Da ich noch keine Beobachtungen habe um ϱ zu bestimmen, habe ich es nicht angemessen gefunden in Detail alle Formeln anzugeben die für die Reduktionen nötig sind; hoffe aber später, wenn Beobachtungsmaterial vorhanden ist, Gelegenheit zu haben, näheres darüber zu erörtern.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 404.)

Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Bollettino delle sedute. Fasc. 52 (1898). 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 6 (1898): N:o 7—8. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Jahrbuch. Jahrg. 13 (1895): Abth. 3; 14 (1896): 1—2. 4:o.
Vorläufige Mitteilung der Beobachtungs-Ergebnisse von 12 Stationen 2. Ordn. in Sachsen. 1897: 10. Fol.

Chicago. *Newberry library.*
Report of the trustees. Years 1896—1897. 8:o.
— *Field Columbian museum.*
Publications 23, 26—27. 1898. 8:o.

Dresden. *K. Zoolog. und Anthropolog.-Ethnogr. Museum.*
Catalog der Handbibliothek. 1898. 8:o.
— *K. Sächsisches statistisches Bureau.*
Zeitschrift. Jahrg. 44 (1898): H. 1—2 & Beilage. 4:o.
Kalender und statistisches Jahrbuch für das Königreich Sachsen. Jahr 1899. 8:o.

Dublin. *R. Irish academy.*
Proceedings. (3) Vol. 4: N:o 5. 1898. 8:o.
List of the members. 1898. 8:o.

Edinburgh. *Royal society.*
Transactions. Vol. 38: P. 3—4 (1895/96); 39: 1 (1896/97). 4:o.
Proceedings. Vol. 21 (1895/96—1896/97). 8:o.
— *Scottish meteorological society.*
Journal. (3) N:o 13—14. 1895—96. 8:o.

Emden. *Naturforschende Gesellschaft.*
Jahresbericht. 82 (1896/97). 8:o.

Erfurt. *K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften.*
Jahrbücher. N. F. H. 24. 1898. 8:o.

Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 24: H. 2. 1898. 4:o.
Katalog der Reptilien-Sammlung im Museum der Gesellschaft. T. 2. 1898. 8:o.

Genève. *Observatoire.*
Rapport sur le concours de réglage de chronomètres. Année 1897. 8:o.

Genova. *Museo civico di storia naturale.*
Annali. (2) Vol. 18 (1897/98). 8:o.

Greenwich. *R. observatory.*
Astronomical results. 1895. 4:o.
Introduction to Greenwich astronomical observations. 1895. 4:o.
Magnetical and meteorological observations. 1895. 4:o.
Spectroscopic and photographic results. 1895. 4:o.
Report of the astronomer royal to the board of visitors. 1897/98. 4:o.

(Forts. å sid. 456.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 7.
Stockholm.

Värmlands land- och sötvattensmollusker

Af Conrad Fristedt.

[Meddeladt den 14 September 1898 genom Hj. Théel].

Då jag af vårt lands förnämsta malakolog, doktor C. A. Westerlund, för något år sedan erhöll kännedom om, att Värmland var så godt som alldeles okändt i malakologiskt hänseende, började jag egna mig åt studiet af land- och sötvattensmolluskerna inom sagda provins.

Redan från första början kröntes min forskning med framgång, och det antal arter, jag under första sommaren lyckades hopsamla, utgjorde omkring 40 stycken. Tack vare detta jämförelsevis lyckliga resultat har jag sedermera hvarje sommar fortsatt mina undersökningar och samlat material till föreliggande förteckning af värmländska mollusker.

De trakter af provinsen, som blifvit noggrannast undersökta, äro Karlstad och dess omgifningar, men ingen del, icke en gång den mest aflägsna, har helt och hållet blifvit lämnad åsido, och genom ett reseunderstöd från Kongl. Vetenskapsakademien har jag blifvit satt i tillfälle att denna sommar genomforska provinsens östra del upptill Lesjöfors. Insamlingen af materialet till detta arbete är till större delen gjord af mig själf, men jag har därjämte haft stor nytta af flere elever vid härvarande högre allmänna läroverk, hvilka jag lyckats intressera för saken.

Då dessa under sommarferierna varit spridda öfver hela provinsen, hafva de naturligen i väsentlig mån kunnat bidraga till fullständigandet af denna förteckning.

Såsom jag förut nämnt, erhöll jag redan första sommaren omkring ett 40-tal arter, hvilket antal sedermera ökats till omkring 60 stycken. Detta är ju visserligen icke mycket i jämförelse med hvad andra provinser kunna framvisa i denna väg, men dock ett ganska vackert antal för en provins sådan som Värmland, som ju är fattig på kalkgrund och löfskog, de viktigaste faktorerna för en rikhaltig molluskfauna. Älfvarna i provinsen hafva därjämte i regel särdeles kallt vatten, och detta är ingalunda egnadt att göra dem till omtyckta uppehållsorter för mollusker.

Såväl Klarälfven som isynnerhet Norsälfven äro också ovanligt fattiga på representanter af hithörande djurgrupp. Värmland med sin myckna barrskog, sina med al bevuxna sjö- och flodstränder, sina höjder och kala bergsträckor är icke något lockande fält för malakologen. Där trädgårdar och parkanläggningar finnas, äro naturligen dessa de bästa fyndorter.

En lokal, som tack vare sin jämförelsevis rika löfvegetation står ganska högt i malakologiskt hänseende, är det 520 m. höga Ränneberget, beläget en mil från Östmarks kyrka.

Tyvärr var den tid jag hade att egna åt undersökningen af detta berg allt för liten. Bland andra arter, jag där erhöll, är Clausilia laminata, som icke blifvit funnen på något annat ställe inom provinsen. Pupa alpestris erhölls äfven sparsamt på samma lokal.

Bland särskildt anmärkningsvärda former, som blifvit funna, äro en för vetenskapen ny art (Anodonta anura[1]), en för Sverige ny art (Anodonta tremula Drouët) samt en för Sverige ny varietet (Unio tumidus var. borysthenicus Kob.).

Nya för Värmland äro på grund af förut anförda skäl nästan alla.

---

[1]) beskrifven efter af mig tagna exemplar af dr Westerlund i Synopsis molluscorum extramarinorum Scandinaviæ p. 197.

Vid insamlandet af mollusker har jag funnit, att de största och bästa fynden göras under gamla trästycken, brädlappar och halfmultnade grenar, som legat någon längre tid på samma ställe, hälst på en gräsmatta eller en löfhög. I skog- och hagmark har jag erhållit mitt största byte i grästufvor. Genom att försiktigt vika isär gräset upptäcker man de små snäckorna lätt, vanligen just där gräset skjuter upp ur jorden. Löfhögar, hvarhälst de än finnas, böra noga undersökas, emedan de äro kära tillhåll för mollusker.

Hvad vattenmolluskerna beträffar, så erhållas dessa rikligast vid stränderna samt på i vattnet växande örter, såsom under potamogeton-, nuphar- och nymphæablad. Större musslor skola eftersökas på bottnen af floder och sjöar såväl i dyn som bland stenar och sand.

Granska vi närmare utbredningen af Värmlands land- och sötvattensmollusker, finna vi, att bland de förra Cochlicopa lubrica och Hyalinia nitida knappast saknas på något ställe, där mollusker finnas. De kunna sålunda sägas vara Värmlands allmännaste landmollusker. Ganska allmänna äro också Hyalinia hammonis, H. fulva, Vitrina pellucida, Helix ruderata och H. arbustorum. Bland sötvattenssnäckorna förekomma Limnæa ovata, L. palustris, L. stagnalis och L. auricularia samt Planorbis umbilicatus och Pl. limophilus i snart sagdt hvarje för dessa släkten lämplig vattensamling.

Af musslor äro Unio tumidus, Anodonta anatina, Pisidium amnicum, P. nitidum och Sphærium corneum de allmännaste.

Bland skallösa mollusker är Limax maximus ytterst allmän; äfven Arion ater är ingalunda sällsynt.

Vid bestämmandet af det hopsamlade materialet har jag hufvudsakligen följt doktor C. A. WESTERLUNDS »Sveriges, Norges och Danmarks land- och sötvattensmollusker.» Därjämte har jag haft stor nytta af en af doktor WESTERLUND bestämd och i härvarande museum befintlig typsamling af svenska land- och sötvattensmollusker.

För all den uppmuntran och hjälp, jag under mitt arbete fått röna från doktor C. A. WESTERLUND, är det mig en kär pligt att här framföra mitt varma tack.

Klass 1. **Mollusca Gastropoda.**

Fam. **Limacidæ.**

Limax LIN.

Limax agrestis LIN.

Förekommer ytterst allmänt allestädes inom provinsen.

Arion FER.

Arion ater LIN.

Tämligen allmän här och hvar, särskildt i provinsens mellersta och sydliga delar.

Fam. **Helicidæ.**

Vitrina DRAP.

Vitrina pellucida MÜLL.

Denna genom sitt ytterst tunna, stundom nästan hinnaktiga, ljusa skal lätt igenkännliga snäcka tyckes trifvas bäst på fuktiga, skuggrika ställen. I trakten kring Arvika och i Nors socken (Trossnäs) är den synnerligen allmän. Ej fullt så vanlig omkring Karlstad och norrut kring Frykensjöarna. På Ränneberget i Östmarks socken erhöll jag flera exemplar. Exemplar från Höglunda i Nors socken hafva en svagt ljusgul färgton.

Hyalinia (FER.) AGASS.

Hyalinia fulva MÜLL.

Förekommer allmänt, ehuru ej särdeles individrikt, på flera ställen såväl i norr som söder. Är tämligen allmän ända upp i Hvitsands för öfrigt på snäckor fattiga socken.

Hyalinia hammonis STRÖM.

Allmän, utom i provinsens nordligaste delar, såväl under brädlappar och i löfhögar som bland mossa och i grästufvor i skogig mark.

Hyalinia nitida MÜLL.

Ungefär samma utbredning som H. hammonis; liknar något denna art, från hvilken den dock skiljes genom sin storlek (Br. 6 mm.).

Hyalinia petronella CH.

Förekommer mindre allmänt emellan Nors- och Klar-älfvarna. Från norra Värmland (Hvitsand) äro endast ett fåtal exemplar erhållna. Påminner något om Vitrina pellucida, men skiljes dock lätt från denna genom sitt fastare, något grönaktiga skal.

Helix LIN.

Helix pygmæa DRAP.

Af denna utan tvekan minsta af värmländska mollusker föreligga endast exemplar från Trossnäs, Nors socken, där den förekommer temligen allmänt. Antagligen torde den dock förekomma på andra ställen, fastän den genom sin litenhet undgått samlarnes uppmärksamhet. Allmän är den väl knappast någonstädes inom provinsen.

Helix ruderata STAD.

Förekommer allmänt i Frykendalen ända upp till Östmarks socken; temligen allmänt i provinsens sydvestra del, då den däremot tyckes vara sällsynt i trakten omkring Charlottenberg och Rottnaälfvens dalbädd.

Helix pulchella MÜLL.

Denna lilla vackra snäcka, som lätteligen igenkännes på sitt hvita skal och sin tillbakavikna, förtjockade munsöm, förekommer temligen allmänt i provinsens sydligare delar (Nors socken, Karlstad, Kristinehamn, Arvika); från norra delarna saknas exemplar af densamma helt och hållet.

Helix hispida LIN.

Mindre allmän i trakten omkring Karlstad.

Helix arbustorum LIN.

Förekommer temligen allmänt inom hela provinsen. Forma *picea* Z. särskildt allmän i Nors socken.

Helix hortensis MÜLL.

Mindre allmän än föregående. Exemplar af densamma föreligga från Karlstad, Gillberga, Värmlandsnäs och Sillerud, sålunda provinsens sydvestliga del.

Cochlicopa (FER.) RISSO.

Cochlicopa rubrica MÜLL.

Allmän öfver hela provinsen.

Pupa DRAP.

Pupa pygmæa DRAP.

Temligen allmän vid Trossnäs i Nor. Forma *athesina* GREDL förekommer mera sparsamt tillsammans med hufvudarten.

Pupa antivertigo DRAP.

Sällsynt i Stadsträdgården i Karlstad.

Pupa lilljeborgi WEST.

Sällsynt i parken vid Trossnäs, Nor.

Pupa alpestris ALD.

Förekommer tämligen allmänt i Hvitsand, något sparsammare på Ränneberget.

Pupa substriata JEFFR.

Sällsynt vid Trossnäs, Nor.

Pupa muscorum MÜLL.

Sällsynt vid Persberg.

Pupa edentula DRAP.

Sparsamt vid Ransäter.

Clausilia DRAP.

Clausilia laminata MONT.

Af denna stora Clausilia-art förefinnas i min samling af Värmländska mollusker blott tvenne exemplar, båda från Ränneberget.

Clausilia plicatula DRAP.

Sällsynt i Mellanfrykens dalsänkning.

Clausilia bidentata STRÖM.

Denna är tydligen den vanligaste af alla arterna, men kan dock ingalunda sägas vara allmän på något ställe inom provinsen. Allestädes, där jag funnit den, nedifrån Karlstad upp till Ränneberget, har det varit i ett fåtal exemplar. Från vestra och östra Värmland saknas den helt och hållet.

Fam. **Succinidæ.**

Succinea DRAP.

Succinea putris LIN.

Förekommer ganska allmänt i mellersta och södra Värmland, synnerligast dess sydvestliga del.

Succinea oblonga DRAP.

Temligen sparsamt på Frykens stränder vid Sunne.

Fam. **Limnæidæ.**

Limnæa LAM.

Limnæa stagnalis LIN.

Allmän öfver hela provinsen.

Limnæa auricularia LIN.

Allmän i Venern och, egendomligt nog, Norsälfven.

Limnæa ovata DRAP.

Allmän, isynnerhet mellan Norsälfven och Glafsfjorden.

Limnæa peregra MÜLL.

Förekommer mycket allmänt i Grafva socken såväl i Hynsjön som i andra, mindre vattendrag.

Limnæa palustris MÜLL.

Temligen allmän öfver hela provinsen.

Amphipeplea NILSS.

Amphipeplea glutinosa LIN.

Förekommer tämligen allmänt i trakten kring Karlstad. Enligt uppgift af C. A. WESTERLUND äfven i Forsviks å.

Physa Drap.

Physa fontinalis Lin.

Allmän i Karlstad och kringliggande trakt.

Planorbis Guett.

Planorbis umbilicatus Müll.

Allmän här och hvar, synnerligast omkring Karlstad och Kristinehamn.

Planorbis carinatus Müll.

Sällsynt i smärre dammar vid Karlstad.

Planorbis limophilus West.

Ungefär samma utbredning som Pl. umbilicatus.

Planorbis concimus West.

Temligen allmän i trakten kring Karlstad tillsammans med Pl. umbilicatus och limophilus.

Planorbis albus Müll.

Värmland enligt C. A. Westerlund.

Planorbis contortus Lin.

Sparsamt i trakten kring Karlstad.

Fam. **Valvatidæ.**

Valvata Müll.

Valvata cristata Müll.

Värmland enligt C. A. Westerlund.

Klass 2. **Mollusca Conchifera.**

Fam. **Sphæriidæ.**

Sphærium Scop.

Sphærium corneum Lin.

Allmän i södra delen af provinsen.

Sphærium brochonianum Bgt. Var. *steini* Schm.

Temligen allmän vid Karlstad.

Pisidium C. PFR.

Pisidium amnicum MÜLL.

Ganska allmän vid Venerns stränder och i Klarälfven.

Pisidium amnicum MÜLL. var. *elongatum* BAUD.

Förekomst densamma som hufvudformen, ehuru icke fullt så allmän.

Pisidium pusillum JEN.

Sparsamt i Östmarks socken mellan Fryken och Rottnedalen.

Pisidium nitidum JEN.

Allmän i trakten kring Karlstad.

Fam. **Unionidæ**

Unio RETZ.

Unio tumidus RETZ.

Allmän i Karlstadstrakten.

Unio tumidus RETZ. var. *Borysthenicus* (SERV.).

Förekommer tillsammans med hufvudarten.

Unio pictorum LIN.

Värmland enligt C. A. WESTERLUND.

Anodonta CUV.

Anodonta anatina LIN.

Allmän i Karlstadstrakten.

Anodonta anserirostris KÜST.

Temligen allmän i östra Värmland.

Anodonta lacuum BGT.

Utbredning densamma som *A. anatina*.

Anodonta tremula DRT.

Utbredning som föregående.

Anodonta anura WEST.

Förekommer ganska talrikt i hamnkanalen vid Karlstad.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 446.)

Güstrow. *Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg.*
Archiv. Jahr 51 (1897); 52 (1898): Abth. 1. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Kl. N. F. Bd 1: N:o 2. 1898. 4:o.
Nachrichten. » » 1898: H. 1. 8:o.
» Geschäftliche Mittheilungen 1898: H. 1. 8:o.
— *K. Sternwarte.*
Astronomische Mittheilungen. Th. 5. 1898. 4:o.
Halle. *K. Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher.*
Nova acta. T. 68—69. 1897—98. 4:o.
Leopoldina. H. 33 (1897). 4:o.
Katalog der Bibliothek. Lief. 8. 1897. 8:o.
— *Naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd. 21: H. 1—3. 1898. 8:o.
Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Jahrg. 20 (1897). 4:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. (2) T. 2: Livr. 1. 1898. 8:o.
— *Koloniaal Museum.*
Bulletin. 1898: 5—6. 8:o.
Helsingfors. *Universitets-Biblioteket.*
Akademiskt tryck. 18 st. 1897/98. 8:o & 4:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. 21: 3. 1898. 4:o.
— *Finlands geologiska undersökning.*
Kartbladen N:o 32—33 med beskrifningar. 1896—1898. Fol. & 8:o.
— *Finska vetenskaps-societeten.*
Acta. T. 22—23. 1897. 4:o.
Öfversigt af förhandlingar. 39 (1896/97). 8:o.
— *Institut météorologique central.*
Observations météorologiques faites à Helsingfors. Vol. 6—8 (1887—89): Livr. 1. Fol.
Karlsruhe. *Technische Hochschule.*
Schriften. 4 st. 1897/98. 8:o.
— *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1897. 4:o.
Kassel. *Verein für Naturkunde.*
Abhandlungen und Bericht. 43 (1897/98). 8:o.
Kazan. *Kejserl. universitetet.*
Učenyja zapiski. G. 64 (1897): Kn. 10—12; 65 (1898): 1—3. 8:o.
Dissertationer. 2 st. 1897. 8:o.
— *Observatoire astronomique de l'univ. Imp.*
Trydy astronomičeskoj. N:o 8. 1897. 4:o.

(Forts. å sid. 463.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 7.
Stockholm.

List of Reptiles and Batrachians

collected by the Swedish Expedition to Tierra del Fuego 1895—1896 under direction of Dr. OTTO NORDENSKIÖLD.

By LARS GABRIEL ANDERSSON.

[Communicated 1898 September 14 by F. A. SMITT.]

On the request of Professor F. A. SMITT I have examined the Reptiles and Batrachians collected by the Swedish Expedition to Tierra del Fuego 1895—1896. The collection, which embraces 2 species of snakes, 8 species of lizards, 1 species of batrachians, and two tadpoles, is preserved at present in the Royal Museum in Stockholm. Most specimens are collected on the east coast of Patagonia. Two species of lizards and the tadpoles are from Tierra del Fuego.

All of these are species previously known, except one of the snakes, which I consider to be a new species.

Snakes.

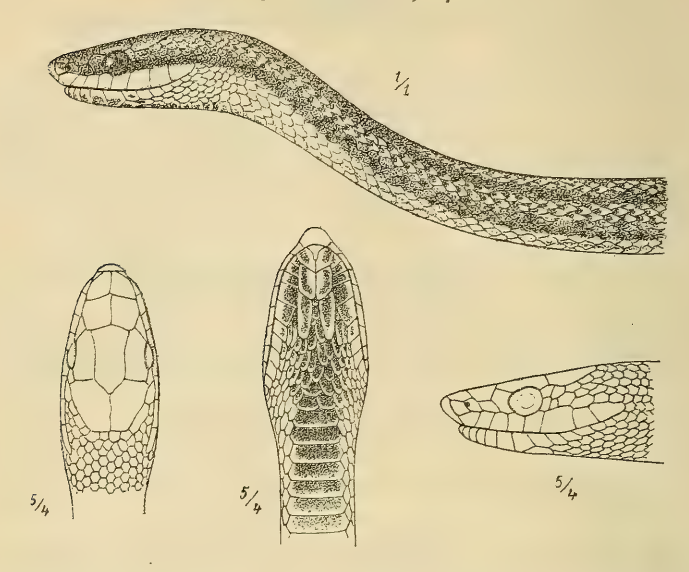
Thamnodynastes Nattereri (MIKAN) GÜNTHER.

(BOULENGER, Cat. of Snakes III, p. 116. 1896.)

One specimen from Puerto Madryn, Patagonia, $^{10}/_{11}$ 1895, in sandy places.

Total length 525 mm. Tail 125 mm. Sc. 19. V. 144. A. $\frac{1}{1}$. C. 68.

Philodryas arenarius, sp. nov.



Maxillary teeth 12. 10 anterior, equal, solid, separated by a very distinct interspace from two posterior, larger, and closely set. The latter are provided with a very shallow groove. Mandibular teeth 13, gradually decreasing in size. Head slightly distinct from neck. Eye moderate, half the length of the snout, with round pupil. A fairly distinct canthus rostralis. Rostral as deep as broad, well visible from above. Internasals a little broader than long, shorter than the præfontals. Frontal long, nearly twice as long as broad, longer than its distance from the tip of the snout and longer than the parietals. Two nasals. Loreal longer than deep. One præocular, not reaching the frontal. Two postoculars. 8 upper labials, 4th and 5th entering the eye. Temporals are 2 + 2 or 2 + 3. 13 lower labials, 4—5 in contact with the anterior chin-shields, which are shorter than the posterior. The latter are separated from each other by small scales.

The body is elongate, cylindrical. Scales smooth, with single apical pits, in 23 rows. Ventral shields 207; anal entire; caudal shields in two rows, 113. Tail long, more than 1/4 of the total length, the end of the tail pointed.

Brown above. Upper surface of head with dark, indistinct markings, upper labials and rostral yellowish white, with a dark upper border. The chin white, with blackish grey spots. A light streak on each side of the back, consisting of two rows partly white scales, runs from the temples to the beginning of the tail, where they dissapear. Two other similar but more distinct streaks run lower down on the sides of the body from the white sides of the neck to the end of the tail. The ventral shields yellowish white, with darker markings. On the throat the dark colour becomes more distinct and nearly black.

Although this snake on the whole completely agrees with the genus Philodryas, I refer it, however, with doubt to this genus on the ground of the structure of the poison-teeth. In all the species of the genus Philodryas, examined by me, I found these teeth provided with very deep and distinct grooves, but in this specimen the grooves are very much shallow and slightly distinct. It is possible, however, that it may be only an individual variation.

This snake differs from the description of *Philodryas Burmeisteri* (JAN) in BOULENGER's Catalogue of Snakes, from which form it possibly might be found not to be specifically distinct, by *shorter loreal*, *shorter internasals*, *and shorter tail*, beside which the maxillary teeth are fewer.

One specimen from Puerto Madryn, Patagonia, $^{10}/_{11}$ 1895. It lives in sandy places and is according to statement on the label by no means rare. It has but lately swallowed a lizard.

Total length 800 mm. Tail 220 mm. Sc. 23. V. 207. A. 1. C. 113.

Lizards.

Homonota Darwini BOULENGER.

(BOULENGER, Cat. of Liz. I, p. 21. 1885.)

4 specimens from Puerto Madryn, Patagonia, $^{6}/_{11}$ 1885.

According to statement on the label this lizard lives in sandy places and was generally found under boards, stones, or

like that. It was said to be rather common near Puerto Madryn.

Liosaurus Belli GRAY.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 124. 1885.)

One specimen from Puerto Madryn, Patagonia, 6/11 1895, where it was not uncommon in sandy places.

Diplolæmus Darwini GRAY.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 126. 1885.)

There are three specimens of this lizard in the collection.

1. Cerro Toro, South Patagonia, 25/12 1896.
2. Santa Cruz, Patagonia, 14/11 1895, in sandy places.
3. Santa Cruz, Patagonia, presented by a swedish sea-captain.

These three specimens vary considerably in colour, N:o 1 and 3 are large specimens, 95 and 105 mm. from the tip of the snout to the vent. In N:o 1 the black cross bands are very broad and festooned, in N:o 3 they are narrow and nearly of the same width; in N:o 1 the upper surface of the head has large and dark markings, in N:o 3 some small dark spots only. N:o 1 agrees most with *Diplolœmus Darwini* BELL, described in »The Zoology of the voyage of H. M. S. BEAGLE», p. 20, Vol. III, London 1842, plate X. N:o 3 agrees with *Diplolœmus Bibroni* BELL, in the same work, p. 21, plate XI. In the specimen N:o 2, which is a small one, 49 mm. between the tip of the snout and the vent, the cross bands are broken up on the back and appear as two rows falciform dark spots with the concave hinder margin edged with yellowish white. The head without dark markings.

Liolæmus Gravenhorsti GRAY.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 142. 1885.)

One small specimen (24 mm. between the tip of the snout and the vent) from Rio Grande, Tierra del Fuego, February 1896.

Liolæmus Bibroni GRAY.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 146. 1885.)

One large specimen (85 mm. between the tip of the snout and the vent). Patagonia.

Liolæmus magellanicus (HOMBR. & JACQ.) BOUL.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 148. 1885.)

There are 6 specimens in the collection.

3 specimens from Rio Grande, Tierra del Fuego, January 1896.

2 specimens from Coyle, Patagonia.

1 specimen from Puerto Gallegos, Patagonia, $^{16}/_{11}$ 1895. Sandy places.

Liolæmus lineomaculatus BOUL.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 149.)

1 specimen from Puerto Gallegos, Patagonia, $^{16}/_{11}$ 1895. Sandy places.

1 specimen from Santa Cruz, Patagonia, presented by a swedish sea-captain.

Liolæmus Fitzingeri GRAY.

(BOULENGER, Cat. of Liz. II, p. 150. 1885.)

4 specimens from Puerto Madryn, $^{6}/_{11}$ 1895, rather common in sandy places.

Batrachians.

Paludicola bufonia (GÜNTHER).

(BOULENGER, Cat. of Batrachia Salientia, p. 320. 1882.)

Two specimens from Chubut river, Patagonia, 11/11 1895. The specimens differ from the descriptions by smaller lumbal glands, which hardly are of the length of the head.

In the collection there are, moreover, two tadpoles from Isthmus Bay, Tierra del Fuego 29/3 1896. They are 45 mm. in length, the tail included. On the margin of the upper lip there is a fold with horny teeth and a pair of such ones behind it; on the under lip we find a pair of such folds nearest the opening of the mouth and outside these two single ones.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 456.)

Kharkow. *Université Impériale.*
Annales. 1898: Kn. 2-3. 8:o.
KUL, P. JU., Provincialnyja sobranija y rimljan. 1898. 8:o.
Kiew. *Société des naturalistes.*
Mémoires. T. 14: Livr. 2; 15: 1–2. 1896—98. 8:o.
Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. Hist. og filos. Afd. (6) T. 4: N:o 4. 1898. 4:o.
» Naturvid. og math. Afd. (6) T. 8: N:o 6. 1898. 4:o.
Oversigt over Forhandlinger. 1898: N:o 2–3. 8:o.
— *Carlsberg Laboratoriet.*
Meddelelser. Bd. 4: H. 3. 1898. 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. Année 1898: 4—5. 8:o.
Kremsmünster. *Sternwarte.*
WENZEL, P. G., Klimatologie von Oberösterreich. Linz 1898. 8:o.
SCHWAB, P. F., P. A. E. von Raitenau 1605—1675. Ein Lebensbild. Salzburg 1898. 8:o.
Kristiania. *Universitets-Bibliotheket.*
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 19 (1897): H. 3–4; 20 (1898): 1–2. 8:o.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd 36: H. 1–4. 1897/98. 8:o.
Småskrifter 5 st. 1897. 8:o.
— *Norwegisches meteorologisches Institut.*
Jahrbuch 1896—1897. 4:o.
— *Videnskabs-Selskabet.*
Skrifter. 1: Math.-naturv. Kl. 1897: N:o 1—11. 8:o.
Forhandlinger. Aar 1897. 8:o.
Königsberg. *Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*
Schriften. Jahrg. 38 (1897). 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 34: N:o 127–128. 1898. 8:o.
Lawrence. *Kansas university.*
Quarterly. Ser. A. Science and Math. Vol. 7 (1898): N:o 1–2. 8:o.
Leiden. *Nederlandsche botanische Vereeniging.*
Nederlandsch kruidkundig archief. (3) D. 1: St. 3. 1898. 8:o.
Prodromus florae Batavae. Vol. 2: P. 2. 1898. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 24: N:o 4. 1898. 8:o.
» Philol.-Hist. Cl. Bd 23: N:o 2. 1898. 8:o.
Berichte. » » » 1898: 2—3. 8:o.
» Math.-phys. Cl. 1898: 1—4. 8:o.
Lima. *Sociedad geográfica.*
Boletin. T. 7 (1897): Trim. 3. 8:o.
Linz. *Museum Francisco-Carolinum.*
Jahres-Bericht. 56. 1898. 8:o.

London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 15 (1898): P. 8. 8:o.
— *Meteorological office.*
Rainfall tables of the British Islands 1866—90. 8:o.
Quarterly current charts for the Pacific Ocean. 1898. Fol.
Meteorological observations at stations of the second order. Year 1894. 4:o.
Hourly means. 1894. 4:o.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 58 (1897/98): N:o 7—8. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 71—72 (1897): P. 1—2; Suppl. Number; 73—74 (1898): 6—9. 8:o.
Proceedings. Session 1897/98: N:o 196—197. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 54 (1898): P. 3. 8:o.
— *Linnean society.*
Transactions (2) Zool. Vol. 7: P. 4. 1898. 4:o.
» » Bot. Vol. 5: P. 7—8. 1897. 4:o.
Journal. Zool. Vol. 26: N:o 168—169, 171. 1897—98. 8:o.
» Bot. Vol. 33: N:o 229—233. 1897—98. 8:o.
Proceedings 1896/97. 8:o.
List. 1897/98. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 24 (1898): N:o 107. 8:o.
Meteorological record. Vol. 17 (1897): N:o 68. 8:o.
— *R. microscopical society.*
Journal. 1898: P. 3—4. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 63 (1898): N:o 396—401; 64 (1898): 402. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 14: P. 7. 1898. 4:o.
Proceedings. 1898: P. 2. 8:o.
List. 1898. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1898: N:o 136—140. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 6—8. 8:o.
Lussinpiccolo. *Manora Sternwarte.*
Småskrifter 2 st.
Madison. *Wisconsin Academy of sc., arts and lettres.*
Transactions. Vol. 11 (1896/97). 8:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico de España.*
Boletín. T. 23 (1896). 8:o.
— *Observatorio.*
35 años de observaciones meteorológicas. Exposición y resumen. 1897. Fol.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 42: P. 3. 1898. 8:o.

Marseille. *Faculté des sciences.*
Annales. T. 8: Fasc. 5—10. 1898. 4:o.
Mauritius. *R. Alfred observatory.*
Results of the magnetical and meteorological observations. Year 1896. Fol.
Melbourne. *Zoological and acclimatisation society.*
Annual report. 34 (1897). 8:o.
Meriden. *Scientific association.*
Transactions. Vol. 8 (1897/98). 8:o.
Mexico. *Asociacion de ingenieros y arquitectos.*
Anales. T. 6. 1897. 8:o.
— *Instituto geológico.*
Boletín. N. 10. 1898. 4:o.
— *Instituto médico nacional.*
Anales. T. 2: N. 6; 3: 12—15. 1898. 4:o.
— *Observatorio meteorológico central.*
Boletin mensual. 1898: 2, 4. 4:o.
Boletín de agricultura, mineria é industrias. Año 7 (1897/98): N:o 1—2. 8:o.
— *Sociedad científica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 11 (1897/98): N:o 1—4. 8:o.
Milano. *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 37 (1898): Fasc. 3. 8:o.
— *R. Osservatorio astronomico di Brera.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 1897. 4:o.
Minneapolis. *Geological and natural history survey of Minnesota.*
The geology of Minnesota. Vol. 1—4. 1884—97. 4:o.
Mirfield. *Yorkshire geological and polytechnic society.*
Proceedings. N. S. Vol. 13: P. 3. 1898. 8:o.
Montevideo. *Museo nacional.*
ARECHAVALETA, J., Las gramíneas Uruguayas. 1898. 8:o.
Montreal. *Natural history society.*
The Canadian record of science. Vol. 7: N:o 5—7. 1897—98. 8:o.
Moscou. *Société imp. des naturalistes.*
Bulletin. 1897: N:o 4. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Histor. Cl. Bd 21: Abth. 3. 1898. 4:o.
Sitzungsberichte. Philos.-philol. und histor. Cl. 1898: H. 1. 8:o.
— *K. Sternwarte.*
Neue Annalen. Bd 3. 1898. 4:o.
— *K. Meteorologische Central-Station.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. Jahrg. 19 (1897): H. 3. 4:o.
Übersicht über die Witterungsverhältnisse in Bayern. 1898: 3—7. Fol.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 4 (1898): Fasc. 5—7. 8:o.
New Haven. *Observatory of Yale university.*
Report. Year 1897/98. 8:o.

New York. *Academy of sciences.*
Annals. Vol. 9: Index; 11: P. 1. 1898. 8:o.
Transactions. Vol. 16 (1896—97). 8:o.
— *American museum of natural history.*
Memoirs. Vol. 1: P. 3. 1898. 4:o.
Annual report. Year 1897. 8:o.
— *Meteorological observatory of the Dep. of Public parks.*
Report. 1897: Annual tables; 1898: 1—4. 4:o.
Nizza. *Société de médecine et de climatologie.*
Nice-médical. Année 22 (1898): N:o 8, 10. 8:o.
Odessa. *Observatoire magnétique et météorologique.*
Annales. Année 4 (1897). Avec Texte Français. 4:o.
— *Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.*
Mémoires. T. 21: P. 2; 22: 1. 1897—98. 8:o.
Mémoires de la section mathématique. T. 18. 1897. 8:o.
Ottawa. *Geological survey of Canada.*
Rapport annuel. N. S. Vol. 8 (1895) & Cartes. 8:o.
— *Field-naturalists' club.*
The Ottawa Naturalist. Vol. 12 (1898/99): N:o 5. 8:o.
Oxford. *Radcliffe observatory.*
Results of meteorological observations. Vol. 47 (1890—91). 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 12 (1898): Fasc. 3—5. 8:o.
Annuario. Anno 15 (1898). 8:o.
— *R. Istituto botanico.*
BORZÌ, A., Contribuzioni alla biologia vegetale. Vol. 2: Fasc. 1—2. 1897—98. 8:o.
Paris. *Bureau central météorologique.*
Bulletin mensuel. Année 1898: N:o 3—4. 4:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux des séances de 1897. 8:o.
Rapport. Année 1897. 4:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 7—9. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
La feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1898): N:o 333—335. 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 24. 1898. 8:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 19 (1898): Trim. 2. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1898: N:o 4—7. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 26 (1898): N:o 2—3. 8:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 45 (1897): 4—9. 8:o.
Perth. *Government astronomer of Western Australia.*
Meteorological report. Year 1894. Fol.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1897: P. 3; 1898: 1. 8:o.

Philadelphia. *Wagner free institute of science.*
Transactions. Vol. 5. 1898. 8:o.
— *Free museum of science and art, Dep. of archæology and paleontology.*
Bulletin. N:o 3. 1898. 8:o.
— *American philosophical society.*
Transactions. N. S. Vol. 19: P. 2. 1898. 4:o.
Proceedings. Vol. 36 (1897): N:o 156; 37 (1898): 157. 8:o.

Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*
Atti. Processi verbali. Vol. 12 (1898): p. 1—56. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der K. und K. Kriegsmarine.*
Veröffentlichungen. N:o 5. 1898. 4:o.
Meteorologische Termin-Beobachtungen in Pola und Sebenico. 1898: 4—7. 4:o.

Potsdam. *Physikalisch-technische Reichsanstalt.*
Die Thätigkeit. 1897/98. 8:o.

Prag. *Česka akademia císaře Františka Josefa.*
Památnik na oslavu stých narozenin Františka Polackého. 1898. 8:o.
— *Spolek chemiků Českých.*
Listy chemické. R. 21 (1897): Č. 1—5; 22 (1898): 1—5. 8:o.
— *K. K. Sternwarte.*
Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 58 (1897). 4:o.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*
Annuario. Anno 1898. 8:o.

Riposto. *R. Istituto nautico.*
Bollettino mensile. Anno 23 (1897): Fasc. 2, 4; 26 (1897): 6—8, 10; 27 (1898): 4—6. 4:o.

Roma. *Italienska regeringen.*
GALILEI, G., Le opere. Edizione nazionale. Vol. 7. 1897. 8:o.
— *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze morali. P. 1: Memorie. (5) Vol. 5. 1898. 4:o.
» » » » » P. 2: Notizie degli Scavi. (5) Vol. 6 (1898): 2—5. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 7 (1898): Fasc. 2—6. 8:o.
» Cl. di scienze fisiche . . . (5) Vol. 7 (1898): Sem. 1: Fasc. 9—12; Sem. 2: 1—4. 8:o.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 12 Giugno 1897. 4:o.
— *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*
Atti. Anno 51 (1898): Sess. 3—7. 4:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino Vol. 29 (1898): N:o 1. 8:o.
— *Società Italiana delle scienze.*
Memorie di matematica e di fisica. (3) T. 11. 1898. 4:o.

Rothamsted. *Experiment station.*
Memoranda of the origin, plan and results of the field and other experiments. Year 55 (1898). 8:o.
4 småskrifter.

Rousdon. *Observatory.*
Meteorological observations. Vol. 14 (1897). 4:o.
Salem. *American association for the advancement of science.*
Proceedings. Meeting 46 (1897). 8:o.
Preliminary announcement. 50th anniversary, 1898. 8:o.
St. Louis. *Missouri Botanical Garden.*
Annual report. 9 (1897). 8:o.
San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Anales. Secc. 2: Año 1896. 4:o.
San Francisco. *Astronomical society of the Pacific.*
Publications. Vol. 9 (1897): N:o 59; 10 (1898): 60—62. 8:o.
St. Pétersbourg. *Académie impériale des sciences.*
Mémoires. (8) T. 5: N:o 6—13; 6: 1—8, 10. 1897—1898. 4:o.
Bulletin. (5) T. 7 (1897): N:o 3—5; 8 (1898): 1—4. 8:o.
— *K. Universitetet.*
Zapiski istoriko-filologičeskago fakulteta. Č. 54—55. 1897. 8:o.
Obozrěnie prepodavanija nauk 1898/99. 8:o.
Ustav filosofskago obščestva. 1897. 8:o.
Katalog russkich knig biblioteki. T. 1. 1897. 8:o.
Scripta botanica Horti universitatis Imp. Fasc. 14. 1897. 8:o.
SOVĚTOV, A., & ADAMOV, N., Materialy po izučeniju russkich počv. 1898. 8:o.
Travaux de la Société Imp. des naturalistes. Vol. 17: Livr. 3; 18: Livr. 1: N:o 5; 2. 1897. 8:o.
— *Comité géologique.*
Bulletins. 16 (1897): N:o 3—9; 17 (1898): 1—3. 8:o.
Bibliothèque géologique de la Russie. Année 1896. 8:o.
— *Institut Imp. de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 6: N:o 3. 1898. 4:o.
— *Laboratoire biologique.*
Bulletin. T. 2: 4; 3: 1. 1898. 8:o.
— *Societas entomologica Rossica.*
Horæ. T. 31 (1897): N:o 3. 8:o.
— *Société Imp. Russe de géographie.*
Izvěstija. T. 33 (1897): 5; 34 (1898): 1—2. 8:o.
San Salvador. *Observatorio meteorológico y astronómico.*
Observaciones meteorológicas. 1897: 1—4. Fol.
São Paulo. *Commissão geographica e geologica. Secção meteorologica.*
Dados climatologicos. Anno 1893—96. 8:o.
Sarajevo. *Landesregierung für Bosnien und die Hercegovina.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1896. 4:o.
Simla. *Meteorological reporter to the government of India.*
Indian meteorological memoirs. Vol. 7: P. 7. 1897. Fol.
Stettin. *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 58 (1897): N:o 7—12. 8:o.
Strassburg. *Universität.*
Akademische Schriften. 1896/97. 99 st. 8:o & 4:o.
Stuttgart. *Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.*
Jahreshefte. Jahrg. 54 (1897). 8:o.

Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 3: N:o 4. 1898. 8:o.
Catalogue. N:o 4. 1898. 8:o.
— *Linnean society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 22 (1897): P. 4; 23 (1898): 1. 8:o.
— *Government astronomer.*
Results of rain, river, and evaporation observations. Year 1896. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
Boletín. T. 2: N:o 3. 1898. Fol.
Teramo. *Osservatorio privato di Collurania.*
Pubblicazioni. N:o 1. 1898. 8:o.
Tokio. *Medicinische Facultät der Universität.*
Mittheilungen. Bd 3: N:o 3; 4: 1. 1897—98. 4:o.
— *Geographical society.*
Journal of geography. Vol. 10 (1898): N:o 109—112. 8:o.
— *Mathematico-physical society.*
Tōkyō sūgaku-butsurigaku kwai kiji. 8: 1—2. 8:o.
— *Central meteorological observatory.*
Weather chart. 1898: 3—6. Fol.
Topeka. *Kansas academy of science.*
Transactions. Vol. 15. 1898. 8:o.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 33 (1897/98): Disp. 7—13. 8:o.
— *R. Osservatorio astronomico.*
Pubblicazioni. N:o 4. 1896. 4:o.
Osservazioni meteorologiche. Anno 1895, 1896. 8:o.
2 småskrifter. 8:o.
— *Musei di Zoologia ed Anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 13 (1898): N:o 311—319. 8:o.
— *Società meteorologica Iialiana.*
Bollettino mensuale. (2) Vol. 18 (1898): N:o 3—4. 8:o.
Toronto. *Canadian institute.*
Transactions. Vol. 5: P. 1: Suppl.; P. 2. 1898. 8:o.
Proceedings. Vol. 1: P. 4—5. 1898. 8:o.
Trieste. *K. K. astronomisch-meteorologisches Observatorium.*
Rapporto annuale. Vol. 12 (1895). 4:o.
Tufts college, Mass. *Tufts college library.*
Studies. N:o 5. 1898. 8:o.
Utrecht. *Provinciaal Utrechtsch genootschap van kunsten en wetenschappen.*
Verslag van het verhandelde in de algemeene vergadering, 1897. 8:o.
Aanteekeningen van het verhandelde in de Sectie-vergaderingen, 1897. 8:o.
— *Physiologisch Laboratorium.*
Onderzoekingen. Register, 1848—97. 8:o.
Verona. *Accademia.*
Memorie. (3) Vol. 73 (1897): Fasc. 1—2. 8:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
Annual report. U. S. National museum. 1894/95. 8:o.
Miscellaneous collections. Vol. 37: N:o 1087; 38: 1090. 1898. 8:o.

Washington. *Smithsonian Institution.*

Message from the President of the U. S. transmitting the report of the Naval court of inquiry upon the destruction of the ship »Maine». 1898. 8:o.

— *U. S. National museum.*

Proceedings. Vol. 19. 1897. 8:o.

Bulletin. N:o 39: P. L. 1897. 8:o.

— *Department of agriculture.*

Yearbook. 1897. 8:o.

— — *Division of chemistry.*

Bulletin. N:o 50. 1898. 8:o.

— *Weather bureau.*

Monthly weather review. Vol. 26 (1898): 2—5. 4:o.

Bulletin. N:o 21. 1898. 8:o.

— *Director Nautical almanac.*

The American Ephemeris and nautical almanac. Year 1900. 8:o.

Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*

Abhandlungen. Bd 17: H. 4. 1897. Fol

Jahrbuch. Bd 47 (1897): H. 2. 8:o.

Verhandlungen. 1898: N:o 3—10. 8:o.

— *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Bd. 48 (1898): H. 3—6. 8:o.

Winnipeg. *Historical and Scientific Society of Manitoba.*

Transactions. N:o 51—52. 1898. 8:o.

Annual report. Year 1897. 8:o.

Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*

Verhandlungen. N. F. Bd. 31: N:o 8—11. 1898. 8:o.

Sitzungsberichte. Jahrg. 1897: N:o 3—9. 8:o.

Xalapa. *Observatorio central del estado de Veracruz Llave.*

Boletin mensual meteorológico y agrícola. 1897: 1—2, 4—11. 4:o.

Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 42 (1897): H. 3—4; 43 (1898): 1. 8:o.

Neujahrsblatt. 100. 1898. 4:o.

— *Schweizerische meteorologische Centralstation.*

Meteorologische Beobachtungen an 12 Stationen der Schweiz. 1897: Sem. 1. 4:o.

Af Fru Kammarrådinnan E. Borgström:

Skrifter utvalda i aflidne kammarrådet S. Borgströms bibliotek, 148 nummer.

Af utgifvarne:

Acta mathematica, hrsg. von G. MITTAG-LEFFLER. 22: 1—2. 1898. 4:o.

Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. 1898: N:o 2. 8:o.

The Journal of physical chemistry, ed. by W. D. BANCROFT, J. E. TREVOR. Vol. 2 (1898): N:o 1—6. Ithaca. 8:o.

American microscopical journal, ed. by CH. W. SMILEY. Washington. Spridda nummer.

Botaniska notiser utg. af O. NORDSTEDT. Separater ur årg. 1897.

Af utgifvarne:

Svenska jägareförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 36 (1898): H. 2—3. Sthlm. 8:o.

Kemiska notiser. Årg. 1 (1887): N:o 1—5; 2 (1888): 1—8. Sthlm. 8:o.

Svensk kemisk tidskrift. Utg. af G. EKSTRAND. Årg. 1 (1889): 1—8; 2 (1890): 1—8; 4 (1892): 2, 6—8; 5 (1893): 1—8; 6 (1894) 1—8; 7 (1895): 1—8; 8 (1896): 1, 3—8; 10 (1898): 1—4. Sthlm. 8:o.

Tidskrift för skogshushållning, utg. af C. G. HOLMERZ. Årg. 26 (1898): N:o 3. Sthlm. 8:o.

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrsg. von A. SEIDEL. Jahrg. 3 (1897): H. 4; 4 (1898): 1. Berlin. 8:o.

Af författarne:

DUNÉR, N. C., Upsala universitet 1872—97, astronomiska observatoriet. Ups. 1897. 4:o.

— Observations of the variables *Z* Herculis and *Y* Cygni. Boston 1897. 4:o.

ENESTRÖM, G., Johan de Witt et la théorie des rentes viagères composées. 1898. 8:o.

LOVÉN, C., Edvard Nonnen, minnesteckning. Sthlm 1898. 8:o.

LUNDBERG, R., International fisheries exhibition, Bergen 1898. Sweden, Special catalogue. Sthlm 1898. 8:o.

NILSSON, A., Om granrost. Sthlm 1898. 8:o.

OLSSON, P., Väderleken i Östersund 1897. Östersund 1898. 8:o.

SANTESSON, C. G., Über das Gift von Heloderma suspectum Cope. Sthlm 1897. 8:o.

TRYBOM, F., Fisket i Halland år 1897. Halmstad 1898. 8:o.

AGAMENNONE, G., Terremoto nel Mar Tirreno del pomeriggio del 15 Maggio 1897. Modena 1898. 8:o.

— Il terremoto dell' India del 12 Giugno 1897. Modena 1898. 8:o.

BANCROFT, W. D., The phase rule. Ithaca 1897. 8:o.

BOAS, J. E. V., Dansk Forstzoologi. Khvn 1896—98. 8:o.

BRÖGGER, W. C., Die Eruptivgesteine des Kristianiagebietes. 3. Kra 1898. 8:o.

— 2 småskrifter. 8:o.

COHN, F., Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. Lpz. 1895. 8:o.

COLENSO, W., A Maori-English lexicon. Wellington 1898. 8:o.

DENISOV, JA., Dochmij u eschila. Kharkov 1898. 8:o.

DOLLERIS, A., Danmarks Boghandlere. Khvn 1893. 8:o.

FONTSERÉ Y RIBA, E., Sobre la rotacion del sol. Barcelona 1898. 4:o.

HARTMANN, J., Die Beobachtung der Mondfinsternisse. Lpz. 1896. 8:o.

KÖLLIKER, A. V., Über die Entwicklung der Graaf'schen Follikel. Würzburg 1898. 8:o.

LEVASSEUR, É., De la méthode dans les sciences économiques. Paris 1898. 8:o.

LIMA, A. DE, Professão de fé. Lisboa 1898. 8:o.

Af författarne:

PETER, B., Beobachtungen am 6-zölligen Repsoldschen Heliometer der Leipziger Sternwarte. Abh. 1—2. Lpz. 1895—98. 8:o.
REINHOLD, A. F., Nature versus drugs. New York 1898. 8:o.
ROSENBUSCH, H., Elemente der Gesteinslehre. Stuttg. 1898. 8:o.
RUSSELL, H. C., Aurora borealis. Sydney 1897. 8:o.
SARAUW, G. F. L., Lyngheden i Oldtiden. Khvn 1898. 8:o.
SAUSSURE, R. DE, Cinématique des fluides. Note 1. Genève 1898. 8:o.
SCHWENDENER, S., Gesammelte botanische Mittheilungen. Bd 1—2. Berl. 1898. 8:o.
SCHAEBERLE, J. M., General theory of the aberration in the focal plane of a parabolic reflector. Boston 1898. 4:o.
— 3 småskrifter. 4:o.
STRATONOFF, W., Sur le mouvement des facules solaires. S.-Petersb. 1897. 4:o.
TOMÈ, G., Geografia del presente e dell' avvenire. P. 1—3. Torino 1880—98. 8:o.
WALTEMATH, G., Der dritte Mond der Erde. Hamburg 1898. 4:o.
WOLF, R., Astronomische Mitteilungen. N:r 89. Zürich 1898. 8:o.
Aviatik oder Gas-Luftschiffahrt? Undert. A. P. Wien 1898. 4:o.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 8.

Onsdagen den 12 Oktober.

INNEHÅLL:

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å en framställning af Franska Regeringen beträffande en tilltänkt internationel kongress för behandling af frågan om decimalsystemets tillämpande äfven på tidens och cirkelns indelningar afgåfvo Hrr. LINDHAGEN, LINDSTEDT och HASSELBERG infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

Hr. NATHORST redogjorde för nästlidne sommars svenska polarexpedition till Spetsbergen och Kung Karls land samt lemnade en öfversigt af de under expeditionen vunna resultat.

Hr. ROSSANDER dels omnämnde och öfverlemnade fyra af Akademiens utländske ledamot Professor O. OLLIER författade smärre arbeten på den moderna kirurgiens område, och dels lemnade meddelande om verkningarne af injektioner af kalihydratlösning vid vissa maligna tumörer i ansigtet.

Hr. HASSELBERG öfverlemnade såsom gåfva en samling porträter af berömda representanter för de exakta vetenskaperna, fotografiskt reproducerade af honom sjelf efter äldre porträter.

Hr. RETZIUS presenterade och öfverlemnade åttonde bandet af sitt stora arbete: »Biologische Untersuchungen».

Friherre NORDENSKIÖLD anmälde, att från Bergskåren i St. Petersburg blifvit till Riksmuseum såsom gåfva öfverlemnad en gipsafgjutning af kraniet utaf ett exemplar af den utdöda rhinoceros.

Anmäldes, att det museum nu vore fullständigt ordnadt, hvilket Akademien till framtida åminnelse af Friherre BERZELIUS beslutit låta i sitt eget hus inrätta, och hvilket skulle omfatta föremål, som antingen tillhört Berzelius och efter hans död blifvit till Akademien öfverlemnade eller ock på annat sätt om honom eller hans stora vetenskapliga lifsgerning erinrade.

I ledigheten efter Justitierådet J. O. RAMSTEDT hade Akademiens Förvaltningsutskott kallat och utnämnt konstituerade Revisionssekreteraren och Assessorn i Svea Hofrätt CARL ALBERT LINDHAGEN till Akademiens juridiska Ombudsman, hvarom anmälan nu gjordes.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter, nämligen:

dels i Akademiens Handlingar: »Remarks on Heliolitidæ», af Professor G. LINDSTRÖM;

dels i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Sur les singularités des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales», af Fil. Doktor H. GRÖNVALL; 2:o) »Ex herbario Regnelliano. Adjumenta ad floram phanerogamicam Brasiliæ terrarumque adjacentium cognoscendam. Particula secunda», af Filos. Doktor G. O. MALME; 3:o) »Faunan i Skånes Yngre Krita. III. Korallerna», af Docenten A. HENNIG; och

dels i Öfversigten: de i innehållsförteckningen uppräknade 6 uppsatser.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 2 häften. 4:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. N. F. 1898: N:o 8. 8:o.
Göteborg. *K. Vetenskaps- och Vitterhetssamhället.*
Handlingar. (4) H. 1. 1898. 8:o.
Berlin. *Universitäts-Bibliothek.*
Dissertationer. 36 st. 1897—98. 8:o.
— *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Bericht über die Thätigkeit des Instituts im Jahre 1897. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 33 (1897/98): N:o 18—27. 8:o.
— *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 28 (1897/98): N:o 8—12. 8:o.
Bremen. *Meteorologische Station 1. Ordnung.*
Ergebnisse der Beobachtungen. Jahrg. 8 (1897). 4:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 36 (1898): N:o 8. 8:o.
— *Société Belge de microscopie.*
Bulletin. Année 24 (1897/98). 8:o.
Budapest. *Magyar tudományos akadémia.*
Mathematikai és természettudományi értesitö. (Math. u. Naturwiss. Anzeiger). Kötet 15: Füz. 3—5; 16: 1—2. 1897—98. 8:o.
Mathematikai és természettudományi közlemények. (Math. u. Naturwiss. Mittheilungen). Kötet 27: Sz. 1—2. 1897—98. 8:o.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd 14 (1895/96). 8:o.
Archæologiai értesitö. (Archäologisches Bulletin). Kötet 17 (1897): Sz. 4—5; 18 (1898): 1—3. 8:o.
Archæologiai közlemények. (Archäologische Mittheilungen). Kötet 20. 1897. 4:o.
Almanach. 1897—98. 8:o.
Rapport sur les travaux de l'Académie Hongroise des sciences en 1897. 8:o.
Petényi, J. S. von, Pastor Roseus, L. Eingeleitet von Otto Herman. Budapest 1896. 8:o.
— *Statistisches Bureau der Hauptstadt Budapest.*
Publicationen. 19. 1894. 8:o.
— *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtani Közlöny. (Geologische Mittheilungen). Kötet 28 (1898): F. 5—6. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. General-Register der Bände 1—10. 1898. 8:o.
Jahresbericht. 1896. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 46 (1898): Entr. 1—2. 8:o.
Cape Town. *Meteorological Commission.*
Report of the meteorological commission. Year 1897. Fol.
Chicago. *Yerkes Observatory of the university.*
Bulletin. N:o 4—5. 1897. 8:o.
HALE, G. E., The Yerkes Observatory of the university of Chicago. Chicago 1897. 8:o.
Cincinnati. *Society of natural history.*
Journal. Vol. 19: N:o 4. 1898. 8:o.
Glasgow. *Philosophical society.*
Proceedings. Vol. 29 (1897/98). 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Math.-physikal. Kl. 1898: H. 1—2. 8:o.
» Philol.-histor. Kl. 1898: H. 2. 8:o.
» Geschäftliche Mittheilungen. 1898: H. 1. 8:o.
Abhandlungen. Math.-physikal. Kl. N. F. Bd. 1: N:o 3. 1898. 4:o.
» Phil.-Hist. Kl. N. F. Bd. 2: N:o 7. 1898. 4:o.
's-Gravenhage. *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
KOPS, J., & VAN EEDEN, F. W., Flora Batava. Afl. 321—322. Leiden 1898. 4:o.
Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 71 (1898): H. 1—2. 8:o.
Harlem. *Koloniaal museum.*
Bulletin. 1898: Juli. 8:o.
Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden.*
Niederschlagsbeobachtungen der meteorologischen Stationen im Grossherzogth. Baden. Jahrg. 1898: Halbj. 1. 4:o.
Kjöbenhavn. *Bestyrelsen for Universitetets zoologiske Museum.*
Den Danske Ingolf-Expedition. Bd. 1: Halvd. 1. 1898. 4:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Materyały do klimatografii Galicyi. Rok 1897. 8:o.
Bulletin international. 1898: 6—7. 8:o.
London. *Geologists' Association.*
Proceedings. Vol. 15 (1898): P. 9. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 24 (1898): N:o 105—106. 8:o.
Meteorological record. Vol. 17 (1897): N:o 67. 8:o.
— *Meteorological office.*
Report of the meteorological council. Year 1897. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 64 (1898): N:o 403. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1898: N:o 141—142. 8:o.

(Forts. å sid. 484.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 8.
Stockholm.

Ueber die Ableitung der MAXWELL'schen Differentialgleichungen aus dem HAMILTON'schen Principe.

Von C. A. MEBIUS.

[Mitgeteilt den 12 October 1898 durch B. HASSELBERG.]

Wenn F die potentielle Energie eines Systems von Massenpunkten und L die kinetische Energie bezeichnet, so ist die totale Energie des Systems

$$E = F + L, \quad \ldots \quad (1)$$

und

$$H = F - L \quad \ldots \quad (2)$$

das kinetische Potential.

Setzt man die Variation des Zeitintegrals des kinetischen Potentiales gleich Null d. i.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (F - L) dt = 0, \quad \ldots \quad (3)$$

so bekommt man, wenn die Variationen der Koordinaten für die Zeiten t_1 und t_2 gleich Null gesetzt werden, die Differentialgleichungen für die unabhängigen Veränderlichen, ohne dass man die Differentialgleichungen für die Koordinaten der Punkte selbst aufzustellen braucht.

Wir bezeichnen nun mit E_e und E_m die elektrische und die magnetische Energie eines Körpers. Dann ist

$$E_e = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau \quad \ldots \quad (4)$$

und

$$E_m = \frac{1}{8\pi}\int \mu(L^2 + M^2 + N^2)d\tau\,, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

wo X, Y, Z die Komponenten der elektrischen Kraft nach den Koordinaten x, y, z, L, M, N die entsprechenden Komponenten der magnetischen Kraft, ε die Dielektricitätskonstante, μ die Magnetisirungskonstante, und $d\tau$ ein Raumelement bezeichnen.

H. VON HELMHOLTZ [1]) leitet die MAXWELL'schen Differentialgleichungen für einen ruhenden, isotropen Nichtleiter aus dem HAMILTON'schen Principe auf folgende Weise ab. Er setzt

$$H = E_e + E_m + E_q\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo

$$E_q = \frac{A}{4\pi}\int\left(U\frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial t} + V\frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial t} + W\frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial t}\right)d\tau\,, \quad \ldots \quad (7)$$

und

$$\mu L = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\,,\quad \mu M = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\,,\quad \mu N = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \quad (8)$$

ist.

A ist die reciproke Lichtgeschwindigkeit; die drei Integrale E sind über den unendlichen Raum zu erstrecken.

Die Variationen von $\int_{t_1}^{t_2} H dt$ nach U und εX liefern

$$A\frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und

$$X = A\frac{\partial U}{\partial t}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die den anderen beiden Koordinatenrichtungen entsprechenden Gleichungen ergeben sich aus den Variationen nach V, εY, W, εZ.

---

[1]) Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts; herausgegeben von ARTHUR KÖNIG und CARL RUNGE. Leipzig 1897, p. 327.

Die elektromagnetische Energie $E_e + E_m$ wird also mit dem Integral E_q vermehrt, und daraus ergiebt sich das kinetische Potential. Es ist hierbei nicht ohne Interesse zu bemerken, dass E_q verschiedene Formen annehmen kann, und doch gehen bei der Variation die MAXWELL'schen Gleichungen hervor. Dies werden wir nun zeigen.

Wir setzen

$$E_q = -\frac{A}{4\pi}\iiint\left(\varepsilon X\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon Y\frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon Z\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdydz \qquad (11)$$

und

$$\mu L = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \mu M = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \mu N = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \qquad (8)$$

Die Gleichung (3) geht dadurch in die folgende über:

$$\delta\iiiint\left[\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi\mu}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}-\frac{A}{4\pi}\left(\varepsilon X\frac{\partial U}{\partial t}+\varepsilon Y\frac{\partial V}{\partial t}+\varepsilon Z\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right]dxdydzdt. \qquad (12)$$

Die Variationen nach X, Y, Z ergeben:

$$X = A\frac{\partial U}{\partial t}, \quad Y = A\frac{\partial V}{\partial t}, \quad Z = A\frac{\partial W}{\partial t}. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Wird nach U variirt, so ergiebt sich nach partiellen Integrationen nach z, y, t, wobei zu beachten ist, dass die über die Grenze erstreckten Teile des Integrals verschwinden:

$$A\frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die zwei analogen Gleichungen ergeben sich aus den Variationen nach V und W.

Differentiirt man die Gleichungen (8) nach t und wendet die Gleichungen (13) an, so erhält man die drei übrigen MAXWELL'schen Gleichungen, von denen nur eine

$$A\frac{\partial(\mu L)}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ausgeschrieben wird.

Aus (11) und (13) folgt

$$E_q = -2E_e; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

also ergiebt sich (6)

$$H = E_m - E_e. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Vergleicht man hiermit die Definitionsgleichung (2), so geht hervor, dass durch die Annahme (11) die magnetische Energie hier als potentielle Energie, und die elektrische Energie als aktuelle Energie erscheint.

Der Grund, warum die beiden verschiedenen Formen des E_q in (7) und (11) angewendet werden können, um das kinetische Potential zu komplettieren, ist folgender.

Bildet man die Differenz D zwischen E_q in (7) und in (11), so ergiebt sich

$$\left. \begin{aligned} D = \frac{A}{4\pi}\int\Big\{ & U\frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial t} + V\frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial t} + W\frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial t} + \\ & + \varepsilon X\frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon Y\frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon Z\frac{\partial W}{\partial t}\Big\} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$= \frac{A}{4\pi}\iiint\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon XU + \varepsilon YV + \varepsilon ZW)dxdydz \quad \ldots \quad (19)$$

Wird $\int Ddt$ nach εX oder U variirt, so verschwinden die Koefficienten der Variationen $\delta(\varepsilon X)$ und δU. Wird daher zum kinetischen Potential kD addirt, wo k eine Konstante oder eine beliebige von X, Y, Z, U, V, W unabhängige Funktion ist, so erhält man bei der Variation dasselbe Resultat wie bei der Variation von (12), also die MAXWELL'schen Gleichungen.

Die vollkommene Symmetrie, mit der die elektrischen und die magnetischen Kraftkomponenten in den Ausdruck der elektromagnetischen Energie eingehen, lässt erwarten, dass auch andere Formen von E_q möglich sind, nämlich solche, in denen die magnetischen Kraftkomponenten statt der elektrischen vorkommen.

Eine solche Form von E_q ist folgende:

$$E_q = -\frac{1}{4\pi}\iiint\left[L\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]dxdydz\,. \qquad (20)$$

Nehmen wir hier an, dass

$$X = A\frac{\partial U}{\partial t},\; Y = A\frac{\partial V}{\partial t},\; Z = A\frac{\partial W}{\partial t}, \quad . \; . \; . \; (13)$$

ist, so erhält man, wenn

$$\int(E_e + E_m + E_q)dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

nach U variirt und der Koefficient des δU gleich Null gesetzt wird,

$$A\frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

und bei der Variation nach L

$$\mu L = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Aus (22) und (20) ergiebt sich

$$E_q = -2E_m, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

also

$$H = E_e - E_m \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

Man kann also annehmen, dass diese Form (20) von E_q mit sich führt, dass die elektrische Energie mit der potentiellen, und die magnetische mit der lebendigen Kraft zusammenfällt.

Führt man drei neue Funktionen F, G, H durch die Gleichungen ein:

$$A\mu\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z};\; A\mu\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x};\; A\mu\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (25)$$

so nimmt E_q in (20) folgende Form an:

$$E_q = -\frac{A}{4\pi}\iiint\left(\mu L\frac{\partial F}{\partial t} + \mu M\frac{\partial G}{\partial t} + \mu N\frac{\partial H}{\partial t}\right)dxdydz\,. \qquad (26)$$

Setzt man nun

$$\varepsilon X = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \varepsilon Y = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \varepsilon Z = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}, \tag{27}$$

so liefert die Variation von (21) mit dem in (26) angegebenen Werte von E_q auch die MAXWELL'schen Gleichungen.

Dies ist klar auf Grund der vollkommenen Analogie zwischen den magnetischen und den elektrischen Kräften in den Ausdrücken der kinetischen Potentiale. Man sieht auch ohne weiteres ein, dass

$$E_q = \frac{A}{4\pi}\int\left(F\frac{\partial(\mu L)}{\partial t} + G\frac{\partial(\mu M)}{\partial t} + H\frac{\partial(\mu N)}{\partial t}\right)d\tau$$

eine anwendbare Form ist.

BOLTZMANN leitet in seiner »Vorlesungen» [1]) die MAXWELL'schen Gleichungen aus dem HAMILTON'schen Principe ab. Er geht dabei von der Annahme aus, dass die elektrische Energie mit der aktuellen, die magnetische mit der potentiellen zusammenfällt. Bei der Ausführung der Variation werden die Lösungen der MAXWELL'schen Differentialgleichungen

$$X = A\frac{\partial U}{\partial t}, \quad \mu L = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \text{ etc.}$$

als gegeben vorausgesetzt.

Es kann bemerkt werden, dass bei den im Vorhergehenden erwähnten Ausdrücken des kinetischen Potentiales, ε und μ nicht als unabhängige Veränderliche betrachtet werden können. Die Variation nach ε liefert nämlich, wenn man die in (7) und (11) angegebenen Formen von E_q anwendet, das unrichtige Resultat

$$\delta\varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$$

Es ist übrigens schwer, sich eine Vorstellung davon zu machen, wie eine Variation von ε möglich sein kann, da das Medium in Ruhe ist. Anders verhält sich die Sache, wenn der

[1]) L. BOLTZMANN: Vorlesungen über MAXWELL's Theorie der Elektricität und des Lichtes. II Theil, p. 7. Leipzig 1893.

Körper in Bewegung ist; dann können Änderungen dieser Konstante in Folge von Dehnung, Torsion oder Kompression eintreten; auch Temperaturänderungen können hierzu gerechnet werden.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass das kinetische Potential nicht vollkommen durch die Bedingung bestimmt ist, dass die Variation seines Zeitintegrales, gleich Null gesetzt, als Resultat die MAXWELL'schen Gleichungen geben wird. Ausserdem dass es zwei Formen giebt, welche darin analog sind, dass die elektrischen Kräfte bei der einen dieselbe Rolle spielen wie die magnetischen bei der anderen, so kann immer eine bestimmte Form des kinetischen Potentiales mit Termen vermehrt werden, welche so gewählt sind, dass ihre Variationen nach den unabhängigen Veränderlichen identisch Null sind. Die Funktion D in (18) ist ein Beispiel von einem solchen Terme, sobald es festgestellt ist, dass die Variationen der Grenzen Null sind. Wenn man nun eine gegebene Funktion, welche die Eigenschaft hat, dass die Variation ihres Zeitintegrales, gleich Null gesetzt, als Resultat die MAXWELL'schen Gleichungen oder bei der Bewegung eines materiellen Punktensystems die Bewegungsgleichungen der verschiedenen Punkte giebt, in die Differenz zweier Funktionen einteilt, so kann man nicht ohne weiteres behaupten, dass die eine dieser Funktionen der Ausdruck für die lebendige Kraft und die andere für die potentielle Energie ist. Es ist möglich, aber nicht notwendig.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 476.)

London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 9. 8:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico de España.*
MALLADA, L., Explicación del mapa geológico de España. T. 2—3. 1896—98. 8:o.
Magdeburg. *Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung.*
Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen. Bd. 15 (1896). 4:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 42 (1897/98): N:o 11—12. 8:o.
Melbourne. *Royal society of Victoria.*
Proceedings. N. S. Vol. 10: P. 2. 1898. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1898: 5. 4:o.
— *Sociedad cientifica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 11 (1897/98): N:o 5—8. 8:o.
Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Memorie. Cl. di scienze mat. e nat. Vol. 18: Fasc. 4—5. 1898. 4:o.
» » » » stor. e morali. Vol. 20: Fasc. 6. 1897. 4:o.
Rendiconti. (2) Vol. 30 (1897). 8:o.
Montevideo. *Museo nacional.*
Anales. T. 3: Fasc. 9. 1898. 4:o.
München. *K. Meteorologische Centralstation.*
Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1898: 8. Fol.
Ottawa. *Field-naturalists' Club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 12 (1898/99): N:o 6. 8:o.
Palo Alto. *Hopkins seaside laboratory of biology.*
Contributions to biology. 14—15. 1898. 8:o.
Paris. *Société d'études scientifiques.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 28 (1897/98): N:o 336. 8:o.
Pola. *Hydrographisches Amt der k. und k. Kriegs-Marine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen in Pola und Sebenico. 1898: 8. 4:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Atti. Cl. di scienze fisiche . . . (5) Rendiconti. Vol. 7 (1898): Sem. 2: Fasc 5—6. 4:o.
Rostock. *Landes-Universität.*
Academische Schriften. 1897/98. 87 st. 8:o & 4:o.
St. Pétersbourg. *Section géologique du Cabinet de Sa Majesté.*
Travaux. Vol. 2: Livr. 3 & Carte géol. de l'Altaï. 1898. 8:o.
— *Russisch-kaiserl. mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd. 35 (1898): Lief. 2. 8:o.

(Forts. å sid. 496.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 8.
Stockholm.

Om B. Galitzins teori för spektralliniernas utbredning.

Af C. A. Mebius.

[Meddeladt den 12 Oktober 1898 genom B. Hasselberg.]

Inledning.

1. I *Wied. Ann.* (Bd. 56, p. 78, 1895) framställer B. Galitzin en teori för spektralliniernas utbredning, grundad på den elektromagnetiska ljusteorien. Han tänker sig dervid molekylerna som ett slags Hertz'ska vibratorer eller resonatorer. För en enda sådan bestämmes strömstyrkan i ur ekvationen

$$CL\frac{d^2i}{dt^2} + i = 0\,, \qquad (1)$$

hvarest C och L äro kapaciteten och sjelfinduktions-koefficienten samt t tiden. Den elektriska rörelsen är oscillerande och svängningstiden är

$$\tau = 2\pi\sqrt{CL}\,. \qquad (2)$$

Äro två lika molekulära resonatorer för handen, så bestämmas de båda strömstyrkorna i dessa i och i_1 ur ekvationerna

$$\left.\begin{aligned} CL\frac{d^2i}{dt^2} + CM\frac{d^2i_1}{dt^2} + i = 0\,, \\ CL\frac{d^2i_1}{dt^2} + CM\frac{d^2i}{dt^2} + i_1 = 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

der M är den ömsesidiga induktionskoefficienten. I hvarje molekyl är strömstyrkan äfven nu oscillerande, men med två perioder, och de båda svängningstiderna äro

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{C(L-M)} \text{ och } \tau_2 = 2\pi\sqrt{C(L+M)}. \qquad (4)$$

I följd af de båda molekylernas inverkan på hvarandra sönderfaller således en mot svängningstiden τ svarande spektrallinie i två linier, som ligga på ömse sidor om den ursprungliga linien, och deras afstånd blir desto större, ju större M är, d. v. s. ju mindre afståndet mellan de båda molekylerna är.

Sålunda kan GALITZIN på ett ganska tilltalande sätt förklara utbredningen af en spektrallinie, och ur hans teori framgår äfven liniens asymetriska utbredning liksom inflytandet af en ökning af gasens temperatur och tryck i öfverensstämmelse med de direkta observationerna.

2. Emellertid inskränker sig GALITZIN vid den matematiska behandlingen af frågan till det fall, att blott två molekyler inverka på hvarandra. Äro de molekulära resonatorernas (jonparens, korpusklernas) antal större än två, kunna särskilda förhållanden inträffa. Dels kunna amplituderna för de oscillerande strömmarnes styrka växa i oändlighet, dels kunna möjligen icke periodiska termer förekomma i uttrycken för strömstyrkorna, och man kan a priori icke veta, huruvida dessa termer ej kunna växa i oändlighet.[1]) Det har derföre synts mig vara af intresse att taga frågan något allmännare i betraktande.

De allmänna rörelseekvationerna och deras integraler.

3. Låtom oss således hafva n stycken molekulära resonatorer, som ömsesidigt inverka på hvarandra. Låt för den m:te sjelfinduktionskoefficienten vara L_m, kapaciteten C_m, laddningen vid tiden t vara Q_m, strömstyrkan $i_m = -\frac{dQ_m}{dt}$ samt den öm-

[1]) Då GALITZINS afhandling refererades uti Fysiska Sällskapet i Göteborg, framställdes denna sista anmärkning af Dr. A. SÖDERBLOM, och det var derigenom jag fick anledning att företaga denna undersökning.

sesidiga induktionskoefficienten mellan den m:te och den p:te $M_{m,p} = M_{p,m}$. Då är

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d(L_1 i_1)}{dt} + \frac{d(M_{1,2} i_2)}{dt} + \ldots + \frac{d(M_{1,n} i_n)}{dt} - \frac{Q_1}{C_1} = 0; \\
\frac{d(M_{2,1} i_1)}{dt} + \frac{d(L_2 i_2)}{dt} + \ldots + \frac{d(M_{2,n} i_n)}{dt} - \frac{Q_2}{C_2} = 0; \\
\vdots \\
\frac{d(M_{n,1} i_1)}{dt} + \frac{d(M_{n,2} i_2)}{dt} + \ldots + \frac{d(L_n i_n)}{dt} - \frac{Q_n}{C_n} = 0.
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Vi förutsätta här, att någon värmeutveckling enligt JOULE's lag ej kan förekomma i en molekyl, och vi taga ej heller hänsyn till den genom strålningen uppstående dämpningen.

Med GALITZIN antaga vi koefficienterna L, M, C konstanta, enär molekylernas rörelser och således ändringen i deras inbördes afstånd äro försvinnande små under den tid, som tages i anspråk för ett ansenligt antal ljussvängningar. Differentieras hvar och en af ekv. (5) en gång i afseende på t, och införes operationssymbolen $D = \frac{d}{dt}$, så erhålla vi:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(L_1 D^2 + \frac{1}{C_1}\right) i_1 + M_{1,2} D^2 i_2 + \ldots + M_{1,n} D^2 i_n = 0, \\
M_{2,1} D^2 i_1 + \left(L_2 D^2 + \frac{1}{C_2}\right) i_2 + \ldots + M_{2,n} D^2 i_n = 0, \\
\vdots \\
M_{n,1} D^2 i_1 + M_{n,2} D^2 i_2 + \ldots + \left(L_n D^2 + \frac{1}{C_n}\right) i_n = 0,
\end{array}\right\} (6)$$

hvarur följer

$$\Delta \cdot i_m = \begin{vmatrix}
L_1 D^2 + \frac{1}{C_1}, & M_{1,2} D_2 & , \ldots, M_{1,n} D^2 \\
M_{2,1} D^2 & , L_2 D^2 + \frac{1}{C_2}, & \ldots, M_{2,n} D^2 \\
\vdots & \vdots & \\
M_{n,1} D^2 & , M_{n,2} D^2 & , \ldots, L_n D^2 + \frac{1}{C_n}
\end{vmatrix} \cdot i_m = 0. \quad (7)$$

Denna differentialekvation är af ordningen $2n$. För att integrera densamma har man, att sätta determinanten $\Delta = 0$ och lösa ekvationen i afseende på D. På D^2 erhåller man n värden.

1:o. Vore alla dessa olika, reella och negativa, vore värdena på D af formen $\pm \lambda_m \cdot \sqrt{-1}$ och således

$$i_m = \sum_1^n K_r \operatorname{Sin}(\lambda_r t + \varphi_r), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

der K_r och φ_r äro integrationskonstanter. I hvarje molekyl förekomma således n olika svängningar, och svängningstiderna äro bestämda ur ekvationen

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\lambda_r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

2:o. Vore p stycken af de reella, negativa rötterna lika, t. ex. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p$, så ersattes de p första termerna i högra membrum af ekv. (8) af

$$K_1 \operatorname{Sin}(\lambda_1 t + \varphi_1) + K_2 t \operatorname{Sin}(\lambda_1 t + \varphi_2) + K_3 t^2 \operatorname{Sin}(\lambda_1 t + \varphi_3) + \ldots$$
$$+ K_p t^{p-1} \operatorname{Sin}(\lambda_1 t + \varphi_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

I detta fall, som motsvaras af fullständig resonans, växa $(p-1)$ amplituder i oändlighet med tiden.

3:o. Vore en af rötterna reel och positiv, så att vi t. ex. hade $D^2 = \mu^2$, så medförde denna i uttrycket för strömstyrkan (8) tvenne termer

$$K' e^{\mu t} + K'' e^{-\mu t}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

af hvilka den första termen växer i oändlighet med t.

4:o. Vore ett värde på $D^2 = 0$, så erhölle man i integrationsresultatet en term af formen

$$kt + k_0,$$

och således skulle strömstyrkan växa i oändlighet.

5:o. Vore ett värde på D^2 af formen $\alpha + \beta i$, så funnes äfven en rot af formen $\alpha - \beta i$. De fyra värdena på D äro då af formen $\mu \pm \lambda i$ och $-\mu \pm \lambda i$, och för dessa värden måste i uttrycket för i_m tilläggas

$$k_1 e^{\mu t} \operatorname{Sin}(\lambda t + \psi_1) + k_2 e^{-\mu t} \operatorname{Sin}(\lambda t + \varphi_2) \ldots \ldots (12)$$

Man får således åter periodiska termer, men amplituderna äro för den senare aftagande och för den förra i oändlighet tilltagande.

4. En i oändlighet växande strömstyrka och en oscillerande ström med i oändlighet växande amplituder äro fysiskt taget omöjliga. Om man derföre kan påvisa i integrationsresultaten termer, som medföra sådana förhållanden, måste man antingen förklara teorien felaktig eller ock påvisa, att ekvationerna icke längre gälla under dessa extrema förhållanden. Ekvationerna äro emellertid desamma, som gälla för ett antal elektriska strömbanor hurudana som helst, som förbinda beläggningarne på kondensatorer och verka inducerande på hvarandra. En i oändlighet växande svängningsamplitud är det matematiska kännetecknet på att resonans eger rum; men att svängningsamplituden ej kan växa i oändlighet, är lätt att inse. Ty i samma mån svängningens intensitet ökas, måste äfven strålningen utåt ökas, och detta medför en dämpning, som blir allt större och större. Men äfven på ett annat sätt kan man tänka sig saken. Det är ett välbekant förhållande, att om urladdningsströmmen från ett tillräckligt starkt leydnerbatteri sändes genom en fin tråd, så sönderslites denna. Den hypotesen ligger derföre nära till hands, att då svängningens intensitet i en molekyl uppnått en viss storlek, så spränges molekylen. De för ett bestämdt antal molekyler gällande ekvationerna kunna då icke längre tillämpas. Då en gasmolekyl befinner sig i vanliga förhållanden, således icke utsatt för stora elektriska krafter, sammanhålles den af en ändlig kraft, hvilket visar sig deruti, att gasen icke är ledande. Under inverkan af tillräckligt starka elektriska krafter blir gasen en ledare, och att man dervid har att göra med en elektrolytisk ledning, torde numera vara ställdt utom tvifvel. Den sista tidens undersökningar om katodstrålarnes natur synas gifva vid handen, att denna elektrolys äfven kan vara af vida mera genomgripande natur än t. ex. i en saltlösning, i det att äfven de kemiska atomerna skulle sönderdelas. Så länge man derföre

fasthåller vid hypotesen om att materien består af molekyler och ännu mindre delar, måste man äfven antaga, att dessa molekyler kunna söndersprängas, och den föregående teorien gifver då en inblick uti, huru denna sönderdelning kan komma till stånd.

Tillämpning på tre molekulära resonatorer.

5. Vi skola nu taga i betraktande det fall, att tre molekulära resonatorer äro i hvarandras närhet, så att de kunna ömsesidigt inverka på de elektriska rörelser, som vi tänka oss ega rum i hvar och en.

Determinanten $\varDelta$ i (7) antager då följande form, sedan hvarje rad dividerats med D^2:

$$\begin{vmatrix} L_1 + \frac{1}{C_1 D^2}, & M_{1,2}, & M_{1,3} \\ M_{1,2}, & L_2 + \frac{1}{C_2 D^2}, & M_{2,3} \\ M_{1,3}, & M_{2,3}, & L_3 + \frac{1}{C_3 D^2} \end{vmatrix} = 0 \quad . . . (13)$$

För enkelhets skull antaga vi de tre molekylerna alldeles lika, således $L_1 = L_2 = L_3 = L$ och $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Detta antagande är naturligen icke alltid i öfverensstämmelse med verkligheten, men i en homogen gas är det det sannolikaste. Sätta vi dessutom

$$x = L + \frac{1}{CD^2}, \quad . . . . (14)$$

så blir föregående ekvation

$$x^3 - \left(M_{1,2}^2 + M_{2,3}^2 + M_{3,1}^2\right)x + 2M_{1,2} \cdot M_{2,3} \cdot M_{3,1} = 0 . \quad (15)$$

För att afgöra beskaffenheten af rötterna till denna ekvation, måste man undersöka, om

$$M_{1,2}^2 \cdot M_{2,3}^2 \cdot M_{3,1}^2 \gtreqless \left(\frac{M_{1,2}^2 + M_{2,3}^2 + M_{3,1}^2}{3}\right)^3.$$

Äro $M_{1,2}$, $M_{2,3}$, $M_{3,1}$ alla lika, så gäller likhetstecknet, och äro ej alla tre lika, så gäller tecknet $<$. I förra fallet äro två rötter lika och i senare alla tre reella och olika.

6. Antaga vi nu till en böjan $M_{1,2} = M_{2,3} = M_{3,1} = M$, så blir ekv. (15)

$$x^3 - 3M^2x + 2M^3 = 0\,,$$

alltså

$$x_1 = x_2 = M\,;\; x_3 = -2M\,.$$

Enligt (14) blifva således värdena på D

$$D_{1,2} = \pm\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}\,;\qquad D_{3,4} = \pm\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}\,;$$

$$D_{5,6} = \pm\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{C(L+2M)}}\,;$$

och följaktligen strömstyrkan

$$i = K_1\,\mathrm{Sin}\left(\frac{t}{\tau_1} + \varphi_1\right) + K_2t\,\mathrm{Sin}\left(\frac{t}{\tau_1} + \varphi_2\right) + K_3\,\mathrm{Sin}\left(\frac{t}{\tau_3} + \varphi_3\right), \tag{16}$$

hvarest svängningstiderna τ_1 och τ_3 äro bestämda ur

$$\tau_1 = 2\pi\sqrt{C(L-M)}\,;\quad \tau_3 = 2\pi\sqrt{C(L+2M)}\,.$$

I detta fall ligga de tre molekylerna på lika afstånd från hvarandra, om de äro fullt symmetriska eller åtminstone symmetriskt belägna. Den ena svängningstiden τ_1 är densamma, som om blott två molekyler inverkade på hvarandra, men på grund af resonansen kommer denna svängning att göra sig gällande betydligt mera än den andra, som har något längre svängningstid τ_3 och bestämmer derför spektralliniens läge. Är afståndet mellan molekylerna stort, så är M försvinnande i förhållande till L, hvarföre τ_1 mycket nära öfverensstämmer med τ, svängningstiden för en enda molekyl (2); grundsvängningen förstärkes således väsendtligen på grund af resonansen.

7. Tänka vi oss, att den ene molekylen befinner sig på samma afstånd från de båda andra, men dessas afstånd hurudant som helst, så sätta vi $M_{1,2} = M_{1,3} = M$. Ekv. (15) blir då

$$x^3 - \left(2M^2 + M_{2,3}^2\right)x + 2M^2\cdot M_{2,3} = 0\,.$$

Rötterna till denna äro

$$x_1 = M_{2,3} \text{ och } x_{2,3} = -\tfrac{1}{2}\left(M_{2,3} \pm \sqrt{M_{2,3}^2 + 8M^2}\right).$$

Härur fås

$$\frac{1}{D_1^2} = -C(L-M); \quad \frac{1}{D_2^2} = -C\left(L + \tfrac{1}{2}M_{2,3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{M_{2,3}^2 + 8M^2}\right)$$

och

$$\frac{1}{D_3^2} = -C\left(L + \tfrac{1}{2}M_{2,3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{M_{2,3}^2 + 8M^2}\right).$$

D_1^2 och D_2^2 äro negativa. D_3^2 är också negativ, om

$$L^2 + LM_{2,3} - 2M^2 > 0 \,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Detta villkor är i allmänhet uppfylldt, t. ex. då $M \leqq M_{2,3}$, men om det alltid är uppfylldt lemnas nu derhän (se § 10). Visserligen är alltid $L > M$; men antoge man, att M hade sitt gränsvärde L, är det icke uppfylldt. M får sitt största värde i jämförelse med $M_{2,3}$, då de tre molekylerna ligga i rät linie och den ene midt emellan de båda andra. För att matematiskt strängt afgöra, om villkoret i detta fall är uppfylldt, synes det vara nödvändigt att hafva kännedom om resonatorernas form.

Är D_3^2 negativ, så hafva vi tre periodiska elektriska svängningar med svängningstiderna

$$\tau_4 = 2\pi\sqrt{C(L - M_{2,3})}\,; \quad \tau_5 = 2\pi\sqrt{C\left(L + \tfrac{1}{2}M_{2,3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{M_{2,3}^2 + 8M^2}\right)}\,;$$

$$\tau_6 = 2\pi\sqrt{C\left(L + \tfrac{1}{2}M_{2,3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{M_{2,3}^2 + 8M^2}\right)}.$$

Om

$$M^2 \leqq M_{2,3}\,,$$

är

$$\tau_6 \leqq \tau_4 < \tau_5\,;$$

men är $M_{2,3} < M^2$, så är τ_4 mindre än både τ_5 och τ_6. I förra fallet utbreder sig spektrallinien (τ_4) åt båda sidor, i senare endast åt större våglängder. Någon resonans förekommer icke, hvarföre svängningarnes intensitet måste vara relativt obetydlig.

8. Äro $M_{1,2}$, $M_{2,3}$, $M_{3,1}$ alla olika, och utesluta vi möjligheten $D^2 \gtreqless 0$, så blifva förhållandena alldeles analoga med i föregående fall. Man får en oscillerande strömstyrka, de tre perioderna äro olika, och då ingen resonans förekommer, växa ej svängningsintensiteterna till ansenliga belopp.

Anmärkningar.

9. I den framställning GALITZIN lemnat af sin teori för spektralliniernas utbredning, har han ej särskildt framhållit vikten af resonansen mellan de särskilda molekylerna, allrahelst denna ej förefinnes, då blott två molekyler inverka på hvarandra. Resonansen torde emellertid för denna teori vara af synnerligt stor betydelse; först då resonans inträder, blir intensiteten betydlig äfven under små elektriska krafters inverkan, och för att densamma skall komma till stånd, är det ej nödvändigt, att molekylerna skola komma mycket nära intill hvarandra eller med andra ord, att de ömsesidiga induktionskoefficienterna M skola antaga stora värden, som närma sig till sjelfinduktionskoefficienternas L. Det enda, som behöfves, är, att de ligga symmetriskt i förhållande till hvarandra eller i allmänhet så, att kvantiteterna M blifva lika. Ligga molekylerna långt ifrån hvarandra, så att M är litet, behöfves antagligen längre tid för intensitetens ansvällning, men möjligheten finnes alltid, och svängningstiden kommer då att mycket nära sammanfalla med tiden för molekylens grundsvängning. Ju större antalet af molekyler inom en gifven rymd är, desto större är sannolikheten för att villkoren för resonansen skola vara uppfyllda. En elektrisk gnista i en tätare gas bör derföre vara intensivare än i en tunnare, äfven om gnistkanalerna äro af lika omfång.

Inverka flera än tre molekyler på hvarandra blir resonansen stundom ännu intensivare. Är antalet fyra, så erhåller D^2 tre lika värden, då alla sex koefficienterna M äro lika, och i ekv. (16) för strömstyrkan tillkommer då en term, hvars amplitud

är proportionell med kvadraten på tiden; motsvarande svängningsintensitet är proportionell med fjerde digniteten af tiden. Om likheten mellan koefficienterna M blott berodde på molekylernas lägen i rymden, så skulle i detta fall de fyra molekylerna intaga de fyra hörnpunkterna i en tetraeder. Inverka fem molekyler på hvarandra, är det möjligt, att resonans inträffar för två olika svängningstider. Om fler och fler molekyler inverka på hvarandra, kan intensiteten hos en af svängningarne blifva proportionell med en allt högre dignitet af tiden. Men om intensiteten också tilltager synnerligen hastigt på grund af resonansen, så störes denna så mycket lättare. Induktionskoefficienterna äro ej, såsom vi antagit, konstanta, utan de ändra sig långsamt i följd af molekylens translatoriska och rotatoriska rörelser. Villkoren för resonansens bestånd försvinna derföre hastigare, ju flera molekyler det är fråga om; likaså blir också sannolikheten för deras inträffande allt mindre.

10. Utvecklar man determinanten i ekv. (13) fås:

$$\begin{vmatrix} L_1, & M_{1,2}, & M_{1,3} \\ M_{1,2}, & L_2, & M_{2,3} \\ M_{1,3}, & M_{2,3}, & L_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{D^2}\left\{\frac{1}{C_3}\begin{vmatrix} L_1, & M_{1,2} \\ M_{1,2}, & L_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{C_2}\begin{vmatrix} L_3, & M_{1,3} \\ M_{1,3}, & L_1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{C_1}\begin{vmatrix} L_2, & M_{2,3} \\ M_{2,3}, & L_3 \end{vmatrix}\right\} + \frac{1}{D^4}\left(\frac{L_1}{C_2C_3} + \frac{L_2}{C_3C_1} + \frac{L_3}{C_1C_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{D^6}\cdot\frac{1}{C_1C_2C_3} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

D^2 kan således icke antaga värdet noll. Vore den af $\frac{1}{D^2}$ oberoende determinanten Δ_3 positiv, så kan D^2 ej antaga ett positivt värde, enär de öfriga koefficienterna äro positiva. Då nu ett positivt värde på D^2 medför en icke periodisk, med tiden i oändlighet tilltagande term i uttrycket för strömstyrkan och en oändlig strömstyrka fysiskt taget är omöjlig, så måste man deraf draga den slutsatsen, att öfverhufvud taget positiva värden på D^2 äro omöjliga. Då produkten af rötterna till ekv.

(20) har motsatt tecken mot Δ_3, så måste Δ_3 vara positiv. Ty vore Δ_3 negativ, så skulle rötternas produkt vara positiv. Då nu produkten af två imaginära rötter eller af två negativa rötter är positiv, måste åtminstone *en* rot vara positiv, hvilket enligt antagandet är omöjligt. På samma grund måste i allmänhet den ur (7) härledda determinanten af n:te ordningen

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} L_1 & , M_{1,2}, & \dots M_{1,n} \\ M_{2,1}, & L_2 & , \dots M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1}, & M_{n,2}, & \dots L_n \end{vmatrix}$$

vara positiv. Dividerar man först hvarje rad i Δ (ekv. 7) med D^2 och betecknar $\frac{1}{D^2}$ med y, så blir den ekvation, man för integrationens skull måste upplösa,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} L_1 + \frac{y}{C_1}, & M_{1,2} & , \dots M_{1,n} \\ M_{2,1} & , L_2 + \frac{y}{C_2}, & \dots M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & , M_{n,2} & , \dots L_n + \frac{y}{C_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Sätter man här $y = 0$, får man, att den af y oberoende termen blir Δ_n. Koefficienten till y^n är $\frac{1}{C_1 \cdot C_2 \dots C_n}$. Produkten af de n värdena på D^2 i ekv. (7) är således

$$\pm \frac{1}{\Delta_n} \cdot \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \dots C_n}.$$

Det öfre tecknet gäller, då n är ett jämnt tal, det undre, då n är udda. Alla kvantiteterna C äro på grund af sin natur positiva. Vore derföre Δ_n negativ, måste åtminstone en rot vara positiv, hvilket på grund af antagandet är omöjligt. Alltså måste Δ_n vara positiv.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 484.)

St. Pétersbourg. *Hortus Petropolitanus.*
Acta. T. 14: Fasc. 2. 1898. 8:o.
— *Institut Imp. de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 6: N:o 4. 1898. 4:o.
— *Société Imp. Russe de géographie.*
Izvěstija. T. 34 (1898): 1. 8:o.
Sofia. *Station centrale météorologique de Bulgarie.*
Bulletin annuaire. 1897. Fol.
Stavanger. *Museum.*
Aarsberetning for 1897. 8:o.
Stuttgart. *Meteorologische Zentralstation.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1897. 4:o
Sydney. *Royal Society of N. S. Wales.*
Journal & proceedings. Vol. 31 (1897). 8:o.
— *Department of Mines and Agriculture.*
Annual report. Year 1897. Fol.
Tokyo. *Central meteorological observatory.*
Weather chart. 1898: 7—8. Fol.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 33 (1897/98): Disp. 14—15. 8:o.
— *Osservatorio della R. Università.*
Osservazioni meteorologiche. 1897. 8:o.
Triest. *K. K. astronomisch-meteorologisches Observatorium.*
Rapporto annuale. Anno 1895. 4:o.
Tromsö. *Museum.*
Aarsberetning. 1895—96. 8:o.
Aarshefter. 19 (1896). 8:o.
Småskrifter. 3 st. 1897/98. 8:o.
Trondhjem. *K. Norske Videnskabers Selskab.*
Skrifter. 1897. 8:o.
Washington. *Weather bureau.*
Monthly weather review. Year 1898: 6. 4:o.
Report of the chief. 1896—97. 4:o.
— *Smithsonian Institution.*
Miscellaneous collections. Vol. 40. 1898. 8:o.
Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Math.-naturwiss. Cl. Bd. 64. 1897. 4:o.
» Philos.-hist. Cl. Bd. 45. 1897. 4:o.
Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. Cl. 1897—98. 8:o.
Abth. 1. Bd. 106: H. 1—10; 107: 1—5.
» 2a. Bd. 106: H. 1—10; 107: 1—2.
» 2b. Bd. 106: H. 1—10; 107: 1—3.
» 3. Bd. 106: H. 1—10.
Register. Bd. 101—105 (Abth. 1, 2a, 2b, 3). 1897. 8:o.

(Forts. å sid. 532.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 8.
Stockholm.

Om de konvexa polyedrarne.

Af Alexander Berger.

[Meddeladt den 12 Oktober 1898 genom M. Falk.]

§ 1.

Inledning.

Vi antaga, att hela ytan af en sfer med radien 1 är indelad i sferiska polygoner, som gränsa intill hvarandra på ett sådant sätt, att hvarje sida i en polygon är i hela sin utsträckning sida äfven i en annan af polygonerna. Vidare beteckna vi med n antalet af alla dessa polygoner, med k antalet af alla de på sferen dragna storcirkelbågarne, som bilda sidorna i dessa polygoner, samt med r antalet af alla de punkter på sferen, som bilda polygonernas hörn. Antaga vi nu, att den första af dessa polygoner har h_1 sidor och således äfven h_1 vinklar $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $\ldots A_{1,h_1}$, att den andra polygonen har h_2 sidor och h_2 vinklar $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, $\ldots A_{2,h_2}$, $\ldots$ och slutligen, att den n:te polygonen har h_n sidor och h_n vinklar $A_{n,1}$, $A_{n,2}$, $A_{n,3}$, $\ldots$ A_{n,h_n}, så uttryckas ytorna af dessa n polygoner enligt en känd formel medelst qvantiteterna

$$A_{1,1} + A_{1,2} + \ldots + A_{1,h_1} - (h_1 - 2)\pi\,,$$

$$A_{2,1} + A_{2,2} + \ldots + A_{2,h_2} - (h_2 - 2)\pi\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n,1} + A_{n,2} + \ldots + A_{n,h_n} - (h_n - 2)\pi\,.$$

Emedan nu summan af dessa polygoners ytor tydligen är lika med sferens hela yta 4π, så erhålla vi genom addition likheten

$$(1) \qquad \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda,\mu} - (h_1 + h_2 + \ldots + h_n)\pi + 2n\pi = 4\pi ,$$

der summan i venstra membrum är lika med summan af alla polygonernas samtliga vinklar. Men emedan summan af de vinklar, som sammanträffa i ett hörn tydligen är lika med 2π, och emedan antalet af samtliga hörnen är lika med r, så är

$$(2) \qquad \sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda,\mu} = 2r\pi .$$

Emedan vidare hvarje sida i en polygon är i hela sin utsträckning sida i äfven en annan polygon, som gränsar intill den förra, så är

$$(3) \qquad h_1 + h_2 + \ldots + h_n = 2k .$$

Om vi nu använda eqv. (2) och (3) på eqv. (1), så erhålla vi

$$(4) \qquad n + r = k + 2 ,$$

hvarmed följande teorem är bevisadt:

Teorem I. Om hela ytan af en sfer är indelad i sferiska polygoner på ett sådant sätt, att hvarje sida i en polygon är i hela sin utsträckning sida i en annan af polygonerna, och om man med n betecknar antalet af alla dessa polygoner, med k antalet af alla de på sferen dragna storcirkelbågarne, som bilda polygonernas sidor, samt med r antalet af alla de punkter på sferen, som bilda polygonernas hörn, så är

$$n + r = k + 2 .$$

§ 2.

Allmänna teorem om konvexa polyedrar.

Med en polyeder förstås hvarje solid kropp, som begränsas af plana ytor; om en hvilken som hälst af dessa gränsytor ut-

drages i oändlighet, och om det då alltid inträffar, att hela polyedern ligger på en och samma sida om den utdragna gränsytan, så säges polyedern vara konvex. Om vi med n beteckna antalet af en konvex polyeders gränsytor, med k antalet af dess kantlinier (skärningslinierna mellan två intill hvarandra stötande gränsytor) och med r antalet af dess hörn (kantliniernas ändpunkter), så inses lätt, att

(5) $$n \geqq 4\,, \quad r \geqq 4\,.$$

Om vi inuti polyedern välja en punkt samt med denna som medelpunkt konstruera en sfer med radien 1, och om vi vidare från medelpunkten projiciera polyederns kanter på sferens yta, så blifva dessa projektioner storcirkelbågar, medelst hvilka sferens hela yta indelas i n sferiska polygoner på ett sådant sätt, att hvarje sida i en polygon blir i hela sin utsträckning äfven sida i en annan af polygonerna. Vidare blir antalet af dessa storcirkelbågar, som bilda polygonernas sidor, lika med k, och antalet af alla de punkter på sferen, som bilda polygonernas hörn, blir r. Vi kunna då använda teorem I, och vi erhålla relationen

(6) $$n + r = k + 2\,,$$

hvilken är funnen af EULER. Af formlerna (5) och (6) följer

(7) $$k \geqq 6\,.$$

Om vi med x_h, der h är ett helt tal, större än eller lika med 3, beteckna antalet af polyederns h-sidiga gränsytor, så är tydligen

(8) $$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \ldots = n\,;$$

men nu inses lätt, att

(9) $$x_n = 0\,, \quad x_{n+1} = 0\,, \quad x_{n+2} = 0\,, \ldots,$$

ty om någon af dessa qvantiteter icke vore noll, så skulle polyedern ha åtminstone *en* gränsyta, hvars sidoantal vore större än eller lika med n. Vid denna gränsytas sidor skulle då ligga minst n andra gränsytor, alldenstund polyedern är en sluten figur, och antalet af polyederns samtliga gränsytor skulle då

vara större än eller lika med $n + 1$. Emedan detta strider mot antagandet, att antalet af samtliga gränsytorna är n, så gälla likheterna (9), och relationen (8) kan alltså sättas under formen

$$x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_{n-1} = n. \tag{10}$$

Om vi med y_h, der h är större än eller lika med 3, beteckna antalet af polyederns h-kantiga hörn, så är

$$y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \ldots = r; \tag{11}$$

men nu är tydligen

$$y_r = 0, \quad y_{r+1} = 0, \quad y_{r+2} = 0, \ldots, \tag{12}$$

ty om någon af dessa qvantiteter icke vore noll, så skulle polyedern ha åtminstone *ett* hörn, hvars kantantal vore större än eller lika med r. På detta hörns kanter skulle då ligga minst r andra hörn, alldenstund polyedern är en sluten figur, och antalet af polyederns samtliga hörn skulle då vara större än eller lika med $r + 1$. Men detta strider mot antagandet, att antalet af samtliga hörnen är r, och följaktligen gälla likheterna (12), och relationen (11) kan skrifvas

$$y_3 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{r-1} = r. \tag{13}$$

Emedan hvarje h-sidig gränsyta på polyedern är omgifven af h kanter, och emedan hvarje kant är gemensam för två gränsytor, så är

$$3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \ldots + (n-1)x_{n-1} = 2k; \tag{14}$$

emedan genom hvarje h-kantigt hörn gå h kanter, och emedan hvarje kant är gemensam för två hörn, så finna vi

$$3y_3 + 4y_4 + 5y_5 + \ldots + (r-1)y_{r-1} = 2k. \tag{15}$$

Vi sätta de nu bevisade likheterna under formen

$$\sum_{h=3}^{h=n-1} x_h = n, \quad \sum_{h=3}^{h=n-1} hx_h = 2k, \tag{16}$$

$$\sum_{h=3}^{h=r-1} y_h = r, \quad \sum_{h=3}^{h=r-1} hy_h = 2k. \tag{17}$$

Härmed är följande teorem bevisadt.

Teorem II. Om antalen af en konvex polyeders gränsytor, kanter och hörn betecknas i ordning med n, k, r, så är

$$n + r = k + 2\,,$$

$$n \geqq 4\,,\quad r \geqq 4\,,\quad k \geqq 6\,;$$

om vidare för $h \geqq 3$ antalet af polyederns h-sidiga gränsytor betecknas med x_h, och antalet af dess h-kantiga hörn betecknas med y_h, så är

$$x_h \geqq 0 \text{ för } h \geqq 3\,,\quad x_h = 0 \text{ för } h \geqq n\,,$$

$$\sum_{h=3}^{h=n-1} x_h = n\,,\quad \sum_{h=3}^{h=n-1} h x_h = 2k$$

samt

$$y_h \geqq 0 \text{ för } h \geqq 3\,,\quad y_h = 0 \text{ för } h \geqq r\,,$$

$$\sum_{h=3}^{h=r-1} y_h = r\,,\quad \sum_{h=3}^{h=r-1} h y_h = 2k\,.$$

De i detta teorem innehållna formlerna finnas med samma beteckningar framstälda hos V. EBERHARD, Zur Morphologie der Polyeder, Leipzig 1891, men de äro der anförda utan bevis. De finnas bevisade hos t. ex. TODHUNTER, Spherical Trigonometry 1871 och hos E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE, Traité de Géométrie, Paris 1879. I det följande skall jag ur dessa formler härleda några egenskaper hos de konvexa polyedrarne.

En konvex polyeder har vinklar af tre olika slag, nämligen plana, diedriska och polyedriska vinklar.

Med en polyeders plana vinklar förstås dess gränsytors plana vinklar.

Med en polyeders diedriska vinklar förstås de diedriska vinklar, som de två i hvarje kant sammanlöpande gränsytorna bilda med hvarandra.

Med en polyeders polyedriska vinklar förstås de polyedriska vinklar, som de i hvarje hörn sammanlöpande gränsytorna tillsammans bilda.

Af dessa definitioner följer omedelbart, att antalet af en polyeders diedriska vinklar är lika med k, och att antalet af dess polyedriska vinklar är r. Vi skola nu bestämma antalet och summan af dess plana vinklar. Hvarje h-sidig gränsyta har h plana vinklar, och alltså är antalet af polyederns samtliga plana vinklar lika med

$$3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \ldots + (n-1)x_{n-1}$$

d. v. s. enligt eqv. (14) lika med $2k$. Emedan vidare summan af hvarje h-sidig gränsytas plana vinklar är lika med $(h-2)\pi$, så finna vi, att summan af polyederns alla plana vinklar är lika med

$$\sum_{h=3}^{h=n-1} (h-2)\pi \cdot x_h$$

eller

$$\pi \sum_{h=3}^{h=n-1} hx_h - 2\pi \sum_{h=3}^{h=n-1} x_h$$

d. v. s. enligt teorem II lika med

$$2(r-2)\pi \, .$$

Härmed är följande teorem bevisadt.

Teorem III. Antalet af en konvex polyeders alla plana vinklar är lika med $2k$, och summan af alla dessa plana vinklar är lika med $2(r-2)\pi$. Vidare är antalet af polyederns alla diedriska vinklar lika med k, och antalet af alla dess polyedriska vinklar lika med r.

Med en konvex polyeders diagonaler förstås de räta linier, som sammanbinda polyederns hörn två och två, men som icke äro sidor eller diagonaler i någon af gränsytorna.

För att bestämma antalet af en polyeders diagonaler, hvilket antal vi beteckna med d, förfara vi på följande sätt. Om de r hörnen i polyedern sammanbindas med hvarandra två och två på *alla* möjliga sätt, så blir tydligen antalet af alla sammanbindningslinierna lika med

$$\frac{r(r-1)}{2},$$

och dessa sammanbindningslinier äro af följande tre slag:

1) Polyederns kanter, hvilkas antal är k.

2) Gränsytornas diagonaler, hvilkas antal tydligen är

$$\sum_{h=3}^{h=n-1} \frac{h(h-3)}{2} x_h ,$$

ty antalet af en plan h-sidig polygons diagonaler är lika med $\frac{h(h-3)}{2}$.

3) Polyederns diagonaler, hvilkas antal är d.

Vi få häraf likheten

$$\frac{r(r-1)}{2} = k + \sum_{h=3}^{h=n-1} \frac{h(h-3)}{2} x_h + d ,$$

hvaraf följer enligt teorem II

$$d = \frac{r(r-1)}{2} + 2k - \tfrac{1}{2} \sum_{h=3}^{h=n-1} h^2 x_h . \tag{18}$$

Teorem IV. Antalet af en konvex polyeders diagonaler är lika med

$$\frac{r(r-1)}{2} + 2k - \tfrac{1}{2} \sum_{h=3}^{h=n-1} h^2 x_h .$$

Af eqvationerna (16) erhålla vi genom subtraktion, sedan den första af dem blifvit förlängd med en godtycklig qvantitet λ,

$$\sum_{h=3}^{h=n-1} (\lambda - h) x_h = \lambda n - 2k \tag{19}$$

eller, emedan x_h är lika med noll för $h \geqq n$ enligt teorem II,

$$\sum_{h=3}^{h=\infty} (\lambda - h) x_h = \lambda n - 2k , \tag{20}$$

och på samma sätt erhålla vi af eqvationerna (17), alldenstund $y_h = 0$ för $h \geqq r$,

$$\sum_{h=3}^{h=\infty} (\lambda - h) y_h = \lambda r - 2k . \tag{21}$$

Om vi nu antaga, att λ är ett helt tal, som är större än eller lika med 3, så kunna vi sätta eqv. (20) och (21) under formen

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) x_h + \sum_{h=\lambda+1}^{h=\infty} (\lambda - h) x_h = \lambda n - 2k \tag{22}$$

och

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) y_h + \sum_{h=\lambda+1}^{h=\infty} (\lambda - h) y_h = \lambda r - 2k . \tag{23}$$

Emedan tydligen

$$\lambda - h < 0 \text{ för } h \geqq \lambda + 1 , \tag{24}$$

och emedan qvantiteterna x_h och y_h äro positiva eller noll, så är den andra summan i venstra membrum af hvardera af eqvationerna (22) och (23) negativ eller noll, och alltså erhålla vi af dessa eqvationer

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) x_h \geqq \lambda n - 2k \tag{25}$$

och

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) y_h \geqq \lambda r - 2k . \tag{26}$$

Om vi addera dessa två olikheter samt använda EULERS formel på högra membrum, så erhålla vi olikheten

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h)(x_h + y_h) \geqq (\lambda - 4)k + 2\lambda , \tag{27}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem V. Om λ är ett helt tal, större än eller lika med 3, så gälla för hvarje konvex polyeder olikheterna

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda}(\lambda - h)x_h \geqq \lambda n - 2k\,,$$

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda}(\lambda - h)y_h \geqq \lambda r - 2k\,,$$

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda}(\lambda - h)(x_h + y_h) \geqq (\lambda - 4)k + 2\lambda\,.$$

För $\lambda = 3$ erhålla vi af de två första formlerna i detta teorem

$$2k \geqq 3n\,, \quad 2k \geqq 3r\,, \tag{28}$$

och af den tredje formeln följer den förut bevisade olikheten

$$k \geqq 6\,. \tag{29}$$

Om vi medelst EULERS formel (6) eliminera k ur de båda olikheterna (28) så finna vi

$$2r - 4 \geqq n\,, \quad 2n - 4 \geqq r\,. \tag{30}$$

Om vi åter medelst samma formel eliminera n ur den första och r ur den andra af olikheterna (28), så erhålles

$$3r - 6 \geqq k\,, \quad 3n - 6 \geqq k\,. \tag{31}$$

Af de sex olikheterna (28), (30), (31) härledas lätt följande formler:

$$\frac{k+6}{3} \leqq n \leqq \frac{2k}{3}\,, \quad \frac{k+6}{3} \leqq r \leqq \frac{2k}{3}\,, \tag{32}$$

$$\frac{3n}{2} \leqq k \leqq 3n - 6\,, \quad \frac{3r}{2} \leqq k \leqq 3r - 6\,, \tag{33}$$

$$\frac{n+4}{2} \leqq r \leqq 2n - 4\,, \quad \frac{r+4}{2} \leqq n \leqq 2r - 4\,. \tag{34}$$

De tre formlerna i den andra vertikalraden erhållas af de motsvarande formlerna i första vertikalraden genom permutation af n och r.

Vi sammanföra dessa formler i följande teorem.

Teorem VI. För hvarje konvex polyeder gälla olikheterna

$$\frac{k+6}{3} \leqq n \leqq \frac{2k}{3}, \qquad \frac{k+6}{3} \leqq r \leqq \frac{2k}{3},$$

$$\frac{3n}{2} \leqq k \leqq 3n-6, \qquad \frac{3r}{2} \leqq k \leqq 3r-6,$$

$$\frac{n+4}{2} \leqq r \leqq 2n-4, \qquad \frac{r+4}{2} \leqq n \leqq 2r-4.$$

Medelst de nu bevisade formlerna

$$n \geqq \frac{k+6}{3}, \quad r \geqq \frac{k+6}{3} \tag{35}$$

kunna de två första formlerna i teorem V transformeras. Vi erhålla nämligen af dessa formler

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) x_h \geqq \left(\frac{\lambda}{3} - 2\right) k + 2\lambda \tag{36}$$

och

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) y_h \geqq \left(\frac{\lambda}{3} - 2\right) k + 2\lambda, \tag{37}$$

och detta teorem kan alltså sättas under följande form.

Teorem VII. Om λ är ett helt tal, som är större än eller lika med 3, så gälla för hvarje konvex polyeder olikheterna

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) x_h \geqq \left(\frac{\lambda}{3} - 2\right) k + 2\lambda,$$

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h) y_h \geqq \left(\frac{\lambda}{3} - 2\right) k + 2\lambda,$$

$$\sum_{h=3}^{h=\lambda} (\lambda - h)(x_h + y_h) \geqq (\lambda - 4) k + 2\lambda.$$

Om vi i detta teorem införa $\lambda = 3$, så erhålla vi blott olikheten (29) till resultat. Sätta vi åter $\lambda = 4$, så få vi de tre formlerna

$$x_3 \geqq 8 - \frac{2k}{3}, \tag{38}$$

$$y_3 \geqq 8 - \frac{2k}{3}, \tag{39}$$

$$x_3 + y_3 \geqq 8. \tag{40}$$

Af olikheten (38) synes, att om en polyeder icke har någon tresidig gränsyta, så har den minst 12 kantlinier. Likaledes synes af olikheten (39), att om en polyeder icke har något trekantigt hörn, så har den minst 12 kantlinier. Af olikheten (40) synes, att antalet af en polyeders tresidiga gränsytor tillsammans med antalet af dess trekantiga hörn är större än eller lika med 8.

Införa vi $\lambda = 5$ i teorem VII, så finna vi

$$2x_3 + x_4 \geqq 10 - \frac{k}{3}, \tag{41}$$

$$2y_3 + y_4 \geqq 10 - \frac{k}{3}, \tag{42}$$

$$2(x_3 + y_3) + x_4 + y_4 \geqq k + 10. \tag{43}$$

Af olikheten (41) följer, att om en polyeder icke har någon tresidig eller fyrsidig gränsyta, så har den minst 30 kantlinier. Af olikheten (42) följer, att om en polyeder icke har något trekantigt eller fyrkantigt hörn, så har den minst 30 kantlinier.

Sätta vi slutligen i det föregående teoremet $\lambda = 6$, så erhålles

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqq 12, \tag{44}$$

$$3y_3 + 2y_4 + y_5 \geqq 12, \tag{45}$$

$$3(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) + x_5 + y_5 \geqq 2k + 12. \tag{46}$$

Af olikheten (44) kan man draga följande slutsatser:

Om en polyeder icke har någon fyrsidig eller femsidig gränsyta, så måste den ha minst 4 tresidiga gränsytor. Om en polyeder icke har någon tresidig eller femsidig gränsyta, så måste den ha minst 6 fyrsidiga gränsytor. Om en polyeder icke har någon tresidig eller fyrsidig gränsyta, så måste den ha minst 12 femsidiga gränsytor.

På samma sätt erhålla vi af olikheten (45) följande resultat:

Om en polyeder icke har något fyrkantigt eller femkantigt hörn, så har den minst 4 trekantiga hörn. Om en polyeder icke har något trekantigt eller femkantigt hörn, så måste den ha minst 6 fyrkantiga hörn. Om en polyeder icke har något trekantigt eller fyrkantigt hörn, så har den minst 12 femkantiga hörn.

Vi skola nu bevisa några olikheter, som antalet x_{n-1} af en polyeders $(n-1)$-sidiga gränsytor satisfierar, och vi skilja för den skull följande fyra fall:

1) Om $n = 4$, så följer af eqv. (10)

$$x_{n-1} = 4\,. \tag{47}$$

2) Om $n \geqq 5$, så erhålles genom elimination af x_3 ur eqvationerna (10) och (14)

$$x_4 + 2x_5 + 3x_6 + \ldots + (n-4)x_{n-1} = 2k - 3n\,, \tag{48}$$

och alltså

$$(n-4)x_{n-1} \leqq 2k - 3n\,. \tag{49}$$

Men enligt teorem VI är

$$k \leqq 3n - 6\,, \tag{50}$$

och alltså följer af olikheten (49)

$$x_{n-1} \leqq 3\,. \tag{51}$$

3) Om $n \geqq 6$, så kan enligt det föregående x_{n-1} icke vara större än 3, men vi skola här visa, att x_{n-1} i själfva verket icke kan vara större än 2. Ty om x_{n-1} vore lika med 3, så skulle polyedern ha tre $(n-1)$-sidiga gränsytor; den första af dessa gränsytor har $n-1$ hörn, som också äro hörn på polyedern; den andra gränsytan har likaledes $n-1$ hörn, men emedan två af dessa hörn, men icke flera än två, äfven kunna höra till den första gränsytan, så erhålla vi från den andra gränsytan minst $n-3$ nya hörn på polyedern. Den tredje gränsytan har äfven $n-1$ hörn, men emedan fyra af dessa hörn, men icke flera än fyra, kunna tillhöra den första och den andra gränsytan, så erhålla vi från den tredje gränsytan minst

$n-5$ nya hörn på polyedern förutom de förut räknade. Häraf skulle tydligen följa

(52) $$r \geqq (n-1) + (n-3) + (n-5)$$

eller

(53) $$r \geqq 3n - 9\,.$$

Men enligt teorem VI är

(54) $$r \leqq 2n - 4\,,$$

och af formlerna (53) och (54) skulle följa genom elimination af r

(55) $$n \leqq 5\,.$$

Emedan detta resultat strider mot antagandet, att $n \geqq 6$, så är härmed bevisadt, att i detta fall

(56) $$x_{n-1} \leqq 2\,.$$

4) Om $n \geqq 6$, och om samtidigt $k \leqq 3n - 7$, så kan enligt det föregående x_{n-1} icke vara större än 2, men vi skola visa, att i detta fall x_{n-1} ej kan öfverstiga 1. Ty om x_{n-1} vore lika med 2, så skulle polyedern ha två $(n-1)$-sidiga gränsytor; den första af dessa gränsytor har $n-1$ hörn, som äfven äro hörn på polyedern; den andra gränsytan har likaledes $n-1$ hörn, men emedan två af dessa hörn, men icke flera än två, äfven kunna höra till den första gränsytan, så erhålla vi från den andra gränsytan minst $n-3$ nya hörn på polyedern. Häraf skulle följa

(57) $$r \geqq (n-1) + (n-3)$$

eller

(58) $$r \geqq 2n - 4\,.$$

Men enligt teorem VI är

(59) $$r \leqq 2n - 4\,,$$

och af olikheterna (58) och (59) skulle vi få

(60) $$r = 2n - 4$$

och således med användning af formeln (6)

$$k = 3n - 6 . \tag{61}$$

Emedan denna likhet strider mot antagandet, att $k \leqq 3n - 7$, så är härmed bevisadt, att i detta fall

$$x_{n-1} \leqq 1 . \tag{62}$$

Vi skola nu härleda analoga formler för antalet y_{r-1} af en polyeders $(r-1)$-kantiga hörn, och vi skilja äfven nu fyra fall:

1) Om $r = 4$, så följer af eqv. (13)

$$y_{r-1} = 4 . \tag{63}$$

2) Om $r \geqq 5$, så erhålles genom elimination af y_3 ur eqvationerna (13) och (15)

$$y_4 + 2y_5 + 3y_6 + \ldots + (r-4)y_{r-1} = 2k - 3r \tag{64}$$

och alltså

$$(r-4)y_{r-1} \leqq 2k - 3r . \tag{65}$$

Men enligt teorem VI är

$$k \leqq 3r - 6 , \tag{66}$$

och alltså få vi af olikheten (65)

$$y_{r-1} \leqq 3 . \tag{67}$$

3) Om $r \geqq 6$, så kan, enligt hvad nu visats, y_{r-1} icke vara större än 3, men vi skola bevisa, att y_{r-1} i detta fall icke kan vara större än 2. Ty om y_{r-1} vore lika med 3, så skulle polyedern ha tre $(r-1)$-kantiga hörn. I det första af dessa hörn sammanträffa $r-1$ gränsytor på polyedern; i det andra hörnet sammanlöpa likaledes $r-1$ gränsytor, men emedan två af dessa gränsytor, men icke flera än två, äfven kunna höra till det första hörnet, så erhålla vi från det andra hörnet minst $r-3$ nya gränsytor på polyedern; i det tredje hörnet sammanlöpa äfven $r-1$ gränsytor, men emedan fyra af dessa gränsytor, men icke flera än fyra, äfven kunna höra till det första och

det andra hörnet, så erhålla vi från det tredje hörnet minst $r-5$ nya gränsytor på polyedern. Häraf skulle följa

(68) $$n \geqq (r-1)+(r-3)+(r-5)$$

eller

(69) $$n \geqq 3r-9 .$$

Men enligt teorem VI är

(70) $$n \leqq 2r-4 ,$$

och af formlerna (69) och (70) skulle följa genom elimination af n

(71) $$r \leqq 5 ,$$

hvilket strider mot antagandet, att $r \geqq 6$, och alltså är härmed bevisadt, att i detta fall

(72) $$y_{r-1} \leqq 2 .$$

4) Om $r \geqq 6$ och samtidigt $k \leqq 3r-7$, så kan enligt det föregående y_{r-1} icke vara större än 2, men man kan visa, att y_{r-1} i detta fall icke öfverstiger 1. Ty vore y_{r-1} lika med 2, så skulle polyedern ha två $(r-1)$-kantiga hörn. I det första af dessa hörn skulle sammanlöpa $r-1$ gränsytor på polyedern; i det andra hörnet skulle likaledes sammanlöpa $r-1$ gränsytor, men emedan högst två af dessa gränsytor äfven kunna höra till det första hörnet, så erhålla vi från det andra hörnet minst $r-3$ nya gränsytor. Häraf skulle följa

(73) $$n \geqq (r-1)+(r-3)$$

eller

(74) $$n \geqq 2r-4 .$$

Men enligt teorem VI är

(75) $$n \leqq 2r-4 ,$$

och af formlerna (74), (75) skulle vi erhålla

(76) $$n = 2r-4$$

och således enligt formeln (6)

(77) $$k = 3r-6 .$$

Emedan detta resultat strider mot antagandet, att $k \leqq 3r - 7$, så är härmed visadt, att i detta fall

$$y_{r-1} \leqq 1 . \tag{78}$$

Vi sammanföra de nu bevisade olikheterna för qvantiteterna x_{n-1} och y_{r-1} i följande teorem.

Teorem VIII. För de konvexa polyedrarne gälla följande formler:

$$x_{n-1} = 4, \text{ om } n = 4,$$
$$x_{n-1} \leqq 3, \text{ om } n = 5,$$
$$x_{n-1} \leqq 2, \text{ om } n \geqq 6, \text{ och } k = 3n - 6,$$
$$x_{n-1} \leqq 1, \text{ om } n \geqq 6, \text{ och } k \leqq 3n - 7,$$

samt

$$y_{r-1} = 4, \text{ om } r = 4,$$
$$y_{r-1} \leqq 3, \text{ om } r = 5,$$
$$y_{r-1} \leqq 2, \text{ om } r \geqq 6, \text{ och } k = 3r - 6,$$
$$y_{r-1} \leqq 1, \text{ om } r \geqq 6, \text{ och } k \leqq 3r - 7.$$

§ 3.

Applikationer af de föregående teoremen.

Enligt teorem II är

$$n + r = k + 2, \quad n \geqq 4, \quad r \geqq 4, \quad k \geqq 6. \tag{79}$$

Antalet af en polyeders kanter, som således är större än eller lika med sex, använda vi här såsom grund för indelningen af de konvexa polyedrarne i klasser, så att vi föra två polyedrar till samma klass eller till olika klasser allteftersom deras kantantal äro lika eller olika. För en ytterligare indelning af de polyedrar, som höra till samma klass, begagna vi oss af talen n, x_3, x_4, x_5, ... och af talen r, y_3, y_4, y_5, ..., och vi skola härvid använda de i § 2 bevisade formlerna

$$x_h \geqq 0 \text{ för } 3 \leqq h \leqq n - 1; \quad x_h = 0 \text{ för } h \geqq n, \tag{80}$$

$$x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} = n, \quad 3x_3 + 4x_4 + \ldots + (n-1)x_{n-1} = 2k, \tag{81}$$

(82) $y_h \geqq 0$ för $3 \leqq h \leqq r-1$; $y_h = 0$ för $h \geqq r$,

(83) $y_3 + y_4 + \ldots + y_{r-1} = r$, $3y_3 + 4y_4 + \ldots + (r-1)y_{r-1} = 2k$,

(84) $$\frac{k+6}{3} \leqq n \leqq \frac{2k}{3}, \quad \frac{k+6}{3} \leqq r \leqq \frac{2k}{3}.$$

Om vi nu i dessa formler införa

(85) $$k = 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

så erhålla vi följande resultat.

1) För $k = 6$ få vi af formlerna (79)

(86) $$n + r = 8, \quad n \geqq 4, \quad r \geqq 4,$$

och alltså

(87) $$n = 4, \quad r = 4,$$

och af formlerna (80), ...(84) erhålla vi

(88) $$x_3 = 4, \quad x_4 = x_5 = x_6 = \ldots = 0,$$

(89) $$y_3 = 4, \quad y_4 = y_5 = y_6 = \ldots = 0.$$

Således blifva alla talen n, r, x_3, x_4, x_5, ... y_3, y_4, y_5, ... fullt bestämda, och vi kunna alltså häraf draga följande slutsats:

Det finnes blott en polyeder med 6 kantlinier; denna har 4 tresidiga gränsytor och 4 trekantiga hörn (tetraedern).

2) För $k = 7$ få vi af de första olikheterna (84)

(90) $$\tfrac{13}{3} \leqq n \leqq \tfrac{14}{3},$$

och emedan dessa olikheter icke satisfieras af något helt tal n, så få vi följande sats:

Det finnes ingen polyeder med 7 kantlinier.

3) För $k = 8$ få vi af formlerna (84)

(91) $$\tfrac{14}{3} \leqq n \leqq \tfrac{16}{3}, \quad \tfrac{14}{3} \leqq r \leqq \tfrac{16}{3}$$

och alltså, emedan n och r äro hela tal,

(92) $$n = 5, \quad r = 5,$$

och af eqv. (79), ...(84) erhålla vi

(93) $$x_3 + x_4 = 5, \quad 3x_3 + 4x_4 = 16, \quad x_5 = x_6 = x_7 = \ldots = 0$$

och

(94) $$y_3 + y_4 = 5, \quad 3y_3 + 4y_4 = 16, \quad y_5 = y_6 = y_7 = \ldots = 0.$$

Af dessa likheter följer

(95) $x_3 = 4\,,\quad x_4 = 1\,,\quad x_5 = x_6 = x_7 = \ldots = 0\,,$

(96) $y_3 = 4\,,\quad y_4 = 1\,,\quad y_5 = y_6 = y_7 = \ldots = 0\,.$

Således blifva i detta fall alla talen n, r, x_3, x_4, $\ldots y_3$, y_4, $\ldots$ fullt bestämda, och vi erhålla denna sats:

Det finnes blott en polyeder med 8 kantlinier; denna har 4 tresidiga och 1 fyrsidig gränsyta samt 4 trekantiga och 1 fyrkantigt hörn (fyrsidiga pyramiden).

4) För $k = 9$ få vi af formlerna (84)

(97) $$5 \leqq n \leqq 6\,,$$

och alltså är antingen $n = 5$ eller $n = 6$.

α) Om $n = 5$, så följer af eqv. (79) att $r = 6$, och af formlerna (80), $\ldots$ (84) få vi

(98) $x_3 + x_4 = 5\,,\quad 3x_3 + 4x_4 = 18\,,\quad x_5 = x_6 = \ldots = 0\,,$

och

(99) $y_3 + y_4 + y_5 = 6\,,\; 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 = 18\,,\; y_6 = y_7 = y_8 = \ldots = 0\,.$

Af dessa likheter få vi, alldenstund de hela talen x_h, y_h aldrig äro negativa,

(100) $x_3 = 2\,,\quad x_4 = 3\,,\quad x_5 = x_6 = x_7 = \ldots = 0\,,$

(101) $y_3 = 6\,,\quad y_4 = 0\,,\quad y_5 = y_6 = y_7 = \ldots = 0\,,$

hvarmed alla talen x_h, y_h äro fullt bestämda.

β) Om $n = 6$, så följer af eqv. (79), att $r = 5$, och af formlerna (80), $\ldots$ (84) få vi i detta fall

(102) $x_3 + x_4 + x_5 = 6\,,\; 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 18\,,\; x_6 = x_7 = x_8 = \ldots = 0$

och

(103) $y_3 + y_4 = 5\,,\quad 3y_3 + 4y_4 = 18\,,\quad y_5 = y_6 = y_7 = \ldots = 0\,.$

Af dessa likheter få vi nu

(104) $x_3 = 6\,,\quad x_4 = 0\,,\quad x_5 = x_6 = x_7 = \ldots = 0\,,$

(105) $y_3 = 2\,,\quad y_4 = 3\,,\quad y_5 = y_6 = y_7 = \ldots = 0\,,$

hvarmed alla talen x_h och y_h äro fullt bestämda.

Af likheterna (100), (101) och (104), (105) följer, att det finnes blott två polyedrar med 9 kantlinier; den ena har 2 tresidiga och 3 fyrsidiga gränsytor samt 6 trekantiga hörn (tresidiga prismat); den andra har 6 tresidiga gränsytor samt 2 trekantiga och 3 fyrkantiga hörn (denna polyeder bildas af två tetraedrar, som stå på samma bas men på olika sidor om denna).

På detta sätt kan man fortsätta undersökningen för $k = 10$, 11, 12, ..., men förfaringssättet blir allt svårare, ju större talet k är.

Om en polyeders alla gränsytor ha samma sidoantal, och om vi beteckna detta antal med ν, så är tydligen

$$(106) \qquad 3 \leqq \nu \leqq n - 1\,, \quad x_\nu = n\,, \quad x_h = 0 \text{ för } h \gtrless \nu\,,$$

och af eqv. (14) följer i detta fall

$$(107) \qquad \nu x_\nu = 2k$$

eller enligt formlerna (106)

$$(108) \qquad \nu n = 2k\,,$$

och af den andra af olikheterna (31) och eqv. (108) erhålles genom elimination af n

$$(109) \qquad (6 - \nu)k \geqq 6\nu\,,$$

hvaraf synes, att $\nu = 3$, 4 eller 5.

Hafva åter en polyeders alla hörn samma kantantal, och om vi beteckna detta antal med ϱ, så är

$$(110) \qquad 3 \leqq \varrho \leqq r - 1\,, \quad y_\varrho = r\,, \quad y_h = 0 \text{ för } h \gtrless \varrho\,,$$

och af eqv. (15) få vi alltså

$$(111) \qquad \varrho y_\varrho = 2k$$

eller enligt formlerna (110)

$$(112) \qquad \varrho r = 2k\,;$$

genom elimination af r ur den första af olikheterna (31) och eqv. (112) finna vi

$$(113) \qquad (6 - \varrho)k \geqq 6\varrho\,,$$

af hvilken olikhet vi sluta, att $\varrho = 3$, 4 eller 5.

Vi kalla här en polyeder homogen, om 1) alla dess gränsytor ha samma sidoantal, och 2) alla dess hörn ha samma kantantal. För hvarje homogen polyeder gälla således samtidigt formlerna (6), (108), (112), d. v. s.

$$n + r = k + 2\,, \quad \nu n = 2k\,, \quad \varrho r = 2k\,, \tag{114}$$

och äfven är, som ofvan visats,

$$\nu = 3,\ 4,\ 5\,; \quad \varrho = 3,\ 4,\ 5\,. \tag{115}$$

Man finner lätt, att eqv. (114) och (115) satisfieras blott af fem system af hela positiva värden på qvantiteterna n, ν, r, ϱ, k, nämligen

$$n = 4,\ \nu = 3,\ r = 4,\ \varrho = 3,\ k = 6, \tag{116}$$

$$n = 8,\ \nu = 3,\ r = 6,\ \varrho = 4,\ k = 12, \tag{117}$$

$$n = 20,\ \nu = 3,\ r = 12,\ \varrho = 5,\ k = 30, \tag{118}$$

$$n = 6,\ \nu = 4,\ r = 8,\ \varrho = 3,\ k = 12, \tag{119}$$

$$n = 12,\ \nu = 5,\ r = 20,\ \varrho = 3,\ k = 30. \tag{120}$$

Häraf följer, att det finnes blott fem homogena konvexa polyedrar. Den första af dessa har 4 tresidiga gränsytor, 4 trekantiga hörn och 6 kantlinier (tetraedern); den andra har 8 tresidiga gränsytor, 6 fyrkantiga hörn och 12 kantlinier (oktaedern); den tredje har 20 tresidiga gränsytor, 12 femkantiga hörn och 30 kantlinier (ikosaedern); den fjärde har 6 fyrsidiga gränsytor, 8 trekantiga hörn och 12 kantlinier (hexaedern); den femte har 12 femsidiga gränsytor, 20 trekantiga hörn och 30 kantlinier (dodekaedern).

Om vi med d beteckna antalet af en konvex polyeders diagonaler, så gäller enligt teorem IV formeln

$$d = \frac{r(r-1)}{2} + 2k - \tfrac{1}{2} \sum_{h=3}^{h=n-1} h^2 x_h\,. \tag{121}$$

För de homogena polyedrarne förenklas denna likhet medelst formlerna (106) till

$$d = \frac{r(r-1)}{2} + 2k - \frac{\nu^2 n}{2}\,, \tag{122}$$

och om vi använda eqv. (116), ...(120) på eqv. (122), så finna vi, att tetraedern icke har någon diagonal, samt att oktaedern har 3, ikosaedern 36, hexaedern 4 och dodekaedern 100 diagonaler.

§ 4.

Om de regulära polyedrarne.

En konvex homogen polyeder kallas regulär, om alla dess gränsytor äro regulära kongruenta polygoner, och om alla dess diedriska vinklar äro lika stora. Enligt § 3 finnes det sålunda blott fem regulära polyedrar. Alla kantlinier i en regulär polyeder äro tydligen lika stora, och vi beteckna med a längden af en kantlinie; äfven använda vi de i de föregående paragraferna införda talen n, ν, r, ϱ, k med deras derstädes angifna betydelse. Vidare förstå vi med I vinkeln mellan två bredvid hvarandra liggande gränsytor, så att $0 < I < \pi$. Dessutom sätta vi

R_1 = radien i den i en gränsyta inskrifna cirkeln,
R_2 = radien i den omkring en gränsyta omskrifna cirkeln,
R_3 = radien i den i polyedern inskrifna sferen,
R_4 = radien i den sfer, som tangeras af polyederns kanter,
R_5 = radien i den omkring polyedern omskrifna sferen.

Vi skola nu härleda uttryck för dessa fem radier och för vinkeln I medelst de tre qvantiteterna a, ν, ϱ, hvilka fullständigt bestämma en regulär polyeder både till storlek och form.

Vi beteckna för den skull med O polyederns medelpunkt, med G en gränsytas medelpunkt, med H och K ändpunkterna af en af denna gränsytas kantlinier samt med L denna kantlinies midtpunkt. Då är tydligen

$$R_1 = GL\,, \quad R_2 = GH\,, \tag{123}$$

$$R_3 = OG\,, \quad R_4 = OL\,, \quad R_5 = OH\,, \tag{124}$$

och

$$\frac{I}{2} = OLG\,. \tag{125}$$

I triangeln GHL är vinkeln GLH rät, vinkeln HGL är lika med $\frac{\pi}{\nu}$, sidan HL är lika med $\frac{a}{2}$, och alltså få vi

$$(126)\quad R_1 = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{\nu}, \quad R_2 = \frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\nu}, \quad R_2^2 = R_1^2 + \frac{a^2}{4}.$$

I triangeln OGL är vinkeln OGL rät, och således är

$$(127)\quad R_3 = R_1 \operatorname{tg}\frac{I}{2}, \quad R_4 = R_1 \sec\frac{I}{2}, \quad R_4^2 = R_1^2 + R_3^2.$$

I triangeln OGH är vinkeln OGH rät, och vi få alltså

$$(128)\quad R_5^2 = R_2^2 + R_3^2.$$

I triangeln OLH är vinkeln OLH rät, och alltså är

$$(129)\quad R_5^2 = R_4^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Om den rätvinkliga triangeln GHL projicieras från O på den omkring polyedern omskrifna sferen, så erhålles på denna en sferisk triangel $G_1H_1L_1$, der H_1 sammanfaller med H, och der

$$(130)\quad \sin\frac{G_1H_1}{R_5} = \frac{R_2}{R_5}, \quad \sin\frac{H_1L_1}{R_5} = \frac{a}{2R_5},$$

och der

$$(131)\quad G_1L_1H_1 = \frac{\pi}{2}, \quad H_1G_1L_1 = \frac{\pi}{\nu}, \quad G_1H_1L_1 = \frac{\pi}{\varrho}.$$

Projiciera vi nu denna triangel på en sfer med radien 1 och med samma medelpunkt O, så erhålla vi på denna sfer en sferisk triangel $G_2H_2L_2$, der

$$(132)\quad G_2H_2 = \frac{G_1H_1}{R_5}, \quad H_2L_2 = \frac{H_1L_1}{R_5},$$

och der

$$(133)\quad G_2L_2H_2 = G_1L_1H_1, \quad H_2G_2L_2 = H_1G_1L_1,$$
$$G_2H_2L_2 = G_1H_1L_1,$$

och för denna sferiska triangel $G_2H_2L_2$, som ligger på en sfer med radien 1, gälla således formlerna

$$(134) \qquad \sin G_2H_2 = \frac{R_2}{R_5}, \quad \sin H_2L_2 = \frac{a}{2R_5}$$

samt

$$(135) \qquad G_2L_2H_2 = \frac{\pi}{2}, \quad H_2G_2L_2 = \frac{\pi}{\nu}, \quad G_2H_2L_2 = \frac{\pi}{\varrho},$$

och med användning af likheterna (128) och (129) erhålla vi af eqv. (134)

$$(136) \quad \cos G_2H_2 = \frac{R_3}{R_5}, \quad \operatorname{tg} G_2H_2 = \frac{R_2}{R_3}, \quad \operatorname{tg} H_2L_2 = \frac{a}{2R_4}.$$

Men enligt trigonometrien gälla för den rätvinkliga sferiska triangeln $G_2H_2L_2$ formlerna

$$(137) \qquad \operatorname{tg} L_2H_2 = \operatorname{tg} G_2H_2 \cdot \cos G_2H_2L_2$$

och

$$(138) \qquad \cos G_2H_2 = \cot G_2H_2L_2 \cdot \cot H_2G_2L_2,$$

och om vi använda eqv. (135) och (136) på dessa formler, så erhålla vi

$$(139) \qquad \frac{a}{2R_4} = \frac{R_2}{R_3} \cos \frac{\pi}{\varrho}$$

och

$$(140) \qquad \frac{R_3}{R_5} = \cot \frac{\pi}{\varrho} \cdot \cot \frac{\pi}{\nu}.$$

Medelst eqvationerna (126), (127), (139), (140) kunna vi nu uttrycka radierna R_3, R_4, R_5 samt $\sin \frac{I}{2}$ medelst qvantiteterna a, ν, ϱ. Om vi i eqv. (139) införa det af eqv. (126) gifna värdet på R_2, så kunna eqv. (139) och (140) sättas under formen

$$(141) \qquad R_3 = R_4 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\nu} \cdot \cos \frac{\pi}{\varrho}$$

och

$$(142) \qquad R_3 = R_5 \cot \frac{\pi}{\nu} \cdot \cot \frac{\pi}{\varrho},$$

och enligt eqv. (126) och (127) är

$$(143) \qquad \sin \frac{I}{2} = \frac{R_3}{R_4}$$

samt

$$R_4^2 = \frac{a^2}{4}\cot^2\frac{\pi}{\nu} + R_3^2. \tag{144}$$

Af dessa fyra formler erhålla vi nu

$$R_3 = \frac{a}{2}\frac{\cot\frac{\pi}{\nu}\cdot\cos\frac{\pi}{\varrho}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{\nu} - \cos^2\frac{\pi}{\varrho}}}, \tag{145}$$

$$R_4 = \frac{a}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{\nu}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{\nu} - \cos^2\frac{\pi}{\varrho}}}, \tag{146}$$

$$R_5 = \frac{a}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{\varrho}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{\nu} - \cos^2\frac{\pi}{\varrho}}}, \tag{147}$$

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{\varrho}}{\sin\frac{\pi}{\nu}}. \tag{148}$$

Arean af en gränsyta på polyedern är tydligen lika med $\frac{\nu a R_1}{2}$, och om vi med S beteckna polyederns hela yta och med V dess volym, så är

$$S = \frac{n\nu a R_1}{2}, \quad V = \frac{S R_3}{3} = \frac{n\nu a R_1 R_3}{6}, \tag{149}$$

och således enligt eqv. (126) och (145)

$$S = \frac{n\nu a^2}{4}\cot\frac{\pi}{\nu}, \quad V = \frac{n\nu a^3}{24}\cdot\frac{\cot^2\frac{\pi}{\nu}\cdot\cos\frac{\pi}{\varrho}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{\nu} - \cos^2\frac{\pi}{\varrho}}}. \tag{150}$$

Om vi nu använda eqv. (126), (145)...(150) på de fem reguljära polyedrarne, så erhålla vi följande resultat:

1) För tetraedern är $n = 4$, $\nu = 3$, $\varrho = 3$, och vi få

$$R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \tag{151}$$

$$R_3 = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \quad R_5 = \frac{a\sqrt{6}}{4}, \tag{152}$$

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} I = \sqrt{8}; \tag{153}$$

$$S = a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}. \tag{154}$$

2) För oktaedern är $n = 8$, $\nu = 3$, $\varrho = 4$, och vi få

$$R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \tag{155}$$

$$R_3 = \frac{a\sqrt{6}}{6}, \quad R_4 = \frac{a}{2}, \quad R_5 = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \tag{156}$$

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{I}{2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} I = -\sqrt{8}, \tag{157}$$

$$S = 2a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}. \tag{158}$$

3) För ikosaedern är $n = 20$, $\nu = 3$, $\varrho = 5$, och alltså

$$R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \tag{159}$$

$$R_3 = \frac{a(3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{12}, \quad R_4 = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{4}, \quad R_5 = \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \tag{160}$$

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}, \quad \operatorname{tg}\frac{I}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \operatorname{tg} I = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \tag{161}$$

$$S = 5a^2\sqrt{3}, \quad V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}. \tag{162}$$

4) För hexaedern är $n = 6$, $\nu = 4$, $\varrho = 3$, och vi få

$$R_1 = \frac{a}{2}, \quad R_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \tag{163}$$

$$R_3 = \frac{a}{2}, \quad R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad R_5 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \tag{164}$$

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{I}{2} = 1, \quad \operatorname{tg} I = \infty, \tag{165}$$

$$S = 6a^2, \quad V = a^3. \tag{166}$$

5) För dodekaedern är $n = 12$, $\nu = 5$, $\varrho = 3$, och således

$$R_1 = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,, \quad R_2 = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}\,, \tag{167}$$

$$R_3 = \frac{a}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}\,, \quad R_4 = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5})\,, \quad R_5 = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})\,, \tag{168}$$

$$\sin\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}\,, \quad \operatorname{tg}\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\,, \quad \operatorname{tg} I = -2\,, \tag{169}$$

$$S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,, \quad V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})\,. \tag{170}$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 8.
Stockholm.

Einige neue Formeln der Theorie der elliptischen Functionen. II.

Von

FRANS DE BRUN.

(Mitgetheilt den 12. Oktober 1898 durch M. FALK.)

In einer vorhergehenden Abhandlung (K. V. A. Ö. 1897, N:o 5) habe ich eine Formel, mit der bekannten

$$[p(u+\omega)-e_1][p(u)-e_1]=(e_1-e_2)(e_1-e_3)$$

analog hergeleitet, nämlich

$$\left[p\left(u-\frac{2\omega}{3}\right)-p\left(\frac{2\omega}{3}\right)\right]\left[p(u)-p\left(\frac{2\omega}{3}\right)\right]\left[p\left(u+\frac{2\omega}{3}\right)-p\left(\frac{2\omega}{3}\right)\right]=$$

$$=-p'^2\left(\frac{2\omega}{3}\right).$$

Jetzt will ich zeigen, wie diese beiden Formeln sich weiter verallgemeinern lassen.

Wenn 2ω und $2\omega'$ die primitiven Perioden der Function $p(u)$ bezeichnen, lasset uns die rationalen, symmetrischen Functionen der N elliptischen Functionen

$$p\left(u-\frac{2\nu\omega}{N}\right)-p\left(\frac{2\omega}{N}\right)$$

für

$$\nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \pm(k-1),\ \pm k$$

betrachten, wenn N eine *ungrade* Zahl, $2k+1$, ist, und wenn N eine *grade*, $2k$, ist, die symmetrischen Functionen der

$$p\left(u - \frac{2\nu\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)$$

für

$$\nu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \pm (k-1), \ + k.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$F_1(u) = \sum_{\nu} \left[p\left(u - \frac{2\nu\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]$$

$$F_2(u) = \sum_{\substack{\nu_1,\ \nu_2 \\ \nu_1 \neq \nu_2}} \left[p\left(u - \frac{2\nu_1\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]\left[p\left(u - \frac{2\nu_2\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]$$

. . . .

$$F_N(u) = \prod_{\nu} \left[p\left(u - \frac{2\nu\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right].$$

Diese $F_1(u)$, $F_2(u)$, $\ldots F_N(u)$ sind dann periodische Functionen mit den Perioden $\frac{2\omega}{N}$ und $2\omega'$. Da sie weiter grade Functionen sind, müssen sie sich durch $p\left(u\,;\ \frac{2\omega}{N},\ 2\omega'\right)$ rational ausdrücken lassen, und da jede im Periodenparallelogramme höchst zweiter Ordnung und nur in einer einzigen Stelle unendlich wird, sind sie alle ganze, lineare Functionen von $p\left(u\,;\ \frac{2\omega}{N},\ 2\omega'\right)$.

Die Function $F_N(u)$ nimmt in der Stelle $u = 0$ einen endlichen Werth an. Sie muss also gleich einer Constante sein:

$$F_N(u) = A_N.$$

Um diese Constante A_N zu bestimmen ist zu bemerken, dass das linke Glied für $u = 0$ in

$$-p'^2\left(\frac{2\omega}{N}\right) \prod_{\nu=2}^{k} \left[p\left(\frac{2\nu\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]^2,$$

übergeht, wenn

$$N = 2k + 1$$

ist, aber

$$-\left[p(\omega)-p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]\cdot p'^2\left(\frac{2\omega}{N}\right)\cdot\prod_{\nu=2}^{k-1}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{N}\right)-p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]^2$$

wird, wenn

$$N=2k$$

ist. Wir haben folglich

$$\left.\begin{aligned}&\left[p\left(u-\frac{2k\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\left[p\left(u-\frac{2(k-1)\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\cdots\\&\quad\cdots\left(p(u)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\cdots\left[p\left(u+\frac{2(k-1)\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\\&\qquad\left[p\left(u+\frac{2k\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]=\\&=-p'^2\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\prod_{\nu=2}^{k}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]^2\end{aligned}\right\}(1)$$

und

$$\left.\begin{aligned}&\left[p(u-\omega)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\left[p\left(u-\frac{k-1}{k}\omega\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\cdots\\&\cdots\left[p(u)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\cdots\left[p\left(u+\frac{k-1}{k}\omega\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]=\\&=-p'^2\left(\frac{\omega}{k}\right)\left[p(\omega)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\prod_{\nu=2}^{k-1}\left[p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]^2,\end{aligned}\right\}(1^*)$$

welche beide Formeln für $k\geqq 2$ gelten. Für k gleich der Einheit sind sie, wie wir vorher erwähnt haben, modificiert.

Die Function $F_{N-1}(u)$, welche im Periodenparallelogramme $\left(\frac{2\omega}{N},\ 2\omega'\right)$ keine andere singulären Stellen als $u=0$ haben kann, ist doch in dieser Stelle der zweiten Ordnung nicht unendlich. Da sie ferner nicht erster Ordnung sein kann, muss sie auch eine Constante sein. Um den Werth dieser zu erreichen bilden wir

$$\frac{F_{N-1}(u)}{F_N(u)}=\sum_\nu\frac{1}{p\left(u-\frac{2\nu\omega}{N}\right)-p\left(\frac{2\omega}{N}\right)}.$$

Wenn N eine ungrade Zahl ist, und wir die beiden Glieder nach ganzen Potenzen entwickeln, erhalten wir in der Umgebung der Stelle $u = 0$

$$\frac{F_{N-1}(u)}{F_N(u)} = 2\sum_{\nu=2}^{k} \frac{1}{p\left(\frac{2\nu\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)} - \frac{p''\left(\frac{2\omega}{N}\right)}{p'^2\left(\frac{2\omega}{N}\right)} + u\mathfrak{P}(u),$$

wo $\mathfrak{P}(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Hieraus und aus der Formel (1) ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mu} \prod_{\nu \neq \mu}' \left[p\left(u - \frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right] = \\
&= p''\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right) \prod_{\nu=2}^{k} \left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]^2 - \\
&- 2p'^2\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right) \prod_{\nu=2}^{k} \left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]^2 \cdot \\
&\cdot \sum_{\nu=2}^{k} \frac{1}{p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Auf demselben Weg finden wir

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mu} \prod_{\nu \neq \mu}' \left[p\left(u - \frac{\nu\omega}{k}\right) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] = \\
&= p''\left(\frac{\omega}{k}\right)\left[p(\omega) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] \prod_{\nu=2}^{k-1} \left[p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]^2 - \\
&- p'\left(\frac{\omega}{k}\right)\left[p(\omega) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] \prod_{\nu=2}^{k-1} \left[p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right] \cdot \\
&\cdot \left\{2\sum_{\nu=2}^{k} \frac{1}{p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)} + \frac{1}{p(\omega) - p\left(\frac{\omega}{k}\right)}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (2^*)$$

Wie die Formel (2) für $k = 1$ geändert wird, geht aus der Formel (22) meiner vorher erwähnten Abhandlung hervor.

In solcher Weise können wir für jede der übrigen, symmetrischen Functionen $F_\mu(u)$ leicht die beiden Constanten herleiten. Wir wollen hier nur dieselben der $F_2(u)$ und $F_1(u)$ bestimmen. Man hat

$$F_2(u) = \sum_{\substack{\nu_1\nu_2 \\ \nu_1 \neq \nu_2 \\ \nu_1 \neq 0 \\ \nu_2 \neq 0}}{}' \left[p\left(u - \frac{2\nu_1\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right]\left[p\left(u - \frac{2\nu_2\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right] +$$

$$+ \left[p(u) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right] \sum_{\substack{\nu_3 \\ \nu_3 \neq 0}}{}' \left[p\left(u - \frac{2\nu_3\omega}{N}\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right] =$$

$$= A_2 + B_2 p\left(u; \frac{2\omega}{N}, 2\omega'\right).$$

Wenn wir nach ganzen Potenzen von u entwickeln und die Coefficienten derselben Potenzen beider Glieder mit einander vergleichen, erhalten wir, falls N ungrade Zahl — $2k+1$ — ist,

$$B_2 = \sum_{\substack{\nu_3 \\ \nu_3 \neq 0}}{}' \left[p\left(\frac{2\nu_3\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right] = 2\sum_{\nu=2}^{k}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]$$

$$A_2 = p''\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right) - 2p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\sum_{\nu=2}^{k}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{\substack{\nu_1\nu_2 \\ \nu_1 \neq 0 \\ \nu_2 \neq 0}}{}' \left[p\left(\frac{2\nu_1\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\left[p\left(\frac{2\nu_2\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right].$$

Also ist

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\nu_1\nu_2 \\ \nu_1 \neq \nu_2}} \left[p\left(u - \frac{2\nu_1\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\left[p\left(u - \frac{2\nu_2\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right] = \\
&= p''\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right) - 2p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\sum_{\nu=2}^{k}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right] + \\
&+ \sum_{\substack{\nu_1\nu_2 \\ \nu_1 \neq 0 \\ \nu_2 \neq 0}} \left[p\left(\frac{2\nu_1\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]\left[p\left(\frac{2\nu_2\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right] + \\
&+ 2p\left(u; \frac{2\omega}{2k+1}, 2\omega'\right)\cdot\sum_{\nu=2}^{k}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right) - p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right].
\end{aligned}\right\} (3)$$

Wenn dagegen N grade Zahl ist, haben wir

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\nu_1\nu_2\\ \nu_1\neq\nu_2}}\left[p\left(u-\frac{\nu_1\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\left[p\left(u-\frac{\nu_2\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]=\\
&=p''\left(\frac{\omega}{k}\right)-2p\left(\frac{\omega}{k}\right)\sum_{\nu=2}^{k-1}\left[p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\left[p(\omega)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]+\\
&\qquad+\sum_{\nu_1\nu_2}\left[p\left(\frac{\nu_1\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\left[p\left(\frac{\nu_2\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]+\\
&+p\left(u;\,\frac{\omega}{k},\,2\omega'\right)\left\{p(\omega)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)+2\sum_{\nu=2}^{k-1}\left[p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(3^*)$$

Auch ergiebt sich ferner

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\left[p\left(u-\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]=p\left(u;\,\frac{2\omega}{2k+1},\,2\omega'\right)+\\
&\qquad+2\sum_{\nu=2}^{k}\left[p\left(\frac{2\nu\omega}{2k+1}\right)-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right)\right]-p\left(\frac{2\omega}{2k+1}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\left[p\left(u-\frac{\nu\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]=p\left(u;\,\frac{\omega}{k},\,2\omega'\right)+\\
&\qquad+2\sum_{\nu=2}^{k-1}\left[p\left(\frac{\nu\omega}{k}\right)-p\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]+p(\omega)-2p\left(\frac{\omega}{k}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(4^*)$$

Wenn wir mit $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ zwei Constanten bezeichnen, können wir

$$F_\varkappa(u)=A_\varkappa+B_\varkappa p\left(u;\,\frac{2\omega}{N},\,2\omega'\right)\quad(5)$$

setzen.

Dann sind die Wurzeln der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&x^N-\left[A_1+B_1p\left(u;\,\frac{2\omega}{N},\,2\omega'\right)\right]x^{N-1}+\dots\\
&\quad+(-1)^{N-1}A_{N-1}x+(-1)^NA_N=0
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

ausgedrückt durch

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p(u\,;\,2\omega\,,\,2\omega') - p\left(\frac{2\omega}{N}\,;\,2\omega\,,\,2\omega'\right) \\ x_2 &= p\left(u - \frac{2\omega}{N}\,;\,2\omega\,,\,2\omega'\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\,;\,2\omega\,,\,2\omega'\right) \\ x_3 &= p\left(u + \frac{2\omega}{N}\,;\,2\omega\,,\,2\omega'\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\,;\,2\omega\,,\,2\omega'\right) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Im Falle der trigonometrischen Functionen tritt

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2}(\cot^2 u - 1)$$

statt der Function $pu - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)$ ein. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 4(2\,\mathrm{Cot}^2\,4u + 1)x^3 + 2(1 - 2\,\mathrm{Cot}^2\,4u)x^2 + 4x + 1 = 0$$

sind

$$x_1 = \varphi(u)\,, \quad x_2 = \varphi\left(u - \frac{\pi}{4}\right), \quad x_3 = \varphi\left(u + \frac{\pi}{4}\right), \quad x_4 = \varphi\left(u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Da in der allgemeinen Gleichung 4:ten Grades nur eine Constante wesentlich ist, können wir uns die Gleichung in der Form

$$x^4 - 2(4 - p)x^3 + px^2 + 4x + 1 = 0$$

denken. Durch Vergleichung der verschiedenen Coefficienten erhalten wir

$$\mathrm{Cot}\,4u = \pm\frac{\sqrt{2 - p}}{2}\,.$$

Um die Sache nicht zu umständlich zu behandeln, so nehmen wir an, dass p reell und kleiner als 2 ist. Mit Hülfe der gewöhnlichen, trigonometrischen Tabellen findet man die entsprechenden Werthe von $4u$, woraus u hervorgeht. Darauf bildet man

$$\varphi(u)\,, \quad \varphi\left(u - \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi\left(u + \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi\left(u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Für die besonderen Constanten $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ können wir auch andere Werthe als die vorher erhaltenen angeben. Wenn wir z. B. in $F_N(u)$ u gleich ω' setzen, wird

$$A_N = \prod_\nu \left[p\left(\frac{2\nu\omega}{N} - \omega'\right) - p\left(\frac{2\omega}{N}\right)\right].$$

Ferner ist es klar, dass sämtliche Formeln (1)—(7) eben so gut gelten, wenn ω durch $\tilde{\omega} = p\omega + q\omega'$ ersetzt wird, wo p und q ganze Zahlen, welche nicht beide mit N theilbar sind, bezeichnen.

Relationen zwischen den vorstehenden $p\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{N}\right)$ und den Invarianten g_2 und g_3 sind leicht zu erhalten. Man hat nämlich

$$\frac{\sigma(Nu)}{\sigma^{N^2}(u)} = \frac{(-1)^{N-1}}{(\underline{|1}\,\underline{|2}\,\underline{|3}\ldots\underline{|N-1})^2} \cdot \begin{vmatrix} p'(u), & p''(u), & \ldots p^{(N-1)}(u) \\ p''(u), & p'''(u), & \ldots p^{(N)}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{(N-1)}(u), & p^{(N)}(u), & \ldots p^{(2N-3)}(u) \end{vmatrix}.$$

Die Determinante $P_N(u)$ muss dann die Nullstellen $\frac{2\nu\tilde{\omega}}{N}$ haben. Für ungrade Werthe von N ist, wie bekannt,

$$P_N(u) = G(pu\,;\ \tfrac{1}{2}g_2\,,\ g_3)_{\frac{N^2-1}{2}},$$

und für alle graden Werthe von N ist

$$P_N(u) = p'(u) \cdot G(pu\,;\ \tfrac{1}{2}g_2\,,\ g_3)_{\frac{N^2-4}{2}},$$

wo $G(pu\,;\ \frac{1}{2}g_2\,,\ g_3)_\varkappa$ eine ganze Function der drei Grössen pu, $\frac{1}{2}g_2$, g_3 mit ganzzahligen Zahlencoefficienten bezeichnet, und $\varkappa$ den Grad der $G(pu\,;\ \frac{1}{2}g_2\,,\ g_3)_\varkappa$ in Bezug auf das Argument pu. Die Gleichungen

$$G\left(p\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{2k+1}\right);\ \tfrac{1}{2}g_2\,,\ g_3\right)_{2k^2+2k} = 0 \qquad (8)$$

$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots k)$$

oder

$$G\left(p\left(\frac{\nu\tilde{\omega}}{k}\right);\ \tfrac{1}{2}g_2\,,\ g_3\right)_{2k^2-2} = 0 \qquad (8^*)$$

$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots (k-1))$$

zeigen den Zuzammenhang zwischen $p\left(\frac{2\nu\tilde{\omega}}{N}\right)$ und g_2, g_3.

Auch können wir die Relationen zwischen $p\left(\frac{2\nu_1\tilde{\omega}}{N}\right)$ und $p\left(\frac{2\nu_2\tilde{\omega}}{N}\right)$ herleiten. Man geht aus von der Formel

$$p(u) - p(\nu) = \frac{\sigma(\nu - u)\sigma(u + \nu)}{\sigma^2 u \sigma^2 \nu}.$$

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 496.)

Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-hist. Cl. Bd. 136 (1897)—137 (1897). 8:o.
Archiv f. österreichische Geschichte. Bd. 84: 1—2. 1897—98. & Register zu Bd. 51—80. 1897. 8:o.
Almanach. Jahrg. 47 (1897). 8:o.
— *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 39 (1894); 42 (1897). 4:o.
— *K. K. Militär-geographisches Institut.*
Die astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd 12. 1898. 4:o.
— *K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 48 (1898): H. 7. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Jahrbuch. Bd. 47 (1897): H. 3—4; 48 (1898): 1. 8:o.
Verhandlungen. 1898: N:o 11—12. 8:o.
— *Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.*
Schriften. Bd 38 (1897/98). 8:o.

Af utgifvarne:
Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. 1898: N:o 3. 8:o.

Af författarne:
BÄCKLUND, A. V., Inledning till theorien för de elektriska strömmarne. Lund 1898. 8:o.
HENNING, E., De vigtigaste å kulturväxterna förekommande Nematoderna. Sthm 1898. 8:o.
MÜLLER, E., Handlingar rörande tillsättandet af professuren i anatomi vid Karolinska Mediko-kirurgiska Institutet. Sthm 1898. 8:o.
CALVIN, S., The interglacial deposits of northeastern Iowa. Des Moines 1898. 8:o.
JENSEN, C., Mosser fra Øst-Grønland. Khvn 1898. 8:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 8.
Stockholm.

Om induktionselektricitets inverkan på fröns groningsenergi och groningsförmåga.

Af Fr. E. Ahlfvengren.

(Meddeladt den 12 Oktober 1898 af V. Wittrock.)

Att växter, som befinna sig i jord, genom hvilken en elektrisk ström passerar, gynnas i sin vegetativa utveckling, är af gammalt bekant och numera väl konstateradt. »Elektriciteten påskyndar vegetabiliernas groning och tillväxt», säger redan prosten C. Bjerkander från Vestergötland (1735—1795), och humlerankor skola växa dubbelt eller mera än vanligt under åskväder,[1]) och så tidigt som 1770 lär abbé Bertholon hafva uppfunnit en »elektrovegetometer». Medelst särskilda apparater att tillgodogöra sig den atmosfäriska elektriciteten användes numera ett dylikt förfaringssätt i praktiskt syfte med goda resultat. Rättikor, rädisor, morötter, o. s. v. skola antaga häpnadsväckande dimensioner i elektricerad jord, och prof. Spechneff i Kiew konstaterar, att skörden i de med elektricitet behandlade köksträdgårdarna förhåller sig till den i de icke elektricerade som 4 till 1. Vid vinodling har detta förfaringssätt dessutom den stora fördelen att bevara plantorna från skadeinsekter, företrädesvis phylloxeran.

På detta område hafva utom Spechneff i synnerhet fransmannen Grandeau och finnen prof. Lemström med framgång arbetat.[2])

---

[1]) C. F. Nyman: Sveriges fanerogamer. Örebro 1868. s. 211.

[2]) På djuriska organismers utveckling har elektriciteten däremot ett hämmande och skadligt inflytande. Kycklingar, som kläckts ur ägg, genom hvilka in-

Däremot hafva resultaten vid elektriska försök med fröns groning utfallit olika för olika försöksställare. Närmast föranledd af en nyss utkommen uppsats af A. S. KINNEY[1]) och det bevismaterial, han däri anför, har författaren under våren 1897 på Lunds botaniskt-fysiologiska laboratorium[2]) anställt en del groningsförsök med frön, behandlade med en elektrisk ström, för att utröna dennas inverkan på groningsenergien och groningsförmågan. De, som förut anställt liknande försök, hafva till största delen erhållit ett resultat, som talar till förmån för elektricitetens inverkan.

SPECHNEFF[3]) använde induktionselektricitet och fann, att denna påskyndade groningen. Efter att hafva stöpt fröna i vatten, tills de voro fullständigt genomblötta, lade han dem i glascylindrar, öppna i båda ändarna, mellan tvenne kopparskifvor, som utgjorde poler för en induktionsström, och lät strömmen passera genom dessa frön en eller två minuter, hvarefter de omedelbart såddes. Temperaturen hölls vid 45—50° Fahrenheit (= 7—10° C.). Försök med bönor, ärter, korn och solrosfrö utföllo sålunda, att de med elektricitet behandlade fröna och de icke behandlade grodde respektive efter följande antal dagar: bönor 2,5 och 4; ärter 3 och 6; korn 2 och 5; solrosfrö 8,5 och 15.

PAULIN[4]) använde åter friktionselektricitet och behandlade därmed sädesfrön en timme och frön af skogsträd tolf timmar dagligen under 8 dagars tid. Resultatet utföll gynnsamt, t. o. m. så gynnsamt, att den elektriska strömmen väckte lif i frön, som synbarligen förlorat all vitalitet(!). Frön, som under vanliga

duktionsströmmar passerat, voro oftast missbildade, och deras dödlighetsprocent var ända till 3 gånger större än hos de ur icke behandlade ägg framkläckta. Liknande resultat erhölls med forellyngel. (WINDLE, C. A., On the effects of electricity and magnetism on development. — Journ. of Anat. and Physiol., vol. 29, s. 346.)

[1]) A. S. KINNEY: Elektro-germination. — Hatch exp. station. Mass. agric. college. — Bull. N:o 43. Jan. 1897. Amherst, Mass. 1897.

[2]) Till dess föreståndare, Doc. Dr. B. JÖNSSON, hembär jag härmed mitt hjärtliga tack för hans stora tillmötesgående och hans för dessa undersökningar visade intresse.

[3]) Enl. KINNEY anf. st.

[4]) De l'influence de l'électricité sur la végétation. Montbrisson 1891.

förhållanden icke grodde, gjorde det hastigt efter elektrisk behandling, och alla så behandlade frön egde större groningsenergi och gåfvo bättre plantor än frön, som icke blifvit underkastade dylik behandling. Fröna måste likväl sås, medan de voro våta, eljest var elektriciteten utan verkan.

TSCHINKEL[1]) gjorde groningsförsök i jord, som genomströmmades af en galvanisk ström, hvarvid det visade sig, att groningen försiggick 6—8 dagar tidigare i denna elektricerade jord. WOLLNY[2]), som anställde liknande försök med råg, raps, ärter, bönor, majs, m. fl., fann däremot elektricitetens inflytande vara intet eller t. o. m. negativt. Induktionsströmmar utöfvade ej heller någon inverkan.

ASA S. KINNEY[3]) underkastar frön af hvitsenap, rödklöfver, raps och korn elektrisk behandling med såväl induktions- som med direkta strömmar (hufvudsakligen dock det förstnämnda slaget). Resultatet visar sig positivt för det behandlade fröet. Vidare använder han induktionsströmmar af olika styrka för att utröna deras olika verkan och visar, att det i detta hänseende gifves ett visst optimum, hvilket skulle ligga vid omkring 3 volt, ett minimum vid något under en volt, hvaremot maximumsgränsen ej kunnat närmare bestämmas. Likväl synes detta resultat egentligen mera gälla dessa strömmars inverkan på rötternas och stamdelarnas tillväxt hos groddplantan än på själfva groningen.

Den apparat, han för sitt ändamål använder, består af en modifikation af en vanlig RUHMKORFF's apparat, så inrättad, att den sekundära rullen är flyttbar och kan aflägsnas från den primära. Ju större afståndet mellan dessa båda rullar är, desto svagare är också induktionsströmmen och vice versa.

Som resultat af sina undersökningar, grundadt på framställda groningstabeller, framhåller förf., att användning af en viss elektrisk strömstyrka under en kort tidsperiod påskyndar groningsprocessen. Det befanns, att efter 24 timmars för-

[1]) Enl. KINNEY a. st.

[2]) E. WOLLNY: Elektrische Culturversuche. — Forsch. Agr. Bd. 10. Heidelberg 1888. (Enl. ref. i Just:Jahresber. 1888. Abt. 1. s. 98).

[3]) Anf. st.

lopp[1]) mer än 30 % flere frön hade grott af de behandlade partierna än af de normala, och efter 48 timmar omkring 20 % mera. Vidare gåfvo de frön, som erhållit elektrisk retning, en högre totalprocent af grobarhet (groningsförmåga) än de andra. Hans siffror äro följande:

		Behandl. parti.	Obehandl. parti.	Vinst i %.
Medeltal af frön, grodda i hvarje del efter	24 timmar	9,93	7,50	32,40
	48 »	18,00	14,87	21,05
	72 »	19,14	18,00	6,33.

En annan tablå visar något ringare vinst med 17,65 %, 11,47 %, 2,38 % och 2,38 % efter resp. 24, 48, 72 och 96 timmars förlopp.

Mot hans metod torde med fog kunna anmärkas, att alldeles för få frön användts vid försöken. 200 frön uppdelas i 8 lotter, en till kontroll och hvar och en af de 7 återstående behandlas med strömmar af olika styrka, således blott 25 frön i hvarje lott. Har man blott aldrig så litet sysslat med groningsförhållanden, finner man snart, att resultat af så ringa kvantiteter kunna vara mycket vilseledande. Men förutsatt, att i föreliggande fall resultaten äro uttryck för det verkliga förhållandet, få de dock icke ett så storartadt utseende, om vi transformera dessa hans siffror till vanliga procentsiffror. De skulle då te sig på följande sätt:

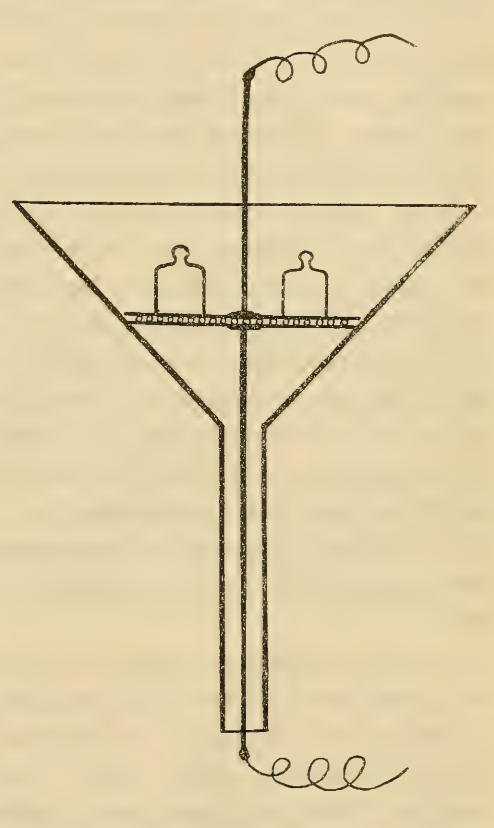
		Behandl. parti.	Obehandl. parti.	Vinst i %.
Medelprocent frö, grodt efter	24 timmar	39,72	30,00	9,72
	48 »	72,00	59,48	12,52
	72 »	76,56	72,00	4,56.

Apparater och metoder.

Till elektricitetskälla har användts ett batteri af 4 stycken, bredvid hvarandra ordnade, BUNSEN's element af MEININGER's modell, hvilka framför andra element ega den fördelen att under

[1]) D. v. s. egentligen efter 48 timmar, då han tydligen icke inräknar de 24 timmar, under hvilka han hade fröet i stöp.

en längre tid hålla en konstant strömstyrka. Att äfven detta batteri under den hela 6 veckor långa försökstiden, hvarunder det var i oafbruten verksamhet både dag och natt, hade ungefär samma strömstyrka och icke förlorat något däraf vid försökstidens slut, visade en i ledningen då och då insatt galvanometer (Ampèremätare), som nästan alltid gaf samma utslag. Olikheterna däri voro obetydliga och gingo aldrig öfver $^1/_5$ ampère. Hela batteriet lämnade något öfver 4 volt.



Detta batteri förenades med en vanlig induktionsapparat, hvarefter induktionsströmmen på sätt, som nedanför beskrifves, fick passera genom det frö, som för tillfället var försöksmaterial. Något bestämdt mått på denna strömstyrka har af lätt insedda skäl ej skaffats. Endast om dess fysiologiska verkan må framhållas, att vid beröring af induktionsströmmens båda poler denna godt kunde uthärdas, utan att några häftigare muskelsammandragningar åstadkommos.

För att låta den elektriska strömmen passera genom fröna användes till en början en likadan apparat, som SPECHNEFF användt, nämligen glascylindrar, som voro öppna i båda ändarna. I dessa placerades försöksmaterialet mellan tvenne galvaniserade järnbleck, hvilka tjänstgjorde som poler i induktionsappa-

raten. Dessa glascylindrar visade sig emellertid mindre ändamålsenliga i praktiskt hänseende, hvarför i deras ställe med bättre framgång användes en medelstor, i ett stativ fasthållen glastratt, som med lätthet tillät frönas inläggning och borttagande. Figuren på förra sidan visar utseendet af denna apparat och sättet för dess användning.

I och för groningen inlades större frön, såsom råg, korn, hafre, o. s. v., i konvolut af vanligt svenskt filtrerpapper, hvilka konvolut sedan fingo ligga i zinklådor, beklädda med samma slags papper. Fuktighet åstadkoms genom breda pappersremsor, likaledes af dylikt filtrerpapper, hvilka med sin ena ända lågo i vanligt vattenledningsvatten och med den andra stodo i förbindelse med zinklådans inre beklädnad. Denna höll på detta sätt städse en jämn fuktighet, som åter meddelades åt de på densamma liggande konvoluten med de inneslutna fröprofven. Tall- och granfrö åter, som gror bättre vid ljusets tillträde, fick därför ligga på porslinstallrikar, täckta med glasskifvor och beklädda med filtrerpapper, som hölls fuktigt på samma sätt som hos zinklådornas. För mindre fröslag, såsom klöfverfrö och små gräsfrö, användes den på Malmöhus läns frökontrollanstalt brukliga förbättrade JACOBSEN'ska groningsmetoden med ventilerade glasklockor hvälfda öfver de på fuktigt filtrerpapper fritt liggande fröna.

För att erhålla så likartad kvalitet som möjligt på det parti, som skulle undersökas, gjordes efter bästa förmåga urval af likstora och likformade, väl utbildade frön. Därefter uppdelades det sålunda erhållna partiet i mindre lotter, hvilka alla *samtidigt* inlades till groning utan föregående stöpning i vatten. Härigenom blefvo hela partiets alla lotter under hela groningstiden sålunda utsatta för samma yttre förhållanden i afseende på temperatur, fuktighet, o. s. v., så när som på den olika behandlingen med induktionsströmmen. Hvarje lott innehöll vanligen 200 frön, men af mindre fröslag 300—500 och af större 100 eller 150. En eller vanligen två af dessa lotter behandlades icke med den elektriska strömmen, utan fingo gro under vanliga

förhållanden och tjänstgjorde som kontrollprof till jämförelse. Temperaturen var hela tiden 17°—20° C.

De våta och svällda fröna voro under den tid, de behandlades i tratten, i större eller mindre grad utsatta för torkning. För att undanrödja denna fara blefvo de båda polskifvorna af järnbleck beklädda med vått filtrerpapper. Härigenom hölls god fuktighet i t. o. m. 12 timmar. Detta förfaringssätt hade därjämte den fördelen, att de svällda fröna skyddades mot sönderkrossning vid placerandet af den öfre polskifvan. Naturligtvis fick man där vid lag tillse, att pappersskifvorna vid de olika blecken icke kommo i beröring med hvarandra, om man skulle hafva säkerhet för, att den elektriska strömmen också verkligen passerade genom själfva fröna. Vid småfrön kunde denna olägenhet icke undvikas, hvarför vid deras behandling endast den undre bleckskifvan hade en tunn beklädnad eller också ingendera. På den öfre bleckskifvan ställdes en del vikter för att få den att sluta väl till fröna och därigenom också göra afståndet mellan de båda polerna så litet som möjligt.

Vanligen har endast vått och svälldt frö behandlats med induktionselektriciteten — framdeles för korthetens skull benämndt endast *våt behandling* — men i vissa fall äfven torrt frö (då naturligtvis utan det våta papperet på järnblecken) — *torr behandling*.

De våta fröna voro för induktionsströmmen relativt goda ledare, de torra däremot mindre goda. Om man med fingrarna vidrörde de båda polerna, kändes ingen ström, när de förra lågo mellan bleckskifvorna, men däremot passerade hela strömmen genom kroppen, då de senare voro i apparaten. Mot *direkta* strömmar gjorde äfven de våta fröna, t. o. m. så små som de af *Trifolium hybridum* i blott enkelt lager, så starkt motstånd, att det icke lyckades uppbringa strömstyrkan högre än till 5 och vid större frön, såsom råg, blott till 0,1 mikroampère. Jag afstod därför att använda direkta strömmar, då jag ej var i tillfälle att anskaffa kraftigare elektricitetskälla. Af KINNEY's försök framgår också, att så svaga direkta strömmar hafva ingen

eller ytterst ringa inverkan på groningsprocessen. Eljest vore det af rent teoretiska skäl af stort intresse att få jämföra deras inverkan med induktionsströmmarnas. Man skulle nämligen här få ytterligare en faktor med i räkningen, deras förmåga att sönderdela vattnet. Induktionsströmmarnas inverkan torde väl endast kunna hänföras till rena retningsmedel.

Groningsprocessen och resultat däraf.

Resultatet för hvarje fröslag är här nedanför framställdt i särskilda tabeller. Dessa äro i afseende på behandlingssättet och frönas beskaffenhet ordnade i fyra grupper, hvartill kommer en femte, som icke behöfver framställas medelst siffror.

Första gruppen (tab. 1—14) omfattar nytt och friskt frö af allmänna kulturväxter, som normalt ega stor groningsenergi och groningsförmåga. De hithörande fröslagen hafva underkastats behandling med elektricitet längre eller kortare tid, såsom synas af de speciella tabellerna, men blott *en enda* gång, våt eller torr eller bådadera. Den våta behandlingen har verkställts 12—24 timmar efter frönas inläggning till groning eller så fort de varit synbart ansvällda. Den torra åter har utförts *omedelbart före* deras inläggning.

Andra gruppen (tab. 15 och 16) skiljer sig från första endast därigenom, att den våta behandlingen har upprepats dagligen under flera dagar.

Tredje gruppen (tab. 17—22) utgöres likaledes af nytt och friskt frö, men skiljer sig från föregående genom en långsammare groningsprocess. Groningsenergien är här mindre. Behandlingen har, såsom i andra gruppen, upprepats dagligen en längre tid.

Fjärde gruppen (tab. 23—26) omfattar äldre frö med betydligt minskad groningsförmåga. Behandling såsom i förra gruppen.

Femte gruppen består af gammalt frö, som helt och hållet förlorat sin groningsförmåga (dödt frö). Behandling såsom i tredje gruppen.

Grupp 1.

Tab. 1. *Råg* (*Secale cereale* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag								Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	7	8	10		
1. Utan behandling. . .	10.5	*65.5*	4.0	5.5	2.5	1.5	1.0	1.0	91.5	200
2. » » . . .	34.5	*44.0*	6.0	5.0	1.5	0.0	0.5	1.0	92.5	»
3. Våt beh. i 5 min. . .	*55.0*	30.0	4.5	3.0	0.5	0.5	0.0	0.5	94.0	»
4. » » » 10 » . .	*41.5*	36.0	7.0	1.0	4.5	0.0	1.0	0.0	91.0	»
5. » » » 2 timmar	*47.5*	34.0	7.5	1.0	1.0	0.5	0.0	0.0	91.5	»
6. » » » 15 »	*77.0*	11.0	1.5	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	92.5	»

Tab. 2. *Råg* (*Secale cereale* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag								Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	7	8	10		
1.⎱ Utan behandling . .	*15.7*	*70.7*	6.3	1.0	0.3	0.0	0.0	0.3	94.3	300
2.⎰ Torr beh. i 2 timmar	11.0	*56.0*	*24.5*	2.3	1.0	0.0	0.0	0.3	95.0	»
1 a.⎱ Utan behandling .	9.0	*47.5*	*29.7*	4.0	2.0	1.3	0.7	1.0	95.0	»
2 a.⎰ Våt beh. i 2 timmar	*20.5*	*54.0*	14.0	3.0	1.7	1.0	0.3	1.0	95.3	»

Tab. 3. *Hvete* (*Triticum vulgare Vill. v. hibernicum* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag				Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5		
1. Utan behandling	0.0	57.0	28.0	9.0	94.0	200
2. Torr » i 11 timmar	0.0	79.0	13.0	3.0	95.0	100
3. Våt » » 24 »	16.5	68.5	7.5	3.0	95.5	200

Tab. 4. *Korn* (*Hordeum vulgare* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag					Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	6	10		
1. Utan behandling . . .	45.5	42.0	9.0	0.0	0.0	96.5	200
2. » » . . .	54.0	35.0	5.5	0.0	0.0	94.5	»
3. Torr beh. i 11 timmar	64.0	31.0	3.0	0.0	0.0	98.0	»
4. Våt » » 14 »	75.5	14.5	2.0	2.0	1.0	95.0	»

Tab. 5. *Probsteierhafre* (*Avena sativa* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag						Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	10		
1. Utan behandling . . .	27.3	*58.7*	6.7	3.3	2.7	0.0	98.7	150
2. Torr behandl. i 12 tim.	25.0	*68.0*	4.0	1.0	1.0	0.0	99.0	100
3. Våt » » 9 »	*54.7*	40.0	0.7	1.3	2.7	0.0	99.3	150

Tab. 6. *Hafre* (*Avena sativa* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag							Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	7	10		
1. Utan behandling	1.3	67.3	19.3	7.3	1.3	0.7	0.0	97.3	150
2. Torr behandl. i 15 timmar	30.0	50.0	15.0	2.0	1.0	0.0	0.0	98.0	100
3. Våt behandl. » 12 »	0.0	72.7	17.3	8.0	0.0	0.7	0.0	98.7	150

Tab. 7. *Hafre* (*Avena sativa* L.). Agnar borttagna.

Behandlingssätt.	% grodt under dag		Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	1	2		
1. Utan behandling	17.0	83.0	100.0	100
2. Torr behandling i 17 timmar . . .	31.0	69.0	100.0	»
3. Våt » » 16 » . . .	45.0	55.0	100.0	»

Tab. 8. *Timotej* (*Phleum pratense* L.).

Behandlingssätt.	% grodt under dag					Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	3	4	5	6	7		
1. Utan behandling . . .	28.7	*41.7*	15.3	3.0	2.0	90.7	300
2. Torr beh. i 10 tim. .	*44.7*	27.7	13.3	0.8	7.0	93.5	400
3. Våt beh. » 10 » .	*37.0*	35.0	13.3	4.4	2.0	91.7	300

Tab. 9. *Spergel* (*Spergula arvensis* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag							Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	1	2	3	4	5	6	10		
1. Utan behandling	1.4	72.2	14.0	5.0	1.4	0.6	0.0	94.6	500
2. Våt behandl. i 12 timmar .	1.2	81.6	8.6	2.0	1.2	1.0	0.2	95.8	»

Tab. 10. *Alsikeklöfver* (*Trifolium hybridum* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag						% frö		Antal försöksfrö.
	1	2	3	4	5	10	grodt	hårdt	
1. Utan behandling. . . .	0.0	*64.6*	14.2	7.6	1.4	4.0	91.8	5.4	500
2. Våt beh. i 14 timmar .	0.0	*45.2*	32.0	8.6	3.0	2.2	91.0	6.2	»
1 a. Utan behandling. . .	4.0	*47.2*	27.4	7.2	3.0	2.2	91.0	6.2	»
2 a. Våt beh. i 5 timmar.	8.0	*40.4*	30.4	6.0	1.2	2.6	88.6	9.2	»

Tab. 11. *Käringgigel* (*Lotus corniculata* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag				% frö		Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	grodt	hårdt	
1. Utan behandling . . .	*59.0*	22.5	3.0	7.5	92.0	0.5	400
2. Torr beh. i 16 timmar	*67.0*	19.0	4.5	5.0	95.5	0.7	»
3. Våt beh. i 14 timmar	33.0	*43.0*	8.0	7.5	91.5	1.0	»

Tab. 12. *Hvitsenap* (*Sinapis alba* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag					Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	10		
1. Utan behandling . . .	*92.5*	6.5	0.0	1.0	0.0	100.0	200
2. Torr beh. i 10 timmar	*58.0*	35.0	3.5	1.5	0.5	98.5	»
3. Våt beh. i 4 timmar .	*81.0*	17.5	1.0	0.5	0.0	100.0	»
4. » » » 12 timmar	*77.0*	21.5	1.0	0.0	0.0	99.5	»

Tab. 13. *Rödklöfver* (*Trifolium pratense* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag								% frö		Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	7	8	10	grodt	hårdt	
1. Utan behandling . . .	*49.2*	30.0	6.6	1.0	0.7	0.5	0.3	0.0	88.3	10.5	400
2. » » . . .	*49.8*	37.4	4.3	0.3	1.0	0.0	0.0	0.0	92.8	6.2	»
3. Torr beh. i 3 timmar	27.8	*51.4*	5.0	1.3	0.5	0.5	0.5	0.8	87.8	11.5	»
4. Våt » » 3 timmar	*48.0*	37.0	1.2	0.6	0.7	0.7	0.0	0.3	88.5	9.5	»

Tab. 14. *Hvitklöfver* (*Trifolium repens* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag						% frö		Antal försöksfrö.
	1	2	3	4	7	10	grodt	hårdt	
1. Utan behandling	0.0	63.0	12.0	2.5	1.5	1.3	80.3	16.7	400
2. Våt behandl. i 2 timmar	1.0	63.5	14.0	2.7	2.1	1.2	84.5	13.2	»
3. » » » 5 »	0.8	68.2	11.3	2.2	2.2	0.6	85.3	13.2	»

Försöka vi nu tolka dessa särskilda tabeller, framgår vid det första ögonkastet utan vidare, att behandling med elektricitet varit gynnsam för en del, ogynnsam för en annan del och utan inverkan på några, hvad groningsenergien beträffar. Torr och våt behandling hafva i allmänhet haft likartad inverkan på samma fröslag, vare sig nu positiv eller negativ; egendomligt förefaller därför det förhållandet, att denna olika behandling haft ett olika och motsatt inflytande på ett par fröslag, nämligen råg och käringgigel (tab. 2 och 11). Orsaken härtill är gifvetvis svår, om ens möjlig att finna.

Vid den *våta behandlingen* har groningsenergien stegrats hos *råg*, *hvete* (28 % efter 3 dagar), *korn*, *hafre*, *timotej* och *spergel* (tab. 1—9), minskats hos *alsikeklöfver*, *käringgigel* och *hvitsenap* (tab. 10—12), hvaremot hos *rödklöfver* och *hvitklöfver* (tab. 13—14) ingen nämnvärd förändring har egt rum vare sig i ena eller andra riktningen. Elektricitetens inverkan yttrar sig vid de tillfällen, då en sådan är påtaglig, i förflyttning af dagen för groningsenergiens maximum (såsom hos tab. 1, 5, 8 en dag tidigare, hos tab. 11 en dag senare än hos de icke behandlade kontrollprofven), eller också sammanfaller maximumsdagen för såväl de behandlade som de icke behandlade partierna, men en förskjutning af groningsenergien har dock tydligen egt rum, gynnsam hos tab. 2—4 och 7, ogynnsam hos tab. 10 och 12. Hos ett par tabeller (6 och 9) är maximumsdagen likaledes densamma för alla partierna och en förskjutning visserligen skönjbar till förmån för elektricitetsbehandlingen, men denna uppgår till så ringa procent, att fråga dock kan uppstå, om det härvidlag icke endast rör sig kring vanlig variation af groningslatituden. Tabeller 13 och 14 uppvisa däremot så obetydlig skillnad mellan de ifrågavarande olika behandlade partierna, att dessa blott och bart måste hänföras till nämnda variationer, d. v. s. elektriciteten har hos dessa varit utan all inverkan.

Den *torra* behandlingen har höjt groningsenergien hos *hvete*, *korn*, *hafre*, *timotej* och *käringgigel* (tab. 3—8 och 11), försenat den hos *råg*, *hvitsenap* och *rödklöfver* (tab. 2, 12—13). För

öfrigt visar sig denna behandling haft samma inverkan i afseende på maximumsdagen för groningsenergien som den våta.

Se vi åter på den inverkan, som åstadkommits genom olika långvarig behandling med elektriciteten på samma fröprof, finna vi äfven här något olika resultat, groningsenergiens förhöjande eller försenande hos de prof, som varit utsatta för längre tids behandling, dock så att denna inverkan går i samma riktning. Energien har höjts i två fall (tab. 1 och 14) och sänkts i två (tab. 10 och 12). Dessa två sista tabeller utgöras just af alsikeklöfver och hvitsenap, hvilka båda rönt ett menligt inflytande af behandlingen. Den menliga inverkan visar sig nu stegrad med behandlingens längd. I det förra fallet åter lemnar särskildt råg (tab. 1) ett vackert exempel på den längre tidsbehandlingens ökade, gynnsamma inflytande. Partiet, som undergått 15 timmars behandling, eger nära 30 % större grobarhet andra dagen än det parti, som underkastats behandling blott 2 timmar.

Adderas de gifna talen för hvarje dags grobarhetsförmåga, ställer sig slutsumman för alla dagarna eller groningsförmågan någorlunda lika för såväl de behandlade som de icke behandlade delarna af samma fröprof, och skillnaden går sällan öfver ett par procent, således blott obetydlig groningslatitud. Skenbart är denna skillnad störst hos leguminosfröna, t. ex. hos tab. 13: parti 2 och 3, där denna uppgår till 5 %, men den utjämnas nästan alldeles, om man, såsom rätt och billigt är, i summan för groningsförmågan inräknar de s. k. hårda fröna.

Om vi till sist för att erhålla ett säkrare mått på elektricitetens inverkan, än hvad hvarje särskild tabell kan lämna, taga medeltalet af dessa tabeller, få vi nedanstående tablå. På det att jämförelsen mellan groningssiffrorna hos de olika behandlingssätten må blifva mera omedelbar, ha dessa siffror för den torra behandlingen beräknats efter samma enhet som för den våta, hvarigenom de i denna tablå endast äro relativa. Siffrorna inom parentes äro motsvarande siffror hos KINNEY's arbete.

	Behandlingssätt.	% grodt efter 2 dygn (48 tim.).	Vinst (+) eller förlust (—) i % genom behandling.	% grodt efter 3 dygn (72 tim.).	Vinst (+) eller förlust (—) i % genom behandling.	Groningsförmåga %	Vinst (+) eller förlust (—) i % genom behandling.	Antal försöksfrö.
Gynnsam inverkan.	1. Utan beh. .	27.37 (30.00)		74.25 (59.48)		95.13 (72.00)		3.200 (200)
	2. Våt » .	46.89 (39.72)	+ 19.52 (+ 9.72)	81.43 (72.00)	+ 7.18 (+ 12.52)	94.98 (76.56)	— 0.15 (+ 4.56)	2.700 (1.400)
	3. Torr » .	33.97 [1])	+ 6.60	81.93 [1])	+ 7.68	96.78	+ 1.65	1.700
Skadlig inverkan.	1. Utan beh. .	66.83		84.48		93.70		2.000
	2. Våt » .	56.92	— 9.91	85.80	+ 1.32	92.52	— 1.18	1.800
	3. Torr » .	42.62 [2])	— 24.21	72.91 [2])	— 11.57	93.31	— 0.39	900

[1]) De absoluta siffrorna för den torra behandlingen äro: för andra dagen 29,14 % för kontrollprofven och 36,17 för torra beh.; för tredje dagen 74,79 % för kontr. och 82,53 % för beh.

[2]) De absoluta siffrorna äro: 54,10 % för kontr. och 34,50 % för beh. efter 2 dygn; 92,70 % och 80,00 % resp. efter 3 dygn.

Talen i den vågräta kolumnen för gynnsam inverkan utgöra medeltal af tabellerna 1—9, af tab. 2 dock endast den våta behandlingen, hvaremot tab. 11 ingår i beräkningen angående den torra behandlingen. Såsom ofvan framhållits, hafva dessa prof visat motsatta resultat vid den våta och torra behandlingen, så att de därför bäst fördelas på de olika horizontala kolumnerna. Siffrorna i kolumnen för skadlig inverkan bildas af medeltalen af tabellerna 10—12, af 11 dock blott den våta, samt af tab. 2 och 13 den torra behandlingen. Tabeller 13 och 14 hafva ej tagits med i dessa medeltalsberäkningar, hvad beträffar den våta behandlingen, alldenstund dessa så behandlade frön visa nära nog samma procentsiffror som hos kontrollprofven. Dessa tabeller hafva likväl medtagits i den allmänna framställningen för att utgöra exempel och bevis på, att vissa fröslag, åtminstone under vissa förhållanden, icke alls reagera för den elektriska strömmen. Till denna indifferenta kategori kunna äfven räknas knylhafre (*Avena elatior* L.), hundäxing (*Dactylis glomerata* L.) och ängssvingel (*Festuca elatior* L.), hvilka fröslag visat så ringa skillnad mellan de behandlade och icke behandlade partierna, att denna faller långt inom tillåten groningslatitud. Det har därför synts onödigt att här taga äfven dem med.

Af de fröslag, som varit undersökningsmaterial äfven för KINNEY, hafva hvitsenap och rödklöfver visat ett resultat, motsatt det, hvartill han kommit. Groningsprocessen har försenats genom behandlingen.

Förklaringsgrunden till det olika inflytandet af den elektriska retningen på olika fröslag måste utan tvifvel sökas i den större eller mindre grad af känslighet, som fröet besitter. KINNEY framhåller, fast hans siffror dock visa det mindre tydligt, att det för strömmen gifves ett minimum, optimum och maximum. När strömstyrkans maximumsgräns är öfverskriden, är inverkan tydligen menlig, och genom sammanlikning med förhållanden från andra områden (t. ex. ljusintensitetens förhållande till växternas heliotropism) kan man med ganska stor sannolikhet antaga, att äfven här, olika för olika fröslag, en viss kritisk punkt finnes.

öfver eller under hvilken strömstyrkan resulterar olika och motsatt.

Anledningen till det förhållandet, att samma fröslag lemnat motsatta resultat för olika författare, skulle då ligga däri, att de användt strömmar af olika styrka, den ene så, att maximumsgränsen varit öfverskriden, den andre däremot haft att göra med strömmar, som icke nått denna gräns. De frön åter, som ej tagit någon inverkan af strömmen, hafva varit utsatta för antingen en för svag ström, som legat under minimum, eller för en sådan, som just befunnit sig i den kritiska maximumsgränsen.

Grupp 2.

Tab. 15. *Hvit vicker* (*Vicia sativa L. v. leucosperma* MÖNCH).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag							Gronings-förmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	7	10		
1. Utan behandling	9.0	42.0	*45.0*	2.7	0.0	0.0	0.0	98.7	300
2. 10 min. dagl. beh. i 5 dagar. .	5.0	*67.0*	25.3	1.7	0.3	0.4	0.0	99.7	»
3. 20 » » » » 5 » . .	7.0	*71.5*	19.0	1.7	0.0	0.3	0.0	99.3	»

Tab. 16. *Bohvete* (*Fagopyrum esculentum* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag							Gronings-förmåga %.	Antal försöksfrö.
	3	4	5	6	7	8	10		
1. Utan behandling	*43.5*	40.0	10.0	2.5	0.5	0.5	0.0	97.0	200
2. Torr beh. i 2 tim.	1.5	30.5	*52.0*	7.0	1.0	1.0	1.0	94.0	»
3. Våt beh. 10 min. dagl. i 5 dag.	25.5	*35.0*	28.0	5.0	1.5	0.0	0.0	95.0	»
4. » » 20 min. dagl. i 5 dag.	17.0	*37.5*	26.0	8.0	2.0	1.0	1.0	92.5	»

Om denna grupp gäller i hufvudsak, hvad som är sagdt om första gruppen. Inverkan har varit gynnsam för hvitvicker, men menlig för bohvete. Groningsenergiens maximumsdag har för de behandlade partierna undergått en förskjutning, i första fallet en dag tidigare, i andra en dag senare och för den torra behandlingen till och med 2 dagar efter; däremot är den slutliga groningsförmågan tämligen lika och faller inom vanlig variation af

groningslatituden. Den olika längden af behandlingen synes ej hafva åstadkommit någon större skillnad i resultatet, men tidsskillnaden har också varit blott 10 minuter. Likväl visa dock siffrorna en viss tendens till stegring i tab. 15 och till sjunkande i tab. 16, således äfven här en om ock svagt ökad eller minskad liflighet i groningsenergien.

Grupp 3.

Tab. 17. *Guldtörne* (*Ulex europæus* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag											Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	4	5	6	7	9	11	14	17	19	21	23		
1. Utan behandling . . . ⎫	6.5	8.0	8.5	1.5	9.5	23.0	7.5	3.5	5.5	3.0	0.5	77.0	200
2. » » . . . ⎭	4.5	10.0	5.5	0.5	14.5	32.0	8.5	4.0	2.0	1.0	1.0	83.5	»
3. Dagl. beh. 5 min. i 12 dag.	3.5	8.0	8.0	0.0	10.0	39.0	5.5	3.5	3.0	3.0	0.5	84.0	»
4. » » 10 » » » »⎫	4.0	4.0	9.0	2.0	12.0	33.5	11.5	4.0	2.0	1.0	0.5	83.5	»
5. » » » » » » »⎭	4.0	10.5	9.5	2.5	13.0	23.5	6.0	2.5	4.0	4.0	0.5	80.0	»
6. » » 30 » » » »	3.5	10.5	6.0	2.5	10.0	31.0	9.5	3.0	2.5	1.5	1.5	81.5	»

Tab. 18. *Sockerbeta* (*Beta vulgaris* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag														Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	18	21	24	28		
1. Utan behandling . . . ⎫	4	29	18	10	12	4	3	3	0	1	3	4	1	0	92	100
2. » » . . . ⎭	0	7	40	18	11	3	2	2	6	0	3	0	0	0	92	»
3. Dagl. beh. 10 min. i 14 dag.	9	16	9	13	15	9	5	1	5	2	5	1	0	0	90	»
4. » » 20 » » » »⎫	1	37	20	11	10	2	2	4	0	1	2	0	0	1	91	»
5. » » » » » » »⎭	13	17	15	13	12	3	5	1	0	3	4	0	1	1	88	»
6. » » minst 1 timme i 14 dagar .	6	36	20	7	12	3	4	0	2	2	1	0	1	0	94	»

Tab. 19. *Sockerbeta* (*Beta vulgaris* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag															Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	18	21	24	28		
1. Utan behandling . . ⎫	0	3	29	33	18	9	2	0	0	2	0	1	0	0	0	97	100
2. » » . . ⎭	0	4	20	29	18	14	3	0	1	3	1	1	0	0	0	94	»
3. Dagl. beh. 10 m. i 14 d.⎫	2	16	27	12	11	11	5	0	0	2	4	3	1	0	0	94	»
4. » » » » » » »⎭	1	18	29	15	12	4	2	0	1	1	7	3	1	0	1	95	»
5. » » 20 » » » »	0	1	22	34	23	5	2	1	1	2	0	1	2	2	0	96	»

Tab. 20. *Tallfrö* (*Pinus silvestris* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag												Gronings-förmåga %.	Antal försöksfrö.
	5	6	7	8	9	10	11	13	16	18	22	26		
1. Utan behandling . . . . . }	3.0	5.5	7.0	6.0	11.5	6.0	3.0	15.0	15.5	2.5	5.5	4.5	85.0	200
2. » » . . . . . }	0.5	5.0	9.5	9.5	15.5	6.5	3.0	11.0	9.0	7.5	5.0	4.0	86.0	»
3. Dagl. beh. 10 min. i 16 dagar .	0.5	6.0	9.0	11.5	18.0	7.5	3.5	9.0	11.0	7.0	1.0	3.0	87.0	»
4. » » 30 » » » » .	0.5	4.0	5.5	8.0	21.0	7.0	5.5	6.0	14.0	12.5	1.5	2.0	87.5	»
5. » » 1 tim. » » » .	1.5	7.0	5.0	5.0	20.0	11.5	4.0	6.5	11.5	8.5	4.0	4.0	88.5	»
6. » » minst 2 tim. i 16 dag.	0.5	2.5	9.0	9.0	11.5	6.5	6.5	11.5	10.5	11.0	3.0	4.5	88.0	»

Tab. 21. *Tallfrö* (*Pinus silvestris* L.).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag												Gronings-förmåga %.	Antal försöksfrö.
	5	6	7	8	9	10	11	12	14	18	22	26		
1. Utan behandling . . . . . . }	4.5	7.5	22.5	15.0	5.0	7.0	5.5	6.0	7.0	4.5	0.5	3.0	88.0	200
2. » » . . . . }	7.5	12.5	18.5	12.5	6.5	7.5	3.5	5.5	5.0	5.5	1.0	2.0	87.5	»
3. Dagl. beh. 10 min. i 16 dag. .	9.0	4.0	16.0	17.0	9.0	6.0	5.0	2.0	8.0	9.0	0.0	1.0	86.0	»
4. » » 20 » » » » .	3.0	3.0	31.5	16.0	3.5	4.0	4.0	5.0	4.5	8.5	1.0	1.0	85.0	»
5. » » 1 timme » » » .	2.0	3.0	14.5	17.5	6.5	12.5	7.5	6.0	7.0	12.0	1.0	0.0	89.5	»
6. » » 3—10 tim. i 16 dag.	4.0	7.0	21.0	16.0	6.0	6.0	7.5	5.0	8.5	4.5	1.0	1.0	87.5	»

Tab. 22. *Granfrö* (*Picea abies* (L.)).

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag												Gronings-förmåga %.	Antal försöksfrö.
	5	6	7	8	9	10	11	12	14	18	22	26		
1. Utan behandling . . . . }	1.0	27.5	37.5	11.5	4.5	1.5	1.0	0.5	0.5	3.5	0.0	1.0	90.0	200
2. » » . . . . }	2.0	30.0	27.5	15.5	5.0	3.0	0.5	0.5	1.0	1.0	0.0	0.5	86.5	»
3. Dagl. beh. 10 min. i 16 dagar .	1.0	22.5	35.0	15.0	7.0	3.0	0.5	0.5	1.0	0.0	0.0	0.5	86.0	»
4. » » 20 » » » » .	2.0	20.0	35.5	17.5	5.0	2.5	2.5	0.0	1.0	1.0	0.0	0.5	87.5	»
5. » » 3—9 tim. i 16 dagar	2.5	20.0	31.5	15.5	5.5	0.0	3.0	0.5	1.5	2.0	0.0	0.5	82.5	»

Alla dessa långsamt groende fröslag förhålla sig, såsom förestående tabeller tydligt nog visa, ganska oregelbundet, till och med de partier, som blifvit behandlade på samma sätt. Man behöfver blott se på tab. 18 (sockerbeta), där själfva de båda kontrollprofven sinsemellan visa så stora olikheter under de 6 första dagarna, att man redan däraf inser vanskligheten af att kunna draga några bestämda slutsatser angående de behandlade partierna, äfven i de fall, då dessa afvika från kontrollprofven

mera, än groningslatituden egentligen tillåter. En sådan afvikelse inträffar visserligen sällan i dessa sex tabeller, men det synes stundom förefinnas en viss tendens därtill t. ex. hos 10-minutersbehandlingen i tab. 19. Emellertid torde det vara försiktigast att af dessa tabeller icke göra något bestämdt uttalande angående elektricitetens inverkan på groningsenergien, för så vidt den skulle vara gynnsam eller menlig. I det hela taget förhålla sig dessa frön tämligen indifferenta gent emot den elektriska retningen och synas vara ganska okänsliga för densamma. En medeltalsberäkning af dessa förestående tabeller gifver följande tablå:

	% grodt eft. 5 dag.	% grodt eft. 7 dagar.	% gr. eft. 11 dagar.	Gronings-förmåga.	Antal försöksfrö.
Utan behandling	11,8	45,75	72,5	88,54	2,000
Upprepad våt beh.	14,8	40,18	71,1	87,90	3,700.

Af denna tablå framgår tydligt de ojämnheter och oregelbundenheter i groningsenergien hos dessa långsamt groende fröslag. Efter 5 dagars groning ligga de behandlade partierna öfver med 3 %, men redan 2 dagar senare eller efter 7 dagars groning hafva de kommit efter med mer än 5 %. Efter 11 dagars groning hafva de båda åter mera närmat sig hvarandra och till sist i den slutliga, hela groningsförmågan är skillnaden blott ungefär en half procent, d. v. s. groningsförmågan är ungefär densamma, vare sig fröna blifvit behandlade med elektricitet eller ej.

Grupp 4.

Tab. 23. *Oljerättika* (*Raphanus sativus L. β oleiferus*).
(5 års gammalt frö.)

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag										Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	2	3	4	5	6	7	9	12	14	16		
1. Utan behandling	6.7	17.0	17.3	6.0	0.7	1.7	0.3	4.3	1.7	1.3	57.0	300
2. » »	3.0	18.0	17.7	5.3	2.3	1.7	0.3	2.3	0.3	1.7	52.7	»
3. Dagl. beh. 5 min. i 8 dagar	4.7	23.0	16.3	5.3	2.0	1.7	1.3	0.3	1.7	1.0	57.3	»
4. » » 10 » » » »	1.0	20.3	17.0	4.3	3.0	0.7	1.7	1.0	0.7	1.0	50.7	»
5. » » 20 » » » »	6.3	23.0	12.0	4.0	3.3	0.0	0.7	0.3	1.3	0.3	51.3	»
6. » » 1 timme » » »	5.3	21.3	16.3	5.0	1.7	0.7	1.0	1.7	2.7	1.3	57.0	»

Tab. 24. *Gul lupin* (*Lupinus luteus* L.).
(5 års gammalt frö.)

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag													% frö		Antal försöksfrö.
	4	5	6	7	8	9	10	11	13	16	19	24	28	grodt	hårdt	
1. Utan behandling . .	2	4	6	10	7	6	3	2	1	7	3	2	3	56	32	100
2. » » . .	2	7	6	12	6	5	4	1	1	2	3	2	2	53	36	»
3. Dagl. beh. 20 m. i 20 d.	3	5	10	4	4	2	0	7	2	7	2	3	6	55	38	»
4. » » 30 » » » »	0	2	9	6	6	7	4	3	2	2	5	6	3	55	33	»
5. » » 1 tim. » » »	1	3	7	6	5	5	3	2	2	6	6	2	2	50	37	»
6. » » längre tid i 20 dagar .	1	3	11	10	6	9	1	3	3	7	1	0	1	56	34	»

Tab. 25. *Blodklöfver* (*Trifolium incarnatum* L.).
(5 års gammalt frö.)

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag								% frö		Antal försöksfrö.
	1	2	3	4	5	6	7	8	grodt	hårdt	
1. Utan behandling . . .	1.7	24.7	31.0	15.0	10.3	6.7	1.7	2.3	93.3	0.7	300
2. » » . . .	1.3	28.0	31.0	12.3	7.3	5.7	1.3	2.0	90.0	0.3	»
3. Dagl. beh. 5 min. i 6 dag.	3.0	23.7	24.0	18.0	4.7	10.7	2.7	1.7	88.5	1.0	»
4. » » 10 » » » »	0.3	24.3	27.7	13.3	10.0	6.0	2.7	0.7	85.0	1.0	»
5. » » 20 » » » »	0.3	17.3	36.3	14.7	8.0	5.0	0.3	0.7	82.7	0.3	»
6. » » 1 tim. » » »	0.3	23.3	36.7	15.3	2.0	8.3	1.3	0.3	87.7	0.7	»

Tab. 26. *Bohvete* (*Fagopyrum esculentum* L.).
(5 års gammalt frö.)

Behandlingssätt.	Grobarhetsprocent under dag							Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
	3	4	5	6	7	8	10		
1. Utan behandling	66.0	9.0	2.0	1.0	0.0	1.5	1.5	81.0	200
2. » »	57.0	11.0	4.5	2.0	0.0	2.0	0.5	77.0	»
3. Dagl. beh. 5 min. i 5 dag.	49.0	21.0	5.0	4.0	1.0	1.0	1.0	82.0	»
4. » » 15 » » » »	63.5	12.5	4.5	0.5	0.0	0.5	1.0	82.5	»
5. » » 30 » » » »	53.5	18.0	4.5	1.5	1.0	0.5	0.5	79.5	»
6. » » 1 tim. » » »	48.0	27.5	3.0	2.0	1.0	1.0	0.0	82.5	»

Liksom i föregående grupp äro olikheterna inom de speciella tabellerna så obetydliga eller så oregelbundet förekommande, att svårligen något allmängiltigt omdöme kan fällas till behandlingens förmån eller nackdel. Medeltalen för hela gruppen blifva

med afseende på vissa dagars groningsenergi och hela groningsförmågan nära nog desamma för såväl de behandlade som de icke behandlade fröna och visa följande siffror:

	% grodt eft. 3 dagar.	% grodt eft. 6 dagar.	Groningsförmåga %.	Antal försöksfrö.
Utan behandling	34,41	56,19	69,91 (62,67)[1]	1,800
Upprepad dagl. beh.	33,52	56,31	68,89 (63,23)	3,600.

Elektriciteten har sålunda äfven här varit utan någon synbar inverkan, och äldre frön synas vara mindre känsliga för retning medelst densamma.

Grupp 5.

Af frön, tillhörande denna grupp, hafva undersökts inalles 6,000 stycken af de vanliga sädesslagen råg, hvete, korn och hafre, som genom föregående groningsförsök visat sig helt och hållet förlorat sin groningsförmåga. Materialet utgjordes af mer än 10-årigt frö från Malmöhus läns frökontrollanstalt. I allmänhet fingo dessa frön ligga i groning 20 dagar (således dubbelt så länge som vanlig frökontroll fordrar), utan att tecken till lif knappast visade sig. Mot slutet af denna tid ruttnade de vanligast bort. Af alla dessa 6,000 frön kom endast *ett* till groning efter 12 dagar. Detta enstaka groende frö tillhörde visserligen ett parti, som underkastades flere (10—16) timmars dagligen upprepad behandling med elektriciteten, men det är tydligt, att detta enda frö icke gärna kan framhållas till förmån för den elektriska behandlingens gynnsamma inflytande. Det enda, som med stöd af dessa försök kan sägas, är utan tvifvel, att elektriciteten är utan inverkan på dödt frö, något som a priori

[1]) I siffrorna inom parentesen äro ej medräknade dem från tab. 25 (blodklöfver). Dessa frön upptogo vatten till den grad, att de rätt snart blefvo nästan geléartade, hvarför det vid den upprepade behandlingen omöjligen kunde undvikas, att ett och annat sådant frö blef sönderkrossadt och förstördt. Detta är också egentliga anledningen till den lägre procent af groningsförmåga hos de behandlade partierna, hvad denna tabell beträffar.

väl också är alldeles gifvet.[1]) PAULIN's påstående, att elektriciteten skulle väcka lif i sådant frö, förefaller tämligen besynnerligt.

Sammanfattning.

Med stöd af de föregående försöken kunna vi sammanställa de vunna resultaten i följande satser:

1:o) *Induktionselektricitet har på friskt frö, som normalt eger stor groningsenergi, vanligen en viss inverkan, antingen gynnsam eller menlig, så att energien höjes eller sänkes; dock synes denna inverkan icke vara af någon större betydenhet.*

Anm. Om den sannolika orsaken till denna olika inverkan se sid. 547.

2:o) *Att denna inverkan, gynnsam eller menlig, stegras genom långvarigare tidsbehandling.*

3:o) *Att såväl friska, men långsamt groende som äldre frön äro mera okänsliga och röna föga eller intet synbart inflytande af behandlingen.*

4:o) *Att groningsenergien så småningom utjämnas, så att till sist hela groningsförmågan är ungefär densamma hos såväl de behandlade som de obehandlade partierna.*

[1]) Emellertid har det å andra sidan visat sig, att den förlorade groningsförmågan hos gammalt frö har sin orsak i brist på fermenter, så att om dylika (t. ex. diastas) tillföras sådant frö, grobarhetsprocenten kunnat betydligt höjas, om också icke till samma höjd som hos friskt frö.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 8.
Stockholm.

Verzeichnis der in König Karls Land während der schwedischen Polarexpedition 1898 gefundenen Phanerogamen.

Von Gunnar Andersson und Henrik Hesselman.

(Vorläufige Mitteilung).

(Mitgeteilt am 12. October 1898 durch A. G. Nathorst.)

Einige der Angaben des untenstehenden Verzeichnisses verdanken wir dem Chef der Expedition, Herrn Professor Dr. A. G. Nathorst.

1. **Saxifraga nivalis** L.

Sowohl im Schwedischen Vorlande als auf der Hauptinsel.

2. **Saxifraga nivalis** L. f. **tenuis** Wg.

An dürren Plätzen; wie die Hauptart kommt auch diese Varietät auf den beiden grossen Inseln vor.

3. **Saxifraga stellaris** L. f. **comosa** Poir.

An feuchten Plätzen; auf den beiden grossen Inseln.

4. **Saxifraga oppositifolia** L.

Auf den beiden grossen Inseln.

5. **Saxifraga rivularis** L.

An verschiedenen Lokalitäten; sowohl im Schwedischen Vorlande als auf der Hauptinsel.

6. **Saxifraga cernua** L.

Häufig am Kap Weissenfels im Osten des Schwedischen Vorlandes, sonst zerstreut auf den beiden grossen Inseln.

7. **Saxifraga decipiens** Ehrh. f. **cæspitosa** (L.).

Auf den beiden grossen Inseln.

8. **Cardamine bellidifolia** L.

Einzelne Exemplare auf den beiden grossen Inseln.

9. **Draba sp.**

Kommt auf den beiden grossen Inseln zerstreut vor. (Vielleicht zwei Arten).

10. **Cochlearia fenestrata** R. Br.

Kommt auf den beiden grossen Inseln vor; besonders häufig im Sande des Kap Weissenfels im Osten des Schwedischen Vorlandes. Mehrere Formen.

11. **Papaver radicatum** Rottb.

Auf den beiden grossen Inseln, überaus reich blühend.

12. **Ranunculus hyperboreus** Rottb.

In Sümpfen am Kap Hammerfest im Süden des Schwedischen Vorlandes und in der Nähe der Breiten Bucht an der Hauptinsel; blühend nicht gefunden.

13. **Ranunculus sulphureus** Sol.

Auf den beiden grossen Inseln.

14. **Stellaria longipes** Goldie f. **humilis** Fenzl.

Auf den beiden grossen Inseln.

15. **Cerastium alpinum** L.

Kommt auf den beiden grossen Inseln vor.

16. **Cerastium alpinum** L. var. **cæspitosa** Malmgren.

Auf den beiden grossen Inseln.

17. **Alsine rubella** Wg.

Nur wenige Exemplare am Kap Hammerfest im Südwesten des Schwedischen Vorlandes eingesammelt.

18. **Sagina nivalis** (LINDBL.) FR.

Am Kap Weissenfels im Osten des Schwedischen Vorlandes.

19. **Polygonum viviparum** L.

Im Süden des Schwedischen Vorlandes.

20. **Salix polaris** WG.

Auf den beiden grossen Inseln.

21. **Poa flexuosa** WG.

Sowohl im Schwedischen Vorlande als auf der Hauptinsel.

22. **Poa sp.**

Im Sande des Kap Weissenfels im Osten des Schwedischen Vorlandes.

23. **Catabrosa algida** (SOL.) FR.

Auf den beiden grossen Inseln an verschiedenen Lokalitäten.

24. **Alopecurus alpinus** SM.

Auf den beiden grossen Inseln. Kommt an verschiedenen Lokalitäten vor und ist oft üppig entwickelt.

25. **Luzula arctica** BLYTT.

Kommt auf den beiden grossen Inseln vor.

26. **Luzula arcuata** (WG.) SW. * **confusa** (LINDEB.) HARTM.

Im Schwedischen Vorlande am Kap Weissenfels, auf der Hauptinsel an der Breiten Bucht.

27. **Juncus biglumis** L.

An der Nordseite der Hauptinsel.

Gefässkryptogamen sind nicht gefunden worden.

Eine genauere Darstellung der allgemeinen Vegetationsverhältnisse, besonders der sehr interessanten, bisher noch nirgends beobachteten hocharktischen Sand- und Dünenflora (wie sie in dem Schwedischen Vorlande vorkommt), behalten wir uns für eine spätere Abhandlung vor.

Stockholm 1898. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 9.

Onsdagen den 9 November.

INNEHÅLL.

Af utsedda komiterade afgåfvos utlåtanden med anledning af till Akademien inkomna nådiga remisser dels å en ansökan af Professor O. PETTERSSON m. fl. om fortsatt anslag till de hydrografiska undersökningarne, och dels å fem ansökningar om understöd utaf statsanslaget till resestipendier samt läroböckers och lärda verks utgifvande, äfvensom med anledning af remiss från Kongl. Ecklesiastik Departementet å en genom härvarande Kongl. Belgiske Minister på hans Regerings vägnar gjord hemställan om erhållande af upplysningar rörande svenska zoologiska stationers inrättning; hvilka alla utlåtanden af Akademien godkändes.

Herr RETZIUS redogjorde för sina undersökningar om renfostrets utveckling, samt höll ett föredrag om det elektriska organet hos rockorna.

Bibliotekarien DAHLGREN lemnade en redogörelse för förhandlingarna vid den internationella katalogkonferensens andra sammanträde i London under Oktober månad innevarande år, uti hvilket sammanträde Hr DAHLGREN deltagit såsom ombud för Sverige.

Herr HILDEBRANDSSON öfverlemnade exemplar af I och II delarne af ett utaf Meteorologiska Observatorium i Upsala utgifvet arbete: »Etudes internationales des nuages 1896—1897. Observations et mesures en Suède», samt redogjorde för detsammas ändamål och hufvudsakliga innehåll.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar och uppsatser till införande i Akademiens skrifter:

dels i Bihanget till Akademiens Handlingar: 1:o) »Studier öfver vegetationen i mellersta Skandinaviens fjelltrakter», af Docenten R. SERNANDER, 2:o) »Ueber die beim Benetzen fein verteilter Körper auftretende Wärmetönung» af Fil. Kandidaten S. LAGERGREN;

och dels i Öfversigten: de i innehållsförteckningen uppräknade åtta uppsatser.

Utaf Regnells zoologiska gåfvomedel beslöt Akademien anvisa följande understöd:

till Professor SMITTS förfogande 500 kr. för bearbetning af Riksmuseets samlingar af kräldjur och groddjur genom Fil. Licentiaten G. ANDERSSON;

till Professor THÉELS förfogande 500 kr. för aflöning af ett vetenskapligt biträde vid Riksmuseets afdelning för lägre evertebrater;

åt Med. Doktor C. J. E. HAGLUND 600 kr. för ordnande och bearbetande af vissa delar af Riksmuseets Hemipter-samling;

åt Docenten A. HENNIG 500 kr. för att vid Riksmuseets paleontologiska afdelning studera och ordna dess fossil från Sveriges kritsystem;

åt Filos. Doktor Y. SJÖSTEDT 400 kr. för att vid Riksmuseum bearbeta de af honom från Kamerun hemförda Pseudoneuroptera och Orthoptera; och

åt Filos. Licentiaten H. Östergren 400 kr. för att dels vid den biologiska stationen vid Dröbak i Norge idka zoologiska forskningar och dels vid museerna i Köpenhamn och Lund studera derstädas befintliga nordiska Holothurie-former.

Genom anstäldt val kallade Akademien till utländsk ledamot f. d. Professorn i anatomi vid universitetet i Bonn Franz von Leydig.

Följande skänker anmäldes:

Till K. Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Kongl. Biblioteket.*
Handlingar 20 (1897). 8:o.
— *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 4 häften. 4:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. 1898: N:r 9. 8:o.
Upsala. *Universitets-Biblioteket.*
Lopez, P., Mapa de las comunicaciones postales y telegráficas de la Rep. Argentina. 1898.
— *Studentkåren.*
Upsala universitets katalog. 1898: Höstterminen. 8:o.
Amsterdam. *K. Akademie van wetenschappen.*
Verhandelingen. Sect. 1: D. 6: N:o 1–5. 1897—98. 8:o.
» » 2: D. 6: N:o 1–2. 1897—98. 8:o.
» Afd. Letterkunde. D. 2: N:o 1–2. 1898. 8:o.
Verslagen en mededeelingen. Afd. Letterkunde. (4) D. 1—2. 1897—98. 8:o.
Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling. D. 6. 1898. 8:o.
Jaarboek. 1897. 8:o.
Laus Mitiae. 1898. 8:o.
Bologna. *R. Accademia delle scienze.*
Memorie. (5) T. 6. 1896—97. 8:o.
Bruxelles. *Service Géologique.*
Liste des périodiques compulsés pour l'élaboration de la Bibliographia geologica. 1898. 8:o.
Budapest. *Köngl. Ung. Reichs-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd. 26 (1896): Th. 1. 4:o.
— *Musée National Hongrois.*
Természetrajzi füzetek. Kötet 21 (1898): P. 3–4. 8:o.
Buenos Aires. *Museo Nacional.*
Comunicaciones. T. 1 (1898): N:o 1. 8:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Verslag omtrent den staat. Jaar 1897. 8:o.

Cambridge. *Cambridge philosophical society.*
Proceedings. Vol. 9: P. 9 (1897/98). 8:o.
Transactions. Vol. 17: P. 1. 1898. 4:o.
— *Observatory.*
Annual report. 1897/98. 4:o.
Cape of Good Hope. *Royal Observatory.*
Independent day-numbers. Year 1898—1900. 8:o.
Chambésy. *Herbier Boissier.*
Bulletin. T. 6 (1898): N:o 10. 8:o.
Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Vorläufige Mittheilung der Beobachtungs-Ergebnisse von 12 Stationen 2:r Ordnung in Sachsen. Jahr 1897: 7, 9, 11—12. 4:o.
Coimbra. *Sociedade Broteriana.*
Boletim. 15 (1898): 1—2. 8:o.
Dorpat. *Meteorologisches Observatorium der Universität.*
Meteorologische Beobachtungen. 1898: 1—7. 8:o.
Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen in Livland. Jahr 1897. 4:o.
Durban. *Natal Observatory.*
Report of the government astronomer. Year 1897. Fol.
Firenze. *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*
Publicazioni. Sez. di sc. fis. e nat. Fasc. 7—9. 1898. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. Math.-phys. Kl. 1898: H. 3. 8:o.
» Philol.-hist. Kl. 1898: H. 3. 8:o.
Helsingfors. *Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. 6: 28; 7: 5. 1898. 8:o.
Jena. *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Denkschriften. Bd. 6: L. 1: Text; 7: L. 1: Text & Atlas; 8: L. 4: Text & Atlas. 1897—98. 4:o.
Kiel. *Ministerialkommission zur Untersuchung der deutschen Meere.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. 3. 1898. 4:o.
Kjöbenhavn. *Commissionen for Ledelsen af de geologiske og geographiske Undersögelser i Grönland.*
Meddelelser om Grönland. H. 14—15. 1898. 8:o.
Krefeld. *Verein für Naturkunde.*
Jahresbericht. 3 (1896/97—1897/98). 8:o.
Lawrence, Kan. *Kansas University.*
Quarterly. Ser. A:-Sci. and Math. Vol. 7 (1898): N:o 3. 8:o.
» Ser. B:-Philol. and Hist. Vol. 7 (1898): N:o 1—2. 8:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 34: N:o 129. 1898. 8:o.
Leeds. *Philosophical and literary society.*
Annual report. 78 (1897/98). 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 24: N:o 5. 1898. 8:o.

(Forts. å sid. 620.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 3.

Ueber akromatische Linsensysteme aus einer Glassorte.

Von C. V. L. Charlier.

[Mitgeteilt den 9 November 1898.]

1. Den folgenden Untersuchungen werde ich die Resultate von Gauss in seinen »Dioptrische Untersuchungen» zu Grund legen, und ich werde deswegen diese Resultate kurz auseinandersetzen mit den für das Folgende nothwendigen Zusätzen.

Indem wir mit ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. die *Radien* der auf einander folgenden sphærischen Flächen bezeichnen, mit n^0, n', n'' etc. die *Brechungsindices* der Medien, mit t', t'', t''' etc. die *optischen Dicken* derselben, d. h. die Abstände, in der Achse gemessen, zwischen den auf einander folgenden brechenden Flächen durch das entsprechende Brechungsvermögen dividirt, so dass

$$t' = \frac{N' - N^0}{n'}; \quad t'' = \frac{N'' - N'}{n''}, \quad t''' = \frac{N''' - N''}{n'''} \text{ etc.},$$

wo N^0, N' etc. die x-Koordinaten der Scheitel der Flächen bezeichnen, setzen wir weiter mit Gauss:

$$u^0 = -\frac{n' - n^0}{\varrho_0}; \quad u' = -\frac{n'' - n'}{\varrho_1}; \quad u'' = -\frac{n''' - n''}{\varrho_2} \text{ etc.},$$

so dass u^0, u' etc. die invertirten Werthe der Fokaldistansen der Flächen mit entgegengesetztem Zeichen bedeuten. Dann ist die Lage des (zweiten) Brennpunktes und der zweiten Hauptebene von zwei Grössen g und k abhängig, die durch folgende Rekursionsformeln bestimmt sind:

$$(1)\qquad \begin{cases} k_0 = 0\,, \quad g_0 = 1 \\ k_s = u^0 + u'g_1 + u''g_2 + \ldots + u^{(s-1)}g_{s-1} \\ g_s = 1 + t'k_1 + t''k_2 + \ldots + t^{(s)}k_s\,, \end{cases}$$

oder

$$(1^*)\qquad \begin{cases} k_s = k_{s-1} + u^{(s-1)}g_{s-1} \\ g_s = g_{s-1} + t^{(s)}k_s\,. \end{cases}$$

Die x-Koordinaten des Brennpunktes (F) und des zweiten Hauptpunktes (E) sind durch die folgenden Ausdrücke bestimmt:

$$(2)\qquad \begin{cases} F - N = -\dfrac{g}{k} \\ E - N = \dfrac{1-g}{k}\,, \end{cases}$$

und also

$$(2^*)\qquad F - E = -\frac{1}{k}.$$

Die letzte Formel bestimmt die sogenannte Brennweite, so dass k ist dem invertirten Werthe der Brennweite mit entgegengesetztem Zeichen gleich. Nehmen wir also die Brennweite des gesammten Systems als Einheit für die Längen an, so ist

$$(3)\qquad k = -1\,.$$

2. Die obigen Formeln gelten für das Licht von einer bestimmten Farbe, sei es die D-Linie. Nehmen wir einen Strahl von einer anderen Wellenlänge in Betracht, so erleiden die Grössen k und g, und somit auch die Lage des Brennpunktes und des zweiten Hauptpunktes kleine Veränderungen. Die Veränderungen, die bei dem Übergang von einer Wellenlänge zu einer anderen hervorgerufen werden, wollen wir mit dem Zeichen Δ andeuten. Wir haben dann

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta u^{(r)} = A_r u^{(r)} \\ \Delta t^{(r)} = -\dfrac{\Delta n^{(r)}}{n^{(r)}}\, t^{(r)}\,, \end{cases}$$

wo

$$(4^*)\qquad A_r = \frac{\Delta n^{(r+1)} - \Delta n^{(r)}}{n^{(r+1)} - n^{(r)}}\,.$$

3. Soll die Brennweite des Systems bei einer Veränderung $\Delta\lambda$ der Wellenlänge des Lichtes unverändert bleiben, so muss nach (2*)

$$\Delta k = 0 .$$

Aus der Formel (2) folgt weiter, dass, wenn die Gleichung $\Delta k = 0$ erfüllt ist, so wird

$$\Delta g = 0$$

die Bedingung dafür sein, dass der zweite Hauptpunkt des Linsensystems bei der betreffenden Veränderung in dem Brechungsvermögen des Lichtes seine Lage nicht verändert.

Nun ist aber — wenn man von dem Einfluss der Farbe auf die anderen Bildfehler, die s. g. sphærischen Abweichungen, absieht — die Bedingungen für ein *akromatisches* Bild *erstens*, dass die Brennweiten der Strahlen von der Farbe unabhängig sind, und *zweitens*, dass dies ebenfalls mit der Lage des zweiten Hauptpunktes der Fall ist. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so wird das Bild *vollkommen* akromatisch. Ein Linsensystem, das wirklich solche Bilden erzeugt, lässt sich auch in der That konstruiren, wie im Folgenden bewiesen werden wird. Im Allgemeinen muss man sich damit begnügen, dass die Brennpunkte und die zweiten Hauptpunkte für *zwei* Farben zusammenfallen. Die Bedingung dafür lautet

$$\Delta k = \Delta g = 0$$
$$k = -1 .$$

Soll das Linsensystem ein *vollkommen* akromatisches Bild erzeugen, so müssen diese Gleichungen für *alle* Farben identisch erfüllt sein.

4. Würde das Linsensystem aus getrennten Linsen in der Luft bestehen, so wäre nach (4*)

$$A_0 = A_1 ; \quad A_2 = A_3 ; \text{ etc.,}$$

und wenn wir also setzen

$$(5) \qquad \begin{cases} x = u^0 + u' , \\ y = u'' + u''' , \\ z = u^{IV} + u^{V} , \end{cases}$$

etc.,

so bekommt man:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Delta x = Ax\,, \\ \Delta y = By\,, \\ \Delta z = Cz\,, \end{cases}$$

etc.,

wo

$$(7) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\Delta n'}{n' - 1}\,, \\[2ex] B = \dfrac{\Delta n'''}{n''' - 1}\,, \\[2ex] C = \dfrac{\Delta n^{\mathrm{V}}}{n^{\mathrm{V}} - 1}\,. \end{cases}$$

etc.

Die Grössen x, y, z etc. bezeichnen offenbar die invertirten Brennweiten der 1sten, 2ten, 3ten etc. Linse, mit entgegengesetztem Zeichen, wobei man von der Dicke der Linsen abgesehen hat.

5. *Zwei Linsen mit kleinem Abstande.* Gewöhnlich muss man sich in der Optik damit begnügen, dass die Brennweiten und die zweiten Hauptpunkte für *zwei* Farben zusammenfallen. Dies lässt sich bekanntlich schon mit zwei Linsen erreichen, und zwar erhält man hierfür die Bedingungsgleichungen:

$$(8) \qquad \begin{cases} k = -1 = x + y + h_1 \\ \Delta k = 0 = Ax + By + h_2 \\ \Delta g = 0\,, \end{cases}$$

wo h_1 und h_2 Glieder, die mit den Dicken der Linsen und dem Abstand multiplicirt sind, enthalten. Die dritte Gleichung ($\Delta g = 0$) lässt sich durch geeignete Wahl der Dicken der Linsen und des Abstandes zwischen denselben erfüllen. Wir werden uns augenblicklich nicht mit derselben beschäftigen. Aus den zwei ersten Gleichungen erhält man in der ersten Annäherung

$$-1 = x + y$$
$$0 = Ax + By\,,$$

also

$$(9) \qquad x = \frac{B}{A - B}\,; \quad y = -\frac{A}{A - B}\,,$$

nach welchen Formeln die Brennweiten der Linsen eines zweilinsigen akromatischen Objektivs gewöhnlich gerechnet werden.

6. *Zwei Linsen mit endlichem Abstande.* Ist der Abstand zwischen den beiden Linsen des Objektives gross, so geben die durch die Formel (9) berechneten Zahlen keine Annäherung zu dem wirklichen Werth der Brennweiten. Es lässt sich in diesem Falle überhaupt nicht ein akromatisches Objektiv konstruiren, ohne dass man sich solcher Linsen bedient, deren Dicken von derselben Grössenordnung sind wie der Abstand der Linsen. Wenn man indessen die Unveränderlichkeit der Lage des zweiten Hauptpunktes für verschieden gefärbter Strahlen aufgiebt, und nur den Werth der Brennweite in Betracht zieht, so lässt sich auch in diesem Fall ein akromatisches Linsensystem aus zwei Linsen darstellen.

Wenn wir in der ersten Annäherung die Dicken der beiden Linsen vernachlässigen, so erhält man zur Bestimmung von x und y, indem mit t der Abstand zwischen der Linsen bezeichnet wird, die Gleichungen:

$$(10)\qquad \begin{cases} -1 = x + y + txy \\ \quad 0 = Ax + By + txy(A + B)\,. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die erste mit $A + B$ multiplicirt und von der zweiten subtrahirt:

$$A + B = -Bx - Ay\,.$$

Wird aus dieser Gleichung y in die erste Gleichung (10) eingesetzt, so erhält man folgende Formel zur Bestimmung von x

$$x^2 + x\left[\frac{1}{t}\left(1 - \frac{A}{B}\right) + \frac{A}{B} + 1\right] + \frac{1}{t} = 0\,.$$

Besonders einfach gestaltet sich diese Formel, wenn man $A = B$ setzt, also die Linsen aus *derselben* Glassorte annimmt. Es wird dann:

$$(11)\qquad x = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{t}}\,.$$

Diese Gleichung zeigt, dass wenn $t > 1$ angenommen wird, sich aus *einer einzigen* Glassorte ein akromatisches Linsensystem aufbauen lässt. Man findet weiter dass, da in diesem Falle ($A = B$) die zweite Bedingungsgleichung (10) von der Farbe vollständig unabhängig ist, so wird das Linsensystem nicht nur für zwei Farben akromatisirt sein, sondern für *alle* Farben.

Hier ist aber zu beachten 1) dass das so erhaltene Linsensystem eine negative Vereinigungsweite hat, d. h. dass parallel einfallende Strahlen ein virtuelles Bild geben, und dass somit ein solches Linsensystem zwar als Okular, nicht aber als Objektiv benutzt werden kann; 2) dass die Gleichung $\Delta g = 0$ nicht erfüllt werden kann, dass also die ausgehenden Strahlen von verschiedener Farbe zwar *parallel sind*, nicht aber in einem Punkte vereinigt werden.

Von dieser Art ist z. B. das nach HUYGENS genannte Okular.

7. *Eine beliebige Zahl von Linsen auf kleinen Abständen.* Ganz analog wie man aus zwei Linsen ein akromatisches Fernrohr bauen kann, bei dem *zwei* Farben zu einem Bild vereinigt werden, so kann man *teoretisch* mit Hülfe von n Linsen die Strahlen von n verschiedenen Wellenlängen in einem Fokus vereinigen. *Praktisch* stellt sich aber die Sache bedeutend anders in Folge der Eigenschaften der bis jetzt fabricirten Gläser. Betrachten wir z. B. drei Linsen, mit den Zerstreuungen A_1, B_1, C_1 für eine Farbe, A_2, B_2 und C_2 für eine andere, so sind die Gleichungen für die Einhaltung der Brennweiten die folgenden

$$(12) \qquad \begin{cases} -1 = x + y + z + h_1 \\ \quad 0 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + h_2 \\ \quad 0 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + h_3 , \end{cases}$$

wo h_1, h_2 und h_3 mit den Dicken der Linsen und mit den Abständen multiplicirte Glieder enthalten. In der ersten Annäherung setzt man nun $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Die drei obigen Gleichungen geben nun bestimmte Werthe von x, y und z unter einer *Voraussetzung, dass nämlich die Determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix},$$

welche wir kurzweg mit $\varDelta$ bezeichnen wollen, *von Null verschieden ist.* Nun ist aber im Allgemeinen dem nicht so. Nimmt man beliebig drei verschiedene Glassorten in Betracht, so wird in 9 Fällen von 10 die genannte Determinante nur sehr wenig von *Null* verschieden sein. Zwar lassen sich solche Kombinationen finden, für welche $\varDelta$ einen von Null verschiedenen Werth erhält. Es lässt sich aber zur Zeit nicht entscheiden, ob man hier mit zufälligen Fehlern in der Bestimmung der Brechungsvermögen der Linsen zu thun hat, oder ob man wirklich zu einer Lösung der Gleichungen (12) gekommen ist.

Es hilft hier nicht die Zahl der Linsen zu vermehren, da man jedesmal die Untersuchung matematisch auf ein dreilinsiges System zurückführen kann.

8. *Eine beliebige Zahl von Linsen auf endlichen Abständen.* Indem wir mit $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die durch die Dispersion in *zwei verschiedenen Stellen des Spektrums* hervorgebrachte Veränderung einer Grösse bezeichnen, so sind die Bedingungen dafür, dass die Brennweite und der zweite Hauptpunkt für *drei* verschiedene Strahlen unverändert bleiben, durch die folgenden 5 Gleichungen gegeben:

$$(13) \qquad 1 + k = 0 = \varDelta_1 k = \varDelta_2 k = \varDelta_1 g = \varDelta_2 g\,.$$

Wir werden die Lösung dieser Gleichungen in dem Falle, betrachten, dass es sich um *drei* Linsen auf endlichen Abständen handelt.

Bezeichnen wir nun mit ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 und ψ_5 diejenigen Theile dieser Gleichungen, die mit der Dicke der Linsen verschwinden, welche Theile also nach unserer Voraussetzung als kleine Grössen betrachtet werden können; und sind φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 und φ_5 der übrige Theil von den fünf Gleichungen, so dass

$$\begin{aligned}1 + k &= \varphi_1 + \psi_1 \\ \Delta_1 k &= \varphi_2 + \psi_2 \\ \Delta_2 k &= \varphi_3 + \psi_3 \\ \Delta_1 g &= \varphi_4 + \psi_4 \\ \Delta_2 g &= \varphi_5 + \psi_5 ,\end{aligned}$$

so können wir die Grössen φ als Funktionen von x, y, z, t'' und t^{IV} betrachten, und in der ersten Annäherung haben wir die Gleichungen

$$0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 \tag{14}$$

zu untersuchen.

Setzen wir

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A_1 x + B_1 y + t'' xy(A_1 + B_1) \\ \Omega_2 &= A_2 x + B_2 y + t'' xy(A_2 + B_2) \\ g &= 1 + t'' x + t^{IV}(x + y + t'' xy) ,\end{aligned}$$

so lauten die Gleichungen (14)

$$\left\{\begin{aligned}-1 &= x + y + t'' xy + zg \\ 0 &= \Omega_1 + C_1 zg \\ 0 &= \Omega_2 + C_2 zg \\ 0 &= t'' A_1 x + t^{IV} \Omega_1 \\ 0 &= t'' A_2 x + t^{IV} \Omega_2 .\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Aus der 4ten und 5ten Gleichung folgt:

$$C_2 A_1 - C_1 A_2 = 0 , \tag{16}$$

und aus der 2ten und 3ten:

$$C_2 \Omega_1 - C_1 \Omega_2 = 0 . \tag{17}$$

Setzt man die Werthe von Ω_1 und Ω_2 in die letztere Gleichung ein, so bekommt man unter Berücksichtigung von (16):

$$0 = (C_2 B_1 - C_1 B_2) y (1 + t'' x) . \tag{17*}$$

Einer von den Faktoren rechter Hand muss also gleich Null sein, und wir bekommen drei verschiedene Lösungen, von denen wir zuerst

$$0 = C_2 B_1 - C_1 B_2 \tag{18}$$

betrachten wollen.

Die Gleichungen (16) und (18) geben

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{19}$$

d. h. die Dispersionen in verschiedenen Theilen des Spektrums müssen für die drei Linsen proportional sein. Nun hat man aber bis jetzt keine solchen Gläser gefunden, und die einzige Methode, in der die Gleichungen (19) erfüllt werden können, ist die drei Glassorten identisch zu wählen. Wir setzen also

$$A_1 = B_1 = C_1$$
$$A_2 = B_2 = C_2 .$$

Betrachten wir aber die Gleichungen (15), so findet man, dass in diesem Falle die zweite und dritte Gleichung mit einander zusammenfallen, und ebenso die 4te und 5te. Wir haben also nunmehr nur drei Gleichungen zu befriedigen.

Nehmen wir hier auch die Dicken der Linsen in Betracht, so werden wir zu den drei Gleichungen

$$\begin{cases} 0 = \varphi_1 + \psi_1 \\ 0 = \varphi_2 + \psi_2 \\ 0 = \varphi_3 + \psi_3 , \end{cases} \tag{20}$$

wo ψ_1, ψ_2 und ψ_3 die mit den Dicken der Linsen multiplicirten Glieder enthalten.[1]) Die Grössen ψ sind von den sechs Radien der brechenden Flächen, von den Brechungsindices und von den Dicken der Linsen abhängig. Die Grössen φ dagegen hängen nur von der Brennweiten — oder was auf dasselbe hinauskommt von den Grössen x, y und z — ab und ausserdem von den Abständen t'' und t^{IV} zwischen den Linsen.

Um die Gleichungen (20) zu befriedigen setzen wir

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ y = y_0 + \delta y \\ z = z_0 + \delta z , \end{cases} \tag{21}$$

und setzen dann:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0 , y_0 , z_0) = 0 \\ \varphi_2(x_0 , y_0 , z_0) = 0 \\ \varphi_3(x_0 , y_0 , z_0) = 0 . \end{cases} \tag{22}$$

---

[1]) Die Funktionen φ und ψ sind natürlich jetzt nicht mit den in Formel (14) vorkommenden identisch.

Zur Bestimmung von δx, δy und δz bekommen wir dann die Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\delta z + \psi_1 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\delta z + \psi_2 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\delta z + \psi_3 = 0\,, \end{cases}$$

und ich bemerke hier gleich, dass diese Gleichungen nur dann zu einer Bestimmung von δx, δy und δz führen können, wenn die Funktionaldeterminante von φ von Null verschieden ist.

Nach (15) haben die Gleichungen (22) folgende Form:

$$(24)\quad \begin{cases} -1 = x_0 + y_0 + t''x_0y_0 + z_0g_0 \\ 0 = x_0 + y_0 + 2t''x_0y_0 + z_0g_0 \\ 0 = t''x_0 + t^{IV}(x_0 + y_0 + 2t''x_0y_0) \\ g_0 = 1 + t''x_0 + t^{IV}(x_0 + y_0 + t''x_0y_0)\,. \end{cases}$$

Aus der ersten und der zweiten Gleichung erhält man

$$(25)\quad 1 = t''x_0y_0\,,$$

wodurch aus der 3ten Gleichung

$$0 = (t'' + t^{IV})x_0 + t^{IV}y_0 + 2t^{IV}\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit x_0, bekommt man unter Berücksichtigung von (25):

$$0 = (t'' + t^{IV})x_0^2 + \frac{t^{IV}}{t''} + 2t^{IV}x_0\,,$$

also

$$(26)\quad (t'' + t^{IV})x_0 = t^{IV}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)}\right].$$

Hieraus erhält man weiter

$$y_0 = -1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)}$$

$$(t'' + t^{IV})z_0 = \frac{t''}{1 - t^{IV}}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)}\right]$$

und für g_0 bekommt man den Werth:

$$g_0 = 1 - t^{IV}. \tag{27}$$

Aus den Werthen für x_0, y_0, z_0 ist es ersichtlich, dass man immer reelle Werthe für die Brennweiten bekommt, so oft die Ungleichheit

$$\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}} \leqq 1 \tag{28}$$

erfüllt ist. Es erübrigt noch zu untersuchen, ob die Variationsgleichungen (23) auch zu bestimmten Werthen für δx, δy und δz führen, was offenbar immer der Fall ist, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Um diese Determinante zu berechnen, setzen wir

$$\Omega = x_0 + y_0 + 2t''x_0y_0,$$

und bekommen dann:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 + \Omega - t''x_0y_0 + z_0g_0 \\ \varphi_2 &= \Omega + z_0g_0 \\ \varphi_3 &= t''x_0 + t^{IV}\Omega. \end{aligned}$$

Die Determinante Δ hat also folgende Form

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - t''y_0 + z_0\frac{\partial g}{\partial x_0}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} - t''x_0 + z_0\frac{\partial g}{\partial y_0}, & g_0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} + z_0\frac{\partial g}{\partial x_0}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} + z_0\frac{\partial g}{\partial y_0}, & g_0 \\ t'' + t^{IV}\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, & t^{IV}\frac{\partial \Omega}{\partial y_0}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wird die erste Reihe von der zweiten subtrahirt, erhalten wir

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - t'' y_0 + z_0 \frac{\partial g}{\partial x_0}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} - t'' x_0 + z_0 \frac{\partial g}{\partial y_0}, & g_0 \\ t'' y_0, & t'' x_0, & 0 \\ t'' + t^{\mathrm{IV}} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, & t^{\mathrm{IV}} \frac{\partial \Omega}{\partial y_0}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= g_0 \begin{vmatrix} t'' y_0, & t'' x_0 \\ t'' + t^{\mathrm{IV}} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, & t^{\mathrm{IV}} \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = 1 + 2t'' y_0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = 1 + 2t'' x_0,$$

und mithin

$$x_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - y_0 \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = x_0 - y_0.$$

Es wird also

$$\varDelta = g_0 [t'' t^{\mathrm{IV}} (y_0 - x_0) - t'' t'' x_0],$$

oder

$$\varDelta = g_0 t'' [t^{\mathrm{IV}} y_0 - (t^{\mathrm{IV}} + t'') x_0],$$

und also nach (26)

$$\varDelta = \mp\, 2 g_0 t'' t^{\mathrm{IV}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{\mathrm{IV}}}\right)}; \tag{29}$$

in welcher Formel wir nach (27) den Werth

$$g_0 = 1 - t^{\mathrm{IV}}$$

einzusetzen haben.

Setzen wir also voraus, dass die Gleichung

$$\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{\mathrm{IV}}} < 1 \tag{30}$$

erfüllt ist, so muss $\varDelta$ immer von Null verschieden sein, und man kann dann immer die Korrektionen δx, δy, δz berechnen, die von den Dicken der Linsen abhängig sind.

Es ist also möglich aus drei Linsen von einer Glassorte ein akromatisches Linsensystem zu berechnen. Und zwar muss man hierbei bemerken, dass das so erhaltene Linsensystem nicht nur für *drei* Farben akromatisirt ist, sondern für *alle* Farben, dass also das so genannte *sekundäre Spektrum vollständig verschwindet.* In der That sind nämlich die Gleichungen (24), von denen wir ausgegangen sind, von der Wellenlänge vollständig unabhängig. Wenn dieselben überhaupt befriedigt sind, so müssen die Brennweiten und die (zweiten) Hauptpunkte für *alle* Farben zusammenfallen.

In einer Beziehung, und zwar einer sehr wichtigen, erleiden aber die erhaltenen Resultate eine Beschränkung. Aus der Formel (27) für g_0 folgt nämlich, wenn man dieselbe mit den Formeln (2) und (3) vergleicht, dass man für den Abstand des Brennpunktes von der letzten brechenden Fläche, d. h. für die *Vereinigungsweite*, folgenden Ausdruck erhält:

$$F - N = g = 1 - t^{IV}. \tag{31}$$

Nun ist aber nach (30) t^{IV} immer grösser als Eins, und folglich muss die *Vereinigungsweite immer negativ sein.* Hieraus folgt aber, dass man das Linsensystem nicht als *Objektiv* benutzen kann.

Wohl aber ist es möglich in dieser Weise sehr vortreffliche *Okulare* zu erhalten; Okulare, die von jedem Fehler in Bezug auf den Akromatismus vollständig befreit sind. Für Spiegelteleskope besonders werden dieselben ganz vorzügliche Dienste leisten können. Ein nach den obigen Formeln berechnetes Okular ist schon von der Firma STEINHEIL & Söhne in München ausgeführt worden. Bis jetzt habe ich keine Gelegenheit gehabt dasselbe, mit einem vollständig akromatisirten Objektivsystem zusammengestellt, zu prüfen.

Nach der Formel (17*) giebt es noch zwei andre Fälle, in denen ein akromatisches System aus drei Linsen erhalten werden kann. Nämlich wenn

$$y = 0 \tag{32}$$

oder drittens

$$1 + t''x = 0 . \tag{33}$$

Die Gleichung (32) führt aber zu keiner anwendbaren Lösung, wie man gleich daraus sehen kann, dass diese Gleichung fordert, dass die zweite Linse eine unendlich grosse Brennweite haben soll, also ein planparalleles Glas sein muss. Übrigens zeigt das Formelsystem (15), dass man in dieser Weise zu Widersprüchen geführt wird.

Die dritte Lösung (33) giebt uns

$$\Omega = Ax + At''xy = A\left[-\frac{1}{t''} - y\right]$$

$$g = t^{\mathrm{IV}}x = -\frac{t^{\mathrm{IV}}}{t''} .$$

Setzen wir diese Werthe in (15) hinein, so bekommen wir successive

$$\begin{cases} z = \dfrac{t''}{t^{\mathrm{IV}}}\left(1 - \dfrac{1}{t''}\right) \\ y = -1 . \end{cases} \tag{34}$$

Man findet nun aber, dass diese Werthe von x, y und z die 4:te und 5:te Gleichung in (15) nicht befriedigen können, wenn die Abstände zwischen den Linsen nicht so gewählt werden, dass folgende Identität stattfindet:

$$0 = \frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{\mathrm{IV}}} - 1 . \tag{35}$$

Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so geben die nach (33) und (34) berechneten Brennweiten ein Linsensystem, das *genähert* akromatisirt ist. Es zeigt sich indessen, dass man in diesem Fall keine *vollständige* Erfüllung der Bedingungen für den Akromatismus erhalten kann. Dafür ist nämlich erforderlich, dass man die durch das System (23) bestimmten Korrektionen wegen der Dicken der Linsen soll berechnen können. Die Determinante $\varDelta$ aus den Koefficienten in diesem System wird aber in diesem Falle in Folge der Gleichung (35) gleich Null, wie man sich durch eine kleine Rechnung leicht überzeugen

kann. Es ist also nicht möglich durch die Gleichungen (33) und (34) ein vollständig akromatisches System zu berechnen, wohl aber eine annäherungsweise akromatisirte Linsenkombination, wenn man die Dicken der Linsen hinreichend klein wählt.

Die erste und dritte Linse muss in diesem Falle aus demselben Glas bestehen. Für die mittlere Linse kann die Glassorte beliebig gewählt werden.

Zur Leitung für numerische Rechnung führe ich zuletzt die Werthe von g und k für ein optisches System, aus höchst sechs Flächen bestehend, an. Dieselben sind aus den Gleichungen (1*) successive berechnet. Es wird

$$k_0 = 0$$
$$g_0 = 1$$

$$k_1 = u^0$$
$$g_1 = 1 + t'u^0$$

$$k_2 = u^0 + u'(1 + t'u^0)$$
$$g_2 = 1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))$$

$$k_3 = u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''\big(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))\big)$$
$$g_3 = 1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)) +$$
$$+ t'''\big[u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''\big(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u_0))\big)\big]$$

$$k_4 = u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''\big(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))\big) +$$
$$+ u'''\big[1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)) +$$
$$+ t'''\big(u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''\big(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))\big)\big)\big]$$
$$g_4 = 1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)) +$$
$$+ t'''\big[u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''\big(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))\big)\big]$$
$$+ t^{IV}k_4$$

$$k_5 = k_4 + u^{IV}g_4$$
$$g_5 = g_4 + t^{V}k_5$$

$$k_6 = k_5 + u^{V}g_5$$
$$g_6 = g_5 + t^{VI}k_6 \,.$$

Setzen wir

$$x = u^0 + u' + t'u^0u'$$
$$y = u'' + u''' + t'''u''u'''$$
$$z = u^{IV} + u^V + t^V u^{IV} u^V ,$$

so bekommen wir folgenden Ausdruck für k_6, der unter Umständen von Nutzen sein kann:

$$\begin{aligned} k_6 = x + y + z + \\ + t'u^0y + t'u^0z + t''xy + t''xz + \\ + t'''xu''' + t'''xz + t''u''z + \\ + t^{IV}xz + t^{IV}yz + t^Vu^Vx + t^Vu^Vy + \\ + t'''t'u''u^0z + t'''t''xu''z + \\ + t^{IV}t'u^0yz + t^{IV}t''xyz + t^{IV}t'''xu''z + \\ + t^Vt'u^Vu^0y + t^Vt''u^Vxy + t^Vt'''u^Vxu''' . \end{aligned}$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 9.
Stockholm.

Undersökningar öfver några aritmetiska funktioner.

Af ALEXANDER BERGER.

[Meddeladt den 9 November 1898 genom M. FALK.]

I. Allmänna teorem.

Om n är ett helt positivt tal, hvars samtliga positiva divisorer äro

$$(1) \qquad d_1, d_2, d_3, \ldots d_s,$$

så äro qvoterna

$$(2) \qquad \frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \frac{n}{d_3}, \ldots \frac{n}{d_s}$$

hela positiva tal samt äfven divisorer till n. Emedan dessa tal äro sins emellan olika, så äro de också talets n samtliga positiva divisorer. Samtliga hela positiva talen

$$(3) \qquad 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

kunna nu tydligen indelas i s grupper på följande sätt. Till den första gruppen räknas de bland talen (3), som ha den största gemensamma divisorn $\frac{n}{d_1}$ med n, till den andra gruppen de bland dessa tal, som ha den största gemensamma divisorn $\frac{n}{d_2}$ med n, o. s. v., och till den s:te gruppen föras de bland talen (3), som ha den största gemensamma divisorn $\frac{n}{d_s}$ med n. Att en sådan indelning är möjlig, följer deraf, att den största gemen-

samma divisorn till n och något af talen (3) alltid är lika med *ett* och lika med *blott ett* af talen (2).

Vi skola nu bestämma, hvilka tal tillhöra hvar och en af dessa s grupper. De tal, som höra till den första gruppen, måste finnas bland talen $r \cdot \frac{n}{d_1}$, der $r = 1, 2, 3, \ldots$, alldenstund de skola ha $\frac{n}{d_1}$ till divisor. Men emedan $\frac{n}{d_1}$ skall vara den största gemensamma divisorn till $r \cdot \frac{n}{d_1}$ och $d_1 \cdot \frac{n}{d_1}$, så måste r och d_1 vara relativa primtal, och omvändt om r och d_1 äro relativa primtal, så är den största gemensamma divisorn till $r \cdot \frac{n}{d_1}$ och $d_1 \cdot \frac{n}{d_1}$ tydligen lika med $\frac{n}{d_1}$. Häraf följer, att samtliga till den första gruppen hörande talen erhållas af uttrycket $r\frac{n}{d_1}$, om man der låter r genomlöpa alla hela positiva tal, som äro relativa primtal till d_1. På samma sätt erhållas uttryck för de till de öfriga grupperna hörande talen, och om vi med $f(m)$ beteckna en funktion af m, hvilken blott behöfver vara definierad för hela positiva värden på m, så följer af det föregående, att

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} f(k) = \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d_1} f\left(r\frac{n}{d_1}\right) + \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d_2} f\left(r\frac{n}{d_2}\right) + \ldots + \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d_s} f\left(r\frac{n}{d_s}\right),$$

om nämligen serien i venstra membrum äro absolut konvergent, och om vi i allmänhet med ett uttryck af formen

$$\sum_{r=a}^{r=b}{}'_{c} F(r),$$

der a, b, c äro hela tal samt $a \leqq b$, förstå summan af de värden, som $F(r)$ antager, då r genomlöper dem bland talen a, $a + 1, \ldots b$, som äro relativa primtal till c. Vi sätta eqv. (4) under formen

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} f(k) = \sum_{d} \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d} f\left(\frac{rn}{d}\right), \tag{5}$$

der vid summationen i högra membrum d genomlöper talets n alla positiva divisorer. Om vi med d' förstå den komplementära divisorn till d, så att

$$dd' = n, \tag{6}$$

så kan formeln (5) enligt KRONECKERS beteckningssätt skrifvas

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} f(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d} f(rd'), \tag{7}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem I. Om n är ett helt positivt tal, och $f(m)$ en funktion af m, som blott behöfver vara definierad för hela positiva värden på m, så är

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} f(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d} f(rd'),$$

om blott serien i venstra membrum är absolut konvergent.

Om vi nu antaga, att funktionen $f(m)$ är definierad blott för de hela talen

$$m = 1, 2, 3, \ldots n-1, n, \tag{8}$$

så kan teorem I icke direkt användas på denna funktion. Men om vi då definiera en funktion $f_1(m)$ medelst likheterna

$$\begin{cases} f_1(m) = f(m) & \text{för } m = 1, 2, 3, \ldots n, \\ f_1(m) = 0 & \text{för } m \geqq n+1, \end{cases} \tag{9}$$

så är $f_1(m)$ definierad för alla hela positiva värden på m, och om vi använda teorem I på funktionen $f_1(m)$, så få vi formeln

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} f_1(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{d} f_1(rd'), \tag{10}$$

hvilken vi skrifva på följande sätt:

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{k=n} f_1(k) + \sum_{k=n+1}^{k=\infty} f_1(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=d}{}'_d f_1(rd') + \sum_{dd'=n} \sum_{r=d+1}^{r=\infty}{}'_d f_1(rd').$$

Men enligt den andra af eqvationerna (9) är den sista summan i både venstra och högra membrum af eqv. (11) noll, och vi få alltså

$$\sum_{k=1}^{k=n} f_1(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=d}{}'_d f_1(rd')$$

och således enligt den första af eqvationerna (9)

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{k=n} f(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=d}{}'_d f(rd'),$$

och vi kunna uppställa följande teorem.

Teorem II. Om n är ett helt positivt tal, och $f(m)$ en funktion af m, som blott behöfver vara definierad för

$$m = 1, 2, 3, \ldots n,$$

så är

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(k) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=d}{}'_d f(rd').$$

För hvarje helt positivt tal n definierar Kronecker en qvantitet ε_n på följande sätt:

1) Om n är delbart med någon qvadrat, som är större än 1, så sättes

$$(13) \quad \varepsilon_n = 0;$$

2) om n icke är delbart med någon sådan qvadrat, d. v. s. om

$$(14) \quad n = 1 \text{ eller } n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s,$$

der $p_1, p_2, \ldots p_s$ äro sins emellan olika primtal, så sättes i första fallet

$$(15) \quad \varepsilon_1 = 1$$

och i andra fallet

$$\varepsilon_n = (-1)^s. \tag{16}$$

För de första hela talen finna vi

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = -1,\ \varepsilon_4 = 0,\ \varepsilon_5 = -1,\ \varepsilon_6 = +1, \\ \quad \varepsilon_7 = -1,\ \varepsilon_8 = 0,\ \varepsilon_9 = 0,\ \varepsilon_{10} = +1. \end{cases} \tag{17}$$

Vi skola nu evaluera summan

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d f(d) \tag{18}$$

och uppdela för den skull n i sina primfaktorer enligt formeln

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}, \tag{19}$$

der p_1, p_2, ... p_s äro sins emellan olika primtal, och der alla exponenterna α_1, α_2, ... α_s äro hela positiva tal. Vi erhålla *alla* positiva divisorer d till talet n, om vi i uttrycket

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s} \tag{20}$$

sätta

$$\beta_1 = 0, 1, 2, \ldots \alpha_1;\ \beta_2 = 0, 1, 2, \ldots \alpha_2;\ \ldots \beta_s = 0, 1, 2, \ldots \alpha_s \tag{21}$$

och kombinera alla dessa värden på β_1, β_2, ... β_s med hvarandra på alla sätt. Men emedan i summan (18) faktorn ε_d är noll, om d är delbart med någon qvadrat, som är större än 1, så är det tillräckligt att i denna summa låta d genomlöpa dem bland talets n divisorer, som icke äro delbara med någon qvadrat, som är större än 1. Vi ha alltså att i denna summa införa följande värden på d:

$$\begin{gathered} 1, \\ p_1, p_2, p_3, \ldots p_s, \\ p_1p_2, p_1p_3, \ldots\ldots p_{s-1}p_s, \\ p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, \ldots\ldots\ldots p_{s-2}p_{s-1}p_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1p_2p_3 \ldots p_s, \end{gathered}$$

som vi erhålla af eqv. (20) genom att sätta β_1, β_2, ... β_s lika med 0 och 1.

Emedan vi enligt definitionen på ε_n ha

$$(22)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = +1,\ \varepsilon_{p_\lambda} = -1,\ \varepsilon_{p_\lambda p_\mu} = +1,\ \varepsilon_{p_\lambda p_\mu p_\nu} = -1,\ \ldots \\ \qquad\qquad \varepsilon_{p_1 p_2 \ldots p_s} = (-1)^s\,, \end{cases}$$

så finna vi

$$(23)\quad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d f(d) = f(1) \\ - f(p_1) - f(p_2) - \ldots - f(p_s) \\ + f(p_1 p_2) + f(p_1 p_3) + \ldots + f(p_{s-1} p_s) \\ - f(p_1 p_2 p_3) - f(p_1 p_2 p_4) - \ldots - f(p_{s-2} p_{s-1} p_s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^s f(p_1 p_2 \ldots p_s)\,.$$

Denna likhet gäller för hvarje funktion $f(m)$. Vi skola nu använda densamma på speciela funktioner. Vi beteckna med $g(m)$ en funktion, som blott behöfver vara definierad för hela positiva tal m, och som för alla hela positiva värden på m och n uppfyller vilkoren

$$(24)\qquad g(m)g(n) = g(mn)\,,\ g(1) = 1\,,$$

och om vi då i eqv. (23) sätta

$$(25)\qquad f(m) = g(m)$$

och använda formlerna (24), så erhålla vi

$$(26)\quad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) = 1 \\ - g(p_1) - g(p_2) - \ldots - g(p_s) \\ + g(p_1)g(p_2) + g(p_1)g(p_3) \ldots + g(p_{s-1})g(p_s) \\ - g(p_1)g(p_2)g(p_3) - \ldots\ldots - g(p_{s-2})g(p_{s-1})g(p_s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^s g(p_1)g(p_2) \ldots g(p_s)\,.$$

Om vi nu antaga, att $n \geqq 2$, så följer af eqv. (19), att $s \geqq 1$, och vi få af eqv. (26)

$$(27)\quad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) = \{1 - g(p_1)\}\{1 - g(p_2)\} \ldots \{1 - g(p_s)\}\,;$$

här betyda $p_1, p_2, \dots p_s$ samtliga positiva primtal, som gå jämt upp i n, och vi kunna alltså sätta eqv. (27) under formen

$$(28) \qquad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) = \prod_{pd'=n} (1 - g(p)) ;$$

för $n = 1$ är venstra membrum 1, och vi kunna uppställa följande teorem.

Teorem III. Om n är ett helt positivt tal, och om $g(m)$ är en funktion, som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoren

$$g(m)g(n) = g(mn)\,,\ g(1) = 1\,,$$

så är

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) = \begin{cases} \prod_{pd'=n} \{1 - g(p)\}\,, & \text{om } n \geqq 2\,, \\ 1\,, & \text{om } n = 1\,. \end{cases}$$

För den speciela funktionen $g(m) = 1$ följer häraf, att

$$(29) \qquad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d = \begin{cases} 0\,, & \text{om } n \geqq 2\,, \\ 1\,, & \text{om } n = 1\,. \end{cases}$$

Om vi antaga, att $g(m)$ ej är noll för något helt positivt värde på m, och om vi i teorem III ersätta $g(m)$ med $\frac{1}{g(m)}$, hvilket tydligen är tillåtet, alldenstund äfven funktionen $\frac{1}{g(m)}$ uppfyller de föreskrifna vilkoren, så erhålles för $n \geqq 2$

$$(30) \qquad \sum_{dd'=n} \frac{\varepsilon_d}{g(d)} = \prod_{pd'=n} \left(1 - \frac{1}{g(p)}\right),$$

men af relationen $dd' = n$ följer

$$(31) \qquad g(d)g(d') = g(dd') = g(n)\,,$$

och alltså kan eqv. (30) skrifvas för $n \geqq 2$

$$(32) \qquad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d') = g(n) \prod_{pd'=n} \left(1 - \frac{1}{g(p)}\right),$$

der p vid produkten genomlöper alla primtal, som äro divisorer till n.

Om vi nu med $p_1, p_2, p_3, \ldots$ beteckna de positiva primtalen ordnade efter storlek, så att

$$(33) \qquad p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11, \ldots$$

och om vi i teorem III sätta

$$(34) \qquad n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s\,,$$

der s är ett godtyckligt helt positivt tal, så få vi

$$(35) \qquad \sum_{dd' = p_1 p_2 \ldots p_s} \varepsilon_d g(d) = \prod_{h=1}^{h=s} (1 - g(p_h))\,.$$

Vi antaga nu, att funktionen $g(m)$, förutom de förut angifna egenskaperna, äfven är så beskaffad, att serien

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)$$

är absolut konvergent; låta vi då s växa i oändlighet, så kommer d vid summationen i venstra membrum af eqvationen (35) att genomlöpa alla hela positiva tal, som ej äro delbara med någon qvadrat, som är större än 1. Emedan vidare ε_d är noll för alla tal d, som äro delbara med sådana qvadrater, så kunna vi låta d genomlöpa *alla* hela positiva tal, och om vi skrifva k i stället för d, så erhålla vi alltså af eqv. (35) för $s = \infty$

$$(36) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_k g(k) = \prod_{h=1}^{h=\infty} (1 - g(p_h))\,,$$

hvilken likhet äfven kan sättas under formen

$$(37) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_k g(k) = \prod_{p} (1 - g(p))\,.$$

Teorem IV. Om $g(m)$ är en funktion af m, som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoren

$$g(m) g(n) = g(mn)\,,\ g(1) = 1\,,$$

och om vidare serien

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)$$

är absolut konvergent, så är

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_k g(k) = \prod_p (1 - g(p)),$$

der p i högra membrum genomlöper alla positiva primtal.

Vi beteckna nu med $l(m)$ en funktion, som blott behöfver vara definierad för hela positiva tal, och som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoret

$$l(m) + l(n) = l(mn); \tag{38}$$

för $m = 1$ följer häraf

$$l(1) = 0. \tag{39}$$

Såsom exempel på en dylik funktion kan anföras $l(m) = \log m$.

Om vi i eqv. (23) sätta

$$f(m) = l(m), \tag{40}$$

så erhålla vi, om n är bestämdt af eqv. (19),

$$\begin{aligned}\sum_{dd'=n} \varepsilon_d l(d) = l(1) & \\ - l(p_1) - l(p_2) - \ldots - l(p_s) & \\ + l(p_1 p_2) + l(p_1 p_3) + \ldots + l(p_{s-1} p_s) & \\ - l(p_1 p_2 p_3) - l(p_1 p_2 p_4) - \ldots - l(p_{s-2} p_{s-1} p_s) & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + (-1)^s l(p_1 p_2 \ldots p_s). &\end{aligned} \tag{41}$$

Om vi på termerna i högra membrum af denna likhet använda formlerna (38) och (39), så reduceras detta högra membrum till en lineär homogen funktion af $l(p_1)$, $l(p_2)$, ... $l(p_s)$, der hvarje koefficient är lika med

$$-1 + \frac{s-1}{1} - \frac{(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2} + \ldots + (-1)^s$$

d. v. s. lika med

$$-(1-1)^{s-1}$$

och alltså lika med noll, om $s \geqq 2$, d. v. s. om n är delbart med minst två olika primtal. I detta fall erhålla vi alltså af eqv. (41)

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d l(d) = 0 . \tag{42}$$

Är åter n en dignitet af ett primtal p, så är $s = 1$ enligt eqv. (19), och då följer af eqv. (41)

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d l(d) = l(1) - l(p) = - l(p) ; \tag{43}$$

om slutligen $n=1$, så gäller eqv. (42), och vi få alltså följande teorem.

Teorem V. Om n är ett helt positivt tal, och om $l(m)$ är en funktion, som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoret

$$l(m) + l(n) = l(mn) ,$$

så är

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d l(d) = 0 ,$$

om $n=1$, och om n är delbart med minst två olika primtal, men

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d l(d) = - l(p) ,$$

om n är en dignitet af ett primtal p.

För den speciela funktionen $l(m) = \log m$ följer af detta teorem

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d \log d = 0 \text{ eller } - \log p , \tag{44}$$

och alltså få vi

$$\prod_{dd'=n} d^{-\varepsilon_d} = 1 , \tag{45}$$

om $n=1$, och om n är delbart med minst två olika primtal, men

$$\prod_{dd'=n} d^{-\varepsilon_d} = p\,, \tag{46}$$

om n är en dignitet af ett primtal p.

Vi skola nu göra en annan användning af teorem V. Om n är ett helt pos. tal, och om vi uppdela n i sina primfaktorer enligt formeln

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}, \tag{47}$$

der p_1, p_2, ... p_s äro de sins emellan olika primtal, som gå upp i n, och exponenterna α_1, α_2, ... α_s hela positiva tal, så blifva dessa exponenter fullt bestämda af talet n, och detsamma gäller således om deras summa. Om vi beteckna denna exponentsumma med $\exp(n)$, så att

$$\exp(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s\,, \quad \exp(1) = 0\,, \tag{48}$$

så har $\exp(n)$ ett fullt bestämdt värde för hvarje helt positivt tal n. Man finner lätt, att för funktionen $\exp(n)$ gäller räknelagen

$$\exp(m) + \exp(n) = \exp(mn) \tag{49}$$

för alla hela positiva tal m och n. För de första hela talen få vi

$$\begin{cases} \exp(1) = 0\,, \ \exp(2) = 1\,, \ \exp(3) = 1\,, \ \exp(4) = 2\,, \\ \exp(5) = 1\,, \ \exp(6) = 2\,, \ \exp(7) = 1\,, \ \exp(8) = 3\,, \\ \exp(9) = 2\,, \ \exp(10) = 2\,, \ \exp(11) = 1\,, \ \exp(12) = 3\,. \end{cases} \tag{50}$$

På grund af formeln (49) kunna vi i teorem V sätta

$$l(m) = \exp(m)\,, \tag{51}$$

och vi finna då, att funktionen $\exp(n)$ har den egenskapen, att

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d \exp(d) = 0\,, \tag{52}$$

om $n = 1$, och om n är delbart med minst två olika primtal, men att

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d \exp(d) = -1\,, \tag{53}$$

om n är en dignitet af ett primtal.

Vi antaga nu, att $f(m)$ är en funktion af m, som blott behöfver vara definierad för hela positiva tal m, och som har den egenskapen, att serien

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f(m)$$

är absolut konvergent. Då är tydligen summan

$$S = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} f(kd) \tag{54}$$

en ändlig bestämd qvantitet för hvarje helt positivt tal n, och vi skola här evaluera S. Om vi sätta S under formen

$$S = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \{f(d) + f(2d) + f(3d) + f(4d) + \ldots\}, \tag{55}$$

och om vi med $d_1, d_2, \ldots d_s$ beteckna talets n samtliga positiva divisorer, så finna vi, om termerna i summan i högra membrum utskrifvas,

$$\begin{aligned} S = {} & \varepsilon_{d_1} \{f(d_1) + f(2d_1) + f(3d_1) + f(4d_1) + \ldots\} \\ & + \varepsilon_{d_2} \{f(d_2) + f(2d_2) + f(3d_2) + f(4d_2) + \ldots\} \\ & + \varepsilon_{d_3} \{f(d_3) + f(2d_3) + f(3d_3) + f(4d_3) + \ldots\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varepsilon_{d_s} \{f(d_s) + f(2d_s) + f(3d_s) + f(4d_s) + \ldots\}. \end{aligned} \tag{56}$$

Här ingå i högra membrum termer af formen $f(r)$, der r är ett helt positivt tal, och följaktligen erhålla vi genom omordning af termerna en likhet af formen

$$S = \sum_{r=1}^{r=\infty} c_r f(r), \tag{57}$$

der koefficienterna c_r bestämmas på följande sätt. Om r är ett godtyckligt positivt tal, så är c_r lika med koefficienten för $f(r)$ i högra membrum af eqv. (56). Vi se, att $f(r)$ der förekommer *högst en* gång i hvarje horisontalrad; vidare förekommer $f(r)$ i

första raden, om d_1 är en divisor till r, men eljest icke; $f(r)$ förekommer i andra raden, om d_2 är en divisor till r, men eljest icke, o. s. v. Häraf följer, att

$$c_r = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon\delta_2 + \ldots + \varepsilon\delta_t, \tag{58}$$

der $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_t$ beteckna dem bland talen $d_1, d_2, \ldots d_s$, som äro divisorer till r. Men emedan $d_1, d_2, \ldots d_s$ äro talets n samtliga divisorer, så äro $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_t$ samtliga gemensamma divisorerna till n och r. Häraf följer vidare, att $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_t$ äro samtliga divisorerna till talens n och r största gemensamma divisor. Beteckna vi denna med D_r, så följer alltså af eqv. (58), att

$$c_r = \sum_{\delta\delta' = D_r} \varepsilon\delta, \tag{59}$$

och om detta värde på c_r införes i eqv. (57), så erhålles

$$S = \sum_{r=1}^{r=\infty} f(r) \sum_{\delta\delta' = D_r} \varepsilon\delta. \tag{60}$$

Men enligt eqv. (29) är

$$\sum_{\delta\delta' = D_r} \varepsilon\delta = 0, \tag{61}$$

om $D_r \geqq 2$, d. v. s. om r icke är relativt primtal till n, men

$$\sum_{\delta\delta' = D_r} \varepsilon\delta = 1, \tag{62}$$

om $D_r = 1$, d. v. s. om r är relativt primtal till n. På grund häraf följer af eqv. (60), att

$$S = {\sum_{r=1}^{r=\infty}}'_{n} f(r) \tag{63}$$

eller enligt eqv. (54)

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{n} f(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} f(kd), \tag{64}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem VI. Om $f(m)$ är en funktion af m, som blott behöfver vara definierad för hela positiva värden på m, och om serien

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f(m)$$

är absolut konvergent, så är för hvarje helt positivt tal n

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{n} f(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} f(kd).$$

Om vi i den nu bevisade formeln sätta

$$n = p_1 p_2 \dots p_s, \tag{65}$$

der $p_1, p_2, \dots p_s$ beteckna de s första primtalen, så erhålla vi

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}'_{p_1\dots p_s} f(r) = \sum_{dd'=p_1p_2\dots p_s} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} f(kd), \tag{66}$$

och om vi här låta s obegränsadt växa, så reduceras serien i venstra membrum tydligen till termen $f(1)$, och i högra membrum kommer d att genomlöpa alla hela positiva tal, som ej äro delbara med någon annan qvadrat än 1; emedan vidare faktorn ε_d är noll, om d är delbart med någon sådan qvadrat, så kunna vi i högra membrum låta d genomlöpa *alla* hela positiva tal, och vi få alltså af eqv. (66)

$$f(1) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} f(kd) \tag{67}$$

eller, om vi skrifva h i stället för d,

$$f(1) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h \sum_{k=1}^{k=\infty} f(hk). \tag{68}$$

Om vi med $F(x)$ beteckna en funktion af en kontinuerlig variabel x och med $g(m)$ en funktion, som uppfyller vilkoren (24), och om vi i eqv. (68) sätta

(69) $$f(m) = g(m)F(mx),$$

så få vi formeln

(70) $$F(x) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k)F(hkx),$$

och vi kunna alltså uppställa följande teorem.

Teorem VII. Om $F(x)$ är en funktion af en variabel x, och om $g(m)$ är en funktion, som blott behöfver vara definierad för hela positiva värden på m, och som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoren

$$g(m)g(n) = g(mn), \quad g(1) = 1,$$

så är

$$F(x) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k)F(hkx)$$

för alla värden på x, för hvilka serien i högra membrum är absolut konvergent.

Om vi i den nu bevisade formeln sätta

(71) $$F(x) = 1,$$

och låta båda membra byta plats, så erhålla vi

(72) $$\sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) = 1$$

och således enligt teorem IV

(73) $$\sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) = \prod_p \frac{1}{1-g(p)}.$$

Teorem VIII. Om $g(m)$ är en funktion, som uppfyller vilkoren

$$g(m)g(n) = g(mn), \quad g(1) = 1$$

för alla hela positiva tal m och n, och om serien

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)$$

är absolut konvergent, så är

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) = 1$$

och

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) = \prod_p \frac{1}{1-g(p)},$$

der p genomlöper alla positiva primtal.

Om vi antaga, att $f(m)$ är en funktion af m, som blott är definierad för de hela talen

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n, \tag{74}$$

så kan teorem VI icke direkt tillämpas på denna funktion. Men om vi definiera en funktion $f_1(m)$ medelst formlerna

$$\begin{cases} f_1(m) = f(m) & \text{för } m = 1,\ 2,\ \ldots\ n, \\ f_1(m) = 0 & \text{för } m \geqq n+1, \end{cases} \tag{75}$$

så kan teorem VI användas på funktionen $f_1(m)$, och vi få då

$$\sideset{}{'_n}\sum_{r=1}^{r=\infty} f_1(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} f_1(kd) \tag{76}$$

eller

$$\sideset{}{'_n}\sum_{r=1}^{r=n} f_1(r) + \sideset{}{'_n}\sum_{r=n+1}^{r=\infty} f_1(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=d'} f_1(kd) + \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=d'+1}^{k=\infty} f_1(kd) \tag{77}$$

eller enligt den andra af formlerna (75)

$$\sideset{}{'_n}\sum_{r=1}^{r=n} f_1(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=d'} f_1(kd) \tag{78}$$

och således, om vi använda den första af formlerna (75),

$$\sum_{r=1}^{r=n}{}_n' f(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=d'} f(kd) . \tag{79}$$

Teorem IX. Om n är ett helt positivt tal, och $f(m)$ en funktion, som blott behöfver vara definierad för

$$m = 1, 2, 3, \ldots n,$$

så är

$$\sum_{r=1}^{r=n}{}_n' f(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=d'} f(kd) .$$

Om vi i teorem VI sätta

$$f(m) = g(m), \tag{80}$$

der funktionen $g(m)$ har de af eqv. (24) angifna egenskaperna, så erhålles

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' g(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=\infty} g(kd) \tag{81}$$

och således enligt eqv. (24)

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' g(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) \tag{82}$$

eller enligt teorem III, om vi antaga, att $n \geq 2$,

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' g(r) = \prod_{pd'=n} (1 - g(p)) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) . \tag{83}$$

Teorem X. Om $g(m)$ är en funktion af m, som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoren

$$g(m) \cdot g(n) = g(mn) , \; g(1) = 1 ,$$

så är för $n \geq 2$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' g(r) = \prod_{pd'=n} (1 - g(p)) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) ,$$

om blott serien i högra membrum är absolut konvergent.

Om vi i teorem IX införa

$$f(m) = g(m)\,, \tag{84}$$

så erhålles enligt formlerna (24)

$$\sum_{r=1}^{r=n}{}'_{n}\, g(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) \sum_{k=1}^{k=d'} g(k)\,. \tag{85}$$

Teorem XI. Om n är ett helt positivt tal, och om $g(m)$ är en funktion, som för alla hela positiva tal m och n uppfyller vilkoren

$$g(m)g(n) = g(mn)\,,\; g(1) = 1\,,$$

så är

$$\sum_{r=1}^{r=n}{}'_{n}\, g(r) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d g(d) \sum_{k=1}^{k=d'} g(k)\,.$$

Om $f(m)$ och $f_1(m)$ äro två funktioner, som blott behöfva vara definierade för hela positiva tal m, och om $F(x)$ är en funktion af en variabel x, så existerar tydligen en identitet af formen

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} f(h) f_1(k) F(hkx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n F(nx)\,, \tag{86}$$

ty om man tilldelar de två qvantiteterna h och k alla hela positiva talvärden, så erhåller man af uttrycket $F(hkx)$ blott termer af formen $F(nx)$, der n betecknar något helt positivt tal. Hvad koefficienterna c_n beträffar, så blifva de bestämda af formeln

$$c_n = \sum_h \sum_k f(h) f_1(k)\,, \tag{87}$$

der de hela talen h och k kombineras med hvarandra på alla sätt, som äro förenliga med vilkoret

$$hk = n\,; \tag{88}$$

häraf följer, att h genomlöper alla positiva divisorer till n, och emedan för ett bestämdt värde på h talet k också är fullt bestämdt enligt eqv. (88), så kan eqv. (87) skrifvas

$$c_n = \sum_{hk=n} f(h) f_1(k) \tag{89}$$

eller, om vi skrifva d och d' i stället för h och k,

$$c_n = \sum_{dd'=n} f(d) f_1(d') \,. \tag{90}$$

Om detta värde på c_n införes i eqv. (86), så erhålles formeln

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} f(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} f_1(k) F(hkx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(nx) \sum_{dd'=n} f(d) f_1(d') \,, \tag{91}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XII. Om $f(m)$ och $f_1(m)$ äro funktioner af m, som blott behöfva vara definierade för hela positiva tal m, och om $F(x)$ är en funktion af en variabel x, så är

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} f(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} f_1(k) F(hkx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(nx) \sum_{dd'=n} f(d) f_1(d')$$

för alla värden på x, för hvilka serierna äro absolut konvergenta.

Om vi i den nu bevisade formeln sätta

$$f(m) = \varepsilon_m g(m) \,, \quad f_1(m) = g(m) \,, \tag{92}$$

samt låta de två membra byta plats, så erhålla vi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} F(nx) g(n) \sum_{dd'=n} \varepsilon_d = \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) F(hkx) \tag{93}$$

eller, om vi på venstra membrum använda eqv. (29) och (24),

$$F(x) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) F(hkx) \,, \tag{94}$$

hvaraf synes, att teorem VII är ett specielt fall af teorem XII.

Vi låta nu $f(m)$ vara en funktion, som blott behöfver ha betydelse för de hela positiva talen

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n \,, \tag{95}$$

der n är ett godtyckligt helt positivt tal, och då är summan

$$(96) \qquad S = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{\delta\delta'=d'} f(\delta)$$

en ändlig bestämd qvantitet, som vi här skola bestämma. Om vi med

$$d_1\,,\; d_2\,,\; \ldots\; d_{s-1}\,,\; d_s$$

beteckna talets n positiva divisorer, ordnade efter växande storlek, så att

$$(97) \qquad d_1 = 1\,,\; d_s = n\,,$$

så äro tydligen de motsvarande komplementära divisorerna i ordning

$$d_s\,,\; d_{s-1}\,,\; \ldots\; d_2\,,\; d_1\,,$$

så att alltid för $1 \leqq h \leqq s$

$$(98) \qquad d_h d_{s+1-h} = n\,,$$

och vi kunna alltså sätta eqv. (96) under formen

$$(99) \qquad S = \sum_{h=1}^{h=s} \varepsilon_{d_h} \sum_{\delta\delta'=d_{s+1-h}} f(\delta)$$

eller, om termerna utskrifvas,

$$(100)\; S = \varepsilon_{d_1} \sum_{\delta\delta'=d_s} f(\delta) + \varepsilon_{d_2} \sum_{\delta\delta'=d_{s-1}} f(\delta) + \ldots + \varepsilon_{d_s} \sum_{\delta\delta'=d_1} f(\delta)\,.$$

Om vi nu beteckna

divisorerna till d_s med δ'_s, δ''_s, δ'''_s, ...,

divisorerna till d_{s-1} med δ'_{s-1}, δ''_{s-1}, δ'''_{s-1}, ...,

. . . .

divisorerna till d_1 med δ'_1, δ''_1, δ'''_1, ...,

så erhålla vi af eqv. (100)

$$\begin{aligned}(101) \qquad S &= \varepsilon_{d_1} \left\{ f\left(\delta'_s\right) + f\left(\delta''_s\right) + f\left(\delta'''_s\right) + \ldots \right\} \\ &+ \varepsilon_{d_2} \left\{ f\left(\delta'_{s-1}\right) + f\left(\delta''_{s-1}\right) + f\left(\delta'''_{s-1}\right) + \ldots \right\} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \varepsilon_{d_s} \left\{ f\left(\delta'_1\right) + f\left(\delta''_1\right) + f\left(\delta'''_1\right) + \ldots \right\}.\end{aligned}$$

Emedan nu de i högra membrum af denna likhet ingående qvantiteterna δ äro divisorer till talen d_s, d_{s-1}, ... d_1, d. v. s. till talets n divisorer, så äro de också divisorer till n, och bland talen δ kunna alltså icke finnas några andra tal än d_1, d_2 ... d_s. Följaktligen reduceras eqv. (101) till en likhet af formen

$$S = \sum_{h=1}^{h=s} c_h f(d_h), \tag{102}$$

der det återstår att bestämma koefficienten c_h. Om h är ett hvilket som hälst af talen 1, 2, 3, ... s, så är c_h lika med koefficienten för $f(d_h)$ i högra membrum af eqv. (101). Vi se, att $f(d_h)$ förekommer der högst *en* gång i hvarje horisontalrad; vidare förekommer $f(d_h)$ i första raden, om d_h är lika med något af talen δ'_s, δ''_s, δ'''_s, ... d. v. s. om d_h är divisor till d_s, eller med andra ord, enligt eqv. (98), om d_1 är divisor till d_{s+1-h}, men eljest förekommer icke $f(d_h)$ i första raden. Likaledes finna vi, att $f(d_h)$ förekommer i andra raden, om d_h är lika med något af talen δ'_{s-1}, δ''_{s-1}, δ'''_{s-1} ..., d. v. s. om d_h är divisor till d_{s-1}, eller, enligt eqv. (98), om d_2 är divisor till d_{s+1-h}, men eljest förekommer icke $f(d_h)$ i andra raden o. s. v. Häraf följer, att

$$c_h = \varepsilon_{\delta_1} + \varepsilon_{\delta_2} + \ldots + \varepsilon_{\delta_t}, \tag{103}$$

der δ_1, δ_2, ... δ_t beteckna dem bland talen d_1, d_2, ... d_s, som äro divisorer till d_{s+1-h}. Talen δ_1, δ_2, ... δ_t äro alltså samtliga gemensamma divisorerna till de två talen n och d_{s+1-h}, och emedan d_{s+1-h} är en divisor till n, så sammanfalla således talen δ_1, δ_2, ... δ_t alldeles med talets d_{s+1-h} samtliga divisorer. Af eqv. (103) följer då för $1 \leqq h \leqq s$

$$c_h = \sum_{\delta\delta' = d_{s+1-h}} \varepsilon_\delta, \tag{104}$$

och om detta värde på c_h införes i eqv. (102), så erhålla vi

$$S = \sum_{h=1}^{h=s} f(d_h) \sum_{\delta\delta' = d_{s+1-h}} \varepsilon_\delta. \tag{105}$$

Men enligt eqv. (29) är

(106)
$$\sum_{\delta\delta'=d_{s+1-h}} \varepsilon_\delta = 0,$$

om $d_{s+1-h} \geqq 2$, d. v. s. om $h = 1, 2, 3, \ldots s-2, s-1$, men

(107)
$$\sum_{\delta\delta'=d_{s+1-h}} \varepsilon_\delta = 1,$$

om $d_{s+1-h} = 1$, d. v. s., om $h = s$, och alltså följer af eqv. (105) och (97)

(108)
$$S = f(d_s) = f(n),$$

och af eqvationerna (96) och (108) erhålla vi formeln

(109)
$$f(n) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{\delta\delta'=d'} f(\delta),$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XIII. Om n är ett helt positivt tal, och om $f(m)$ är en funktion af m, som blott behöfver vara definierad för de hela talen

$$m = 1, 2, 3, \ldots n,$$

så är

$$f(n) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{\delta\delta'=d'} f(\delta).$$

II. Om några speciela aritmetiska funktioner.

I denna afdelning skola de i det föregående bevisade allmänna teoremen användas på några speciela aritmetiska funktioner. För hvarje helt positivt tal n definiera vi tio aritmetiska fnnktioner

(110)
$$e_n, \; \varepsilon_n, \; \varrho_n, \; \eta_n, \; \lambda_n, \; \zeta_n, \; \psi_n, \; \xi_n, \; \chi_n, \; \omega_n$$

på följande sätt:

1) Funktionen e_n definieras för hvarje helt posisivt tal n medelst likheten

(111) $$e_n = 1 .$$

2) Om n är ett helt positivt tal, så definieras ε_n, såsom förut nämnts, medelst likheten

(112) $$\varepsilon_n = 0 ,$$

om n är delbart med någon qvadrat, som är större än 1, men om n är en produkt af s sins emellan olika primtal, så sättes

(113) $$\varepsilon_n = (-1)^s , \; \varepsilon_1 = 1 .$$

3) Funktionen ϱ_n definieras medelst likheten

(114) $$\varrho_n = 1 ,$$

om n är ett qvadrattal, men medelst likheten

(115) $$\varrho_n = 0 ,$$

om n icke är ett qvadrattal.

4) Funktionen η_n definieras medelst formeln

(116) $$\eta_n = \varepsilon_{\sqrt{n}} ,$$

om n är ett qvadrattal, men medelst likheten

(117) $$\eta_n = 0 ,$$

om n icke är ett qvadrattal.

5) Funktionen λ_n definieras medelst likheten

(118) $$\lambda_n = (-1)^{\exp(n)}$$

för hvarje helt positivt tal n, så att λ_n är lika med $+1$ eller -1, allteftersom talets n exponentsumma är ett jämt eller ett udda tal.

6) Funktionen ζ_n definieras för hvarje helt positivt tal n medelst formeln

(119) $$\zeta_n = \varepsilon_n^2 ,$$

hvaraf följer, att ζ_n är lika med noll, om n är delbart med någon qvadrat, som är större än 1, samt att ζ_n är lika med 1, om n är en produkt af sins emellan olika primtal, samt om $n = 1$.

7) Med ψ_n förstås antalet af talets n positiva divisorer, så att alltid

$$\psi_n = \sum_{dd'=n} 1 . \tag{120}$$

8) Funktionen ξ_n definieras medelst likheterna

$$\xi_n = \begin{cases} 0 , & \text{om } n \geqq 2 , \\ 1 , & \text{om } n = 1 . \end{cases} \tag{121}$$

9) Med χ_n förstås antalet af talets n qvadratiska divisorer, så att

$$\chi_n = \sum_{dd'=n} \varrho_d . \tag{122}$$

10) Med ω_n betecknas antalet af dem bland talets n divisorer, som icke äro delbara med någon qvadrat, som är större än 1, hvaraf följer, att

$$\omega_n = \sum_{dd'=n} \zeta_d . \tag{123}$$

Sedan de tio funktionerna (110) nu blifvit definierade för alla hela positiva tal n, skola vi härleda relationer, som existera mellan dem. Om $g(m)$ är en funktion, som uppfyller vilkoren

$$g(m) g(n) = g(mn) , \; g(1) = 1 \tag{124}$$

för alla hela positiva tal m och n, så är enligt teorem VIII

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) \cdot \prod_p (1 - g(p)) = 1 \tag{125}$$

och

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_k g(k) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) = 1 , \tag{126}$$

om de här ingående serierna äro absolut konvergenta. Vi äro nu berättigade att i dessa två formler sätta

$$g(m) = \frac{1}{m^z} , \; g(m) = \frac{1}{m^{2z}} , \; g(m) = \frac{\lambda_m}{m^z} , \tag{127}$$

der $z > 1$, ty man ser omedelbart, att de två första af dessa funktioner uppfylla vilkoren (124); för att visa, att äfven den tredje funktionen satisfierar eqv. (124), utgå vi från formlerna (48), (49), nämligen

$$\exp(m) + \exp(n) = \exp(mn)\,, \ \exp(1) = 0\,, \tag{128}$$

som gälla för alla hela positiva tal m och n. Häraf följer, att

$$(-1)^{\exp(m)} \cdot (-1)^{\exp(n)} = (-1)^{\exp(mn)}\,, \ (-1)^{\exp(1)} = 1\,, \tag{129}$$

och således enligt definitionen på λ_n

$$\lambda_m \lambda_n = \lambda_{mn}\,, \ \lambda_1 = 1\,, \tag{130}$$

af hvilken likhet vi sluta, att äfven den tredje af funktionerna (127) uppfyller vilkoren (124).

Om vi nu införa de af eqvationerna (127) bestämda funktionerna $g(m)$ först i eqv. (125), så finna vi för $z > 1$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^z} \cdot \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = 1\,, \tag{131}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2z}} \cdot \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{2z}}\right) = 1\,, \tag{132}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} \cdot \prod_p \left(1 - \frac{\lambda_p}{p^z}\right) = 1\,. \tag{133}$$

Men af definitionen (118) på λ_n följer, att

$$\lambda_p = (-1)^{\exp(p)} = (-1)^1 = -1\,, \tag{134}$$

och således kan eqv. (133) skrifvas

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} \cdot \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^z}\right) = 1\,, \tag{135}$$

och genom elimination af de oändliga produkter, som ingå i eqvationerna (131), (132), (135), erhålla vi relationen

$$(136) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2z}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^z}$$

eller, om vi begagna oss af funktionerna e_n och ϱ_n,

$$(137) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varrho_k}{k^z} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e_k}{k^z} .$$

Om vi nu införa de af eqv. (127) bestämda funktionerna $g(m)$ i formeln (126), så erhålla vi för $z > 1$ formlerna

$$(138) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^z} = 1 ,$$

$$(139) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^{2z}} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2z}} = 1 ,$$

$$(140) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varepsilon_k \lambda_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} = 1 ,$$

hvilka vi transformera på följande sätt. Af eqv. (138) få vi först

$$(141) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^z} = 1 .$$

Enligt definitionerna på funktionerna η_n och ϱ_n kan eqv. (139) skrifvas

$$(142) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\eta_{k^2}}{k^{2z}} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varrho_k}{k^z} = 1 ;$$

men om vi i den första summan skrifva k i stället för k^2, så synes, att

$$(143) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\eta_{k^2}}{k^{2z}} = \sum_{k} \frac{\eta_k}{k^z} ,$$

der i summan i högra membrum k genomlöper samtliga qvadrattalen 1, 4, 9, 16, ... Men emedan η_k är noll, om k icke är ett qvadrattal, så kunna vi i denna summa låta k genomlöpa *alla* hela positiva tal, och vi få då ef eqv. (143)

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\eta_{k^2}}{k^{2z}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\eta_k}{k^z}, \tag{144}$$

och alltså kan eqv. (142) sättas under formen

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\eta_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varrho_k}{k^z} = 1. \tag{145}$$

Vi skola till sist transformera eqv. (140). Om k är ett helt tal, som är delbart med någon qvadrat, större än 1, så är ε_k noll, och således

$$\varepsilon_k \lambda_k = 0; \tag{146}$$

är åter k icke delbart med någon sådan qvadrat, så måste k vara af formen

$$k = p_1 p_2 \ldots p_s, \tag{147}$$

der $p_1, p_2, \ldots p_s$ äro sins emellan olika primtal, och då är

$$\varepsilon_k = (-1)^s, \; \lambda_k = (-1)^{\exp(k)} = (-1)^s, \tag{148}$$

och alltså

$$\varepsilon_k \lambda_k = 1. \tag{149}$$

Af eqv. (146) och (149) samt af definitionen på ζ_n följer, att

$$\varepsilon_k \lambda_k = \zeta_k \tag{150}$$

för alla hela positiva tal k, och således erhålla vi af eqv. (140)

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\zeta_k}{k^z} = 1. \tag{151}$$

Vi sammanföra nu på ett ställe formlerna (141), (145), (151) och skrifva dem på följande sätt:

$$(152)\quad \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{e_h}{h^z}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\varepsilon_k}{k^z}=1\,,$$

$$(153)\quad \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\eta_h}{h^z}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\varrho_k}{k^z}=1\,,$$

$$(154)\quad \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\lambda_h}{h^z}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\zeta_k}{k^z}=1\,.$$

Vi skola nu utföra de i de venstra membra tecknade multiplikationerna samt använda för den skull formeln

$$(155)\quad \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{f(h)}{h^z}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{f_1(k)}{k^z}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^z}\sum_{dd'=n}f(d)f_1(d')\,,$$

som vi erhålla af formeln i teorem XII, om vi der ersätta

$$f(h)\,,\ f_1(k)\,,\ F(x)\ \text{med}\ \frac{f(h)}{h^z},\ \frac{f_1(k)}{k^z},\ 1\,.$$

Medelst användning af likheten (155) på eqv. (152), (153), (154) erhålla vi af dessa eqvationer enligt definitionen på funktionen ξ_n

$$(156)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^z}\sum_{dd'=n}e_d\varepsilon_{d'}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\xi_n}{n^z}\,,$$

$$(157)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^z}\sum_{dd'=n}\eta_d\varrho_{d'}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\xi_n}{n^z}\,,$$

$$(158)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^z}\sum_{dd'=n}\lambda_d\zeta_{d'}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\xi_n}{n^z}\,.$$

Emedan hvar och en af dessa tre likheter gäller för *alla* värden på z, som äro större än 1, så måste koefficienterna för $\frac{1}{n^z}$ i båda membra vara lika med hvarandra, och vi erhålla alltså formlerna

$$(159) \qquad \sum_{dd'=n} e_d \varepsilon_{d'} = \xi_n ,$$

$$(160) \qquad \sum_{dd'=n} \eta_d \varrho_{d'} = \xi_n ,$$

$$(161) \qquad \sum_{dd'=n} \lambda_d \zeta_{d'} = \xi_n ,$$

hvilka gälla för alla hela positiva tal n.

Om vi kombinera de fyra eqvationerna (137), (152), (153), (154) med hvarandra, så erhålla vi med användning af andra summationsbokstäfver följande sex formler:

$$(162) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varrho_k}{k^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n^z} ,$$

$$(163) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varrho_h}{h^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\zeta_k}{k^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e_n}{n^z} ,$$

$$(164) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\zeta_h}{h^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^z} ,$$

$$(165) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{e_h}{h^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\eta_k}{k^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^z} ,$$

$$(166) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\eta_h}{h^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\lambda_k}{k^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^z} ,$$

$$(167) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\lambda_h}{h^z} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e_k}{k^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_n}{n^z} .$$

Om vi nu på de venstra membra i dessa sex likheter använda formeln (155), så erhålla vi följande resultat:

$$(168) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \varrho_{d'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n^z} ,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{dd'=n} \varrho_d \zeta_{d'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e_n}{n^z}, \tag{169}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{dd'=n} \zeta_d \varepsilon_{d'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^z}, \tag{170}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{dd'=n} e_d \eta_{d'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^z}, \tag{171}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{dd'=n} \eta_d \lambda_{d'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^z}, \tag{172}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^z} \sum_{dd'=n} \lambda_d e_{d'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_n}{n^z}, \tag{173}$$

och af dessa sex formler, hvilka gälla för $z > 1$, erhålla vi, om vi i hvar och en af dem sätta koefficienterna för $\frac{1}{n^z}$ i båda membra lika med hvarandra,

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d \varrho_{d'} = \lambda_n, \tag{174}$$

$$\sum_{dd'=n} \varrho_d \zeta_{d'} = e_n, \tag{175}$$

$$\sum_{dd'=n} \zeta_d \varepsilon_{d'} = \eta_n, \tag{176}$$

$$\sum_{dd'=n} e_d \eta_{d'} = \zeta_n, \tag{177}$$

$$\sum_{dd'=n} \eta_d \lambda_{d'} = \varepsilon_n, \tag{178}$$

$$\sum_{dd'=n} \lambda_d e_{d'} = \varrho_n, \tag{179}$$

hvilka formler gälla för alla hela positiva tal n.

Eqvationerna (159), (177), (179) kunna skrifvas enklare, nämligen

$$(180)\qquad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d = \xi_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \eta_d = \zeta_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \lambda_d = \varrho_n\,,$$

och enligt definitionerna på funktionerna ψ_n, χ_n, ω_n är

$$(181)\qquad \sum_{dd'=n} e_d = \psi_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \varrho_d = \chi_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \zeta_d = \omega_n\,.$$

Vi sammanföra nu formlerna (159)...(161), (174)...(179), (180), (181) i följande teorem.

Teorem XIV. För hvarje helt positivt tal n gälla formlerna

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d \varrho_{d'} = \lambda_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \lambda_d \zeta_{d'} = \xi_n\,, \quad \sum_{dd'=n} e_d \eta_{d'} = \zeta_n\,,$$

$$\sum_{dd'=n} \lambda_d = \varrho_n\,, \qquad \sum_{dd'=n} \zeta_d = \omega_n\,,$$

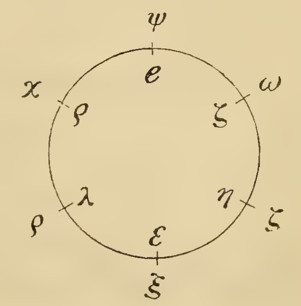
$$\sum_{dd'=n} \varrho_d \zeta_{d'} = e_n\,, \quad \sum_{dd'=n} e_d \varepsilon_{d'} = \xi_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \eta_d \lambda_{d'} = \varepsilon_n\,,$$

$$\sum_{dd'=n} e_d = \psi_n\,, \qquad \sum_{dd'=n} \varepsilon_d = \xi_n\,,$$

$$\sum_{dd'=n} \zeta_d \varepsilon_{d'} = \eta_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \eta_d \varrho_{d'} = \xi_n\,, \quad \sum_{dd'=n} \lambda_d e_{d'} = \varrho_n\,,$$

$$\sum_{dd'=n} \eta_d = \zeta_n\,, \qquad \sum_{dd'=n} \varrho_d = \chi_n\,.$$

De nu bevisade 15 formlerna kunna innefattas i tre enkla minnesreglor. Om man nämligen delar en cirkelperiferi i sex lika delar samt vid delningspunkterna skrifver de sex funktionerna e, ζ, η, ε, λ, ϱ i ordning inuti cirkeln samt likaledes de sex funktionerna ψ, ω, ζ, ξ, ϱ, χ i ordning utanför cirkeln, som



figuren utvisar, så gäller för tre konsekutiva funktioner a, b, c innanför cirkeln relationen

$$\sum_{dd'=n} a_d c_{d'} = b_n ; \tag{182}$$

för en funktion a inuti cirkeln och den motsvarande funktionen b utanför cirkeln gäller relationen

$$\sum_{dd'=n} a_d = b_n ; \tag{183}$$

för två diametralt motstående funktioner a och b inuti cirkeln gäller relationen

$$\sum_{dd'=n} a_d b_{d'} = \xi_n . \tag{184}$$

Vi låta nu u betyda en oberoende variabel samt beteckna med n ett godtyckligt helt positivt tal. Vidare definiera vi för hvarje sådant tal n en funktion $\varphi(u, n)$ medelst formeln

$$\varphi(u, n) = \sum_{r=1}^{r=n}{}_n' u^r, \tag{185}$$

hvaraf synes, att $\varphi(u, n)$ är en rationel hel funktion af u.

För $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ få vi följande värden på $\varphi(u, n)$:

(186) $\varphi(u, 1) = u$, $\varphi(u, 2) = u$, $\varphi(u, 3) = u + u^2$, $\varphi(u, 4) = u + u^3$,
$\varphi(u, 5) = u + u^2 + u^3 + u^4$, $\varphi(u, 6) = u + u^5$,
$\varphi(u, 7) = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6$, $\varphi(u, 8) = u + u^3 + u^5 + u^7$,
$\varphi(u, 9) = u + u^2 + u^4 + u^5 + u^7 + u^8$, $\varphi(u, 10) = u + u^3 + u^7 + u^9$,
. . . .

Om vi i teorem II införa $f(m) = u^m$, så erhålla vi

$$\sum_{k=1}^{k=n} u^k = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=d}{}_d' u^{rd'} ; \tag{187}$$

men om vi i definitionen (185) sätta d i stället för n samt $u^{d'}$ i stället för u, så finna vi

$$(188)\qquad \varphi(u^{d'}, d) = \sum_{r=1}^{r=d}{}_d' u^{rd'},$$

och således följer af eqv. (187)

$$(189)\qquad \frac{u(1-u^n)}{1-u} = \sum_{dd'=n} \varphi(u^{d'}, d).$$

Om vi äfven i teorem IX sätta $f(m) = u^m$, så erhålla vi

$$(190)\qquad \sum_{r=1}^{r=n}{}_n' u^r = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=d'} u^{kd}$$

eller enligt eqv. (185)

$$(191)\qquad \varphi(u, n) = (1-u^n) \sum_{dd'=n} \frac{\varepsilon_d u^d}{1-u^d}.$$

Vi sammanföra formlerna (189) och (191) i följande teorem.

Teorem XV. Om n är ett helt positivt tal, och om en funktion $\varphi(u, n)$ af en variabel u definieras medelst likheten

$$\varphi(u, n) = \sum_{r=1}^{r=n}{}_n' u^r,$$

så är

$$\frac{u(1-u^n)}{1-u} = \sum_{dd'=n} \varphi(u^{d'}, d)$$

och

$$\varphi(u, n) = (1-u^n) \sum_{dd'=n} \frac{\varepsilon_d u^d}{1-u^d}.$$

Om vi i detta teorem sätta

$$u = 1,$$

så få vi formlerna

$$(192)\qquad n = \sum_{dd'=n} \varphi(1, d), \quad \varphi(1, n) = n \sum_{dd'=n} \frac{\varepsilon_d}{d} = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d d',$$

der för hvarje helt positivt tal n qvantiteten $\varphi(1, n)$ är bestämd af likheten

$$\varphi(1, n) = \sum_{r=1}^{r=n}{}'_n 1 . \tag{193}$$

Om vi, såsom vanligt, med $\varphi(n)$ beteckna antalet af dem bland talen 1, 2, 3, ... n, som äro relativa primtal till n, så följer af eqv. (193)

$$\varphi(1, n) = \varphi(n) , \tag{194}$$

och således kunna formlerna (192) skrifvas

$$n = \sum_{dd'=n} \varphi(d) , \quad \varphi(n) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d d' . \tag{195}$$

Om vi i eqv. (32) sätta $g(m) = m$, så följer

$$\sum_{dd'=n} \varepsilon_d d' = n \prod_{pd'=n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) , \tag{196}$$

och således erhålles af den andra af formlerna (195)

$$\varphi(n) = n \prod_{pd'=n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) , \tag{197}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XVI. Om n är ett helt positivt tal, och om $\varphi(n)$ betecknar antalet af dem bland talen

$$1, 2, 3, \ldots n-1, n ,$$

som äro relativa primtal till n, så är

$$n = \sum_{dd'=n} \varphi(d) , \quad \varphi(n) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d d'$$

samt

$$\varphi(n) = n \prod_{pd'=n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) .$$

Om vi uppdela den hela funktionen af u af n:te graden $1 - u^n$ i sina lineära faktorer, så få vi följande likhet:

$$(198)\qquad 1 - u^n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}} u\right),$$

och om vi med $F_n(u)$ beteckna den rationela hela funktion af u af gradtalet $\varphi(n)$, hvars af u oberoende term är 1, och hvars rötter äro de primitiva rötterna till eqvationen

$$(199)\qquad 1 - u^n = 0,$$

så är

$$(200)\qquad F_n(u) = \boxed{n}\prod_{r=1}^{r=n}{}'\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{n}} u\right).$$

Om vi i teorem II införa

$$(201)\qquad f(m) = \log\left(1 - e^{\frac{2m\pi i}{n}} u\right),$$

så erhålles

$$(202)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}} u\right) = \sum_{dd'=n} \sum_{r=1}^{r=d}{}'_{d} \log\left(1 - e^{\frac{2rd'\pi i}{n}} u\right)$$

och således, enligt relationen $dd' = n$,

$$(203)\qquad \log \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}} u\right) = \sum_{dd'=n} \log \boxed{d}\prod_{r=1}^{r=d}{}'\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{d}} u\right)$$

eller enligt formlerna (198) och (200)

$$(204)\qquad \log(1 - u^n) = \sum_{dd'=n} \log F_d(u) = \log \prod_{dd'=n} F_d(u)$$

och alltså

$$(205)\qquad 1 - u^n = \prod_{dd'=n} F_d(u).$$

Om vi nu använda substitutionen (201) på teorem IX, så finna vi

$$(206)\qquad \sum_{r=1}^{r=n}{}'_{n} \log\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{n}} u\right) = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \sum_{k=1}^{k=d'} \log\left(1 - e^{\frac{2kd\pi i}{n}} u\right)$$

och således med användning af relationen $dd' = n$

$$(207)\qquad \log \overset{r=n}{\underset{r=1}{\boxed{n}\prod'}}\left(1-e^{\frac{2r\pi i}{n}}u\right)=\sum_{dd'=n}\varepsilon_d \log \prod_{k=1}^{k=d'}\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{d'}}u\right)$$

eller enligt eqvationerna (200) och (198)

$$(208)\qquad \log F_n(u)=\sum_{dd'=n}\varepsilon_d \log(1-u^{d'})$$

och således

$$(209)\qquad F_n(u)=\prod_{dd'=n}(1-u^{d'})^{\varepsilon_d},$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XVII. Om n är ett helt positivt tal, och om en funktion $F_n(u)$ af en variabel u definieras medelst likheten

$$F_n(u)=\overset{r=n}{\underset{r=1}{\boxed{n}\prod'}}\left(1-e^{\frac{2r\pi i}{n}}u\right),$$

så gälla för hvarje helt positivt tal n formlerna

$$1-u^n=\prod_{dd'=n}F_d(u)$$

och

$$F_n(u)=\prod_{dd'=n}(1-u^{d'})^{\varepsilon_d}.$$

Af den sista formeln i detta teorem synes, att $F_n(u)$ är en hel heltalig funktion af u, och medelst denna formel kan äfven $F_n(u)$ beräknas för hvarje helt positivt tal n. För $n=1, 2, 3, \ldots$ finna vi

$F_1(u)=1-u$, $F_2(u)=1+u$, $F_3(u)=1+u+u^2$, $F_4(u)=1+u^2$, $F_5(u)=1+u+u^2+u^3+u^4$, $F_6(u)=1-u+u^2$, $F_7(u)=1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6$, $F_8(u)=1+u^4$, $F_9(u)=1+u^3+u^6$, $F_{10}(u)=1-u+u^2-u^3+u^4$, $F_{11}(u)=1+u+u^2+\ldots+u^9+u^{10}$, $F_{12}(u)=1-u^2+u^4$.

Vi skola nu bestämma funktionens $F_n(u)$ värde för $u=1$. Enligt eqv. (29) är för $n\geq 2$

$$(210)\qquad 1=\prod_{dd'=n}(1-u)^{\varepsilon_d},$$

och af eqv. (209) och (210) följer genom division

$$(211)\qquad F_n(u) = \prod_{dd'=n} (1 + u + u^2 + \ldots + u^{d'-1})^{\varepsilon_d}.$$

Sätta vi i denna formel $u = 1$, så erhålles för $n \geqq 2$

$$(212)\qquad F_n(1) = \prod_{dd'=n} d'^{\varepsilon_d} = \prod_{dd'=n} n^{\varepsilon_d} \cdot \prod_{dd'=n} d^{-\varepsilon_d}$$

eller

$$(213)\qquad F_n(1) = n^{\sum\limits_{dd'=n}\varepsilon_d} \cdot \prod_{dd'=n} d^{-\varepsilon_d}$$

eller enligt eqv. (29), (45), (46), emedan $n \geqq 2$,

(214) $F_n(1) = 1$, om n är delbart med minst två olika primtal,

(215) $F_n(1) = p$, om n är en dignitet af ett primtal p.

Vi få alltså följande teorem.

Teorem XVIII. Funktionen $F_n(u)$ är en hel heltalig funktion af u af gradtalet $\varphi(n)$, och vidare är

$F_n(1) = 1$, om n är delbart med minst två olika primtal,

$F_n(1) = p$, om n är en dignitet af primtalet p,

$F_n(1) = 0$, om $n = 1$.

Vi skola använda de två sista teoremen till evaluation af produkten

$$\overline{\prod_n}'^{\,r=n}_{\,r=1} \sin\frac{r\pi}{n},$$

der n är ett godtyckligt helt positivt tal. Om vi i den första formeln i teorem XVII sätta $u = 1$, så erhålles

$$(216)\qquad \overline{\prod_n}'^{\,r=n}_{\,r=1} \left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{n}}\right) = F_n(1),$$

men emedan högra membrum af denna likhet är en reel qvantitet, så äro vi berättigade att ersätta i med $-i$ i venstra membrum, och vi erhålla då likheten

$$(217)\qquad \overline{\prod_n}'^{\,r=n}_{\,r=1} \left(1 - e^{-\frac{2r\pi i}{n}}\right) = F_n(1),$$

och genom multiplikation följer af eqv. (216) och (217)

$$(218)\qquad \overline{\prod_n}'^{\,r=n}_{\,r=1} \left(2 - 2\cos\frac{2r\pi}{n}\right) = F_n(1)^2$$

eller

$$(219)\qquad \left(\prod_{r=1}^{r=n}{}' \, 2 \sin \frac{r\pi}{n}\right)^2 = F_n(1)^2 .$$

Men emedan produkten

$$\prod_{r=1}^{r=n}{}' \, 2 \sin \frac{r\pi}{n}$$

tydligen är positiv eller noll, och emedan qvantiteten $F_n(1)$ enligt teorem XVIII också är positiv eller noll, så följer af eqv. (219)

$$(220)\qquad \prod_{r=1}^{r=n}{}' \, 2 \sin \frac{r\pi}{n} = F_n(1) ,$$

och vi erhålla nu, om vi använda teorem XVIII på eqv. (220),

$$(221)\qquad \prod_{r=1}^{r=n}{}' \, 2 \sin \frac{r\pi}{n} = \begin{cases} 1, & \text{om } n \text{ är delbart med minst två olika primtal,} \\ p, & \text{om } n \text{ är en dignitet af ett primtal } p, \\ 0, & \text{om } n = 1. \end{cases}$$

Om vi i teorem XII sätta

$$(222)\qquad f_1(m) = 1 , \; x = 1 ,$$

så finna vi

$$(223)\qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} f(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} F(hk) = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n) \sum_{dd'=n} f(d) ,$$

och om vi här införa

$$(224)\qquad F(m) = x^m ,$$

så erhålles för tillräckligt små värden på x formeln

$$(225)\qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} f(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} x^{hk} = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n \sum_{dd'=n} f(d)$$

eller

$$(226)\qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{f(h) x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n \sum_{dd'=n} f(d) .$$

Sätta vi i eqv. (226) successivt

$$f(n) = e_n\,,\ \zeta_n\,,\ \eta_n\,,\ \varepsilon_n\,,\ \lambda_n\,,\ \varrho_n \tag{227}$$

samt använda teorem XIV, så erhållas för $|x| < 1$ formlerna

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{e_h x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \psi_n x^n\,, \tag{228}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\zeta_h x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \omega_n x^n\,, \tag{229}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\eta_h x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n x^n\,, \tag{230}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \xi_n x^n\,, \tag{231}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\lambda_h x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n x^n\,, \tag{232}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varrho_h x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \chi_n x^n\,. \tag{233}$$

Om vi i eqv. (226) införa

$$f(n) = \varphi(n)\,,\ \log F_n(u)\,, \tag{234}$$

så erhålla vi med användning af teoremen XVI och XVII för $|x| < 1$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varphi(h) x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} n x^n \tag{235}$$

d. v. s.

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varphi(h) x^h}{1 - x^h} = \frac{x}{(1 - x)^2} \tag{236}$$

samt

$$(237) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\log F_h(u) \cdot x^h}{1 - x^h} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \log(1 - u^n) \cdot x^n .$$

Om vi i teorem VI sätta

$$(238) \qquad f(m) = x^m ,$$

så finna vi för $|x| < 1$

$$(239) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' x^r = \sum_{dd'=n} \varepsilon_d \frac{x^d}{1 - x^d}$$

och alltså enligt teorem XV

$$(240) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' x^r = \frac{\varphi(x, n)}{1 - x^n} ,$$

hvilken formel äfven följer omedelbart af definitionen (185) på funktionen $\varphi(u, n)$.

Införa vi i teorem VI

$$(241) \qquad f(m) = \frac{x^m}{m} ,$$

så erhålla vi för $|x| < 1$

$$(242) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' \frac{x^r}{r} = \sum_{dd'=n} \frac{\varepsilon_d}{d} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^{kd}}{k}$$

och alltså genom summation af serien i högra membrum

$$(243) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' \frac{x^r}{r} = -\frac{1}{n} \sum_{dd'=n} \varepsilon_d d' \log(1 - x^d)$$

eller

$$(244) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}{}_n' \frac{x^r}{r} = \frac{1}{n} \log \prod_{dd'=n} (1 - x^d)^{-\varepsilon_d d'} .$$

Tabell.

n	e_n	ε_n	ϱ_n	η_n	exp (n)	λ_n	ζ_n	ν'_n	ξ_n	χ_n	ω_n
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
3	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
4	1	0	1	−1	2	1	0	3	0	2	2
5	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
6	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
7	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
8	1	0	0	0	3	−1	0	4	0	2	2
9	1	0	1	−1	2	1	0	3	0	2	2
10	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
11	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
12	1	0	0	0	3	−1	0	6	0	2	4
13	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
14	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
15	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
16	1	0	1	0	4	1	0	5	0	3	2
17	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
18	1	0	0	0	3	−1	0	6	0	2	4
19	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
20	1	0	0	0	3	−1	0	6	0	2	4
21	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
22	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
23	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
24	1	0	0	0	4	1	0	8	0	2	4
25	1	0	1	−1	2	1	0	3	0	2	2
26	1	1	0	0	2	1	1	4	0	1	4
27	1	0	0	0	3	−1	0	4	0	2	2
28	1	0	0	0	3	−1	0	6	0	2	4
29	1	−1	0	0	1	−1	1	2	0	1	2
30	1	−1	0	0	3	−1	1	8	0	1	8

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 562.)

London. *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 58 (1897/98): N:o 9 & Appendix. 8:o.
— *Chemical Society.*
Journal. Vol. 73—74 (1898): 10. 8:o.
— *Geographical Society.*
MARKHAM, C. R., Antarctic exploration: a plea for a national expe tion. 1898. 8:o.
— *Geological Society.*
Quarterly journal. Vol. 54 (1898): P. 4. 8:o.
List. 1898. 8:o.
— *Linnean Society.*
Journal. Zool. Vol. 26: N:o 170. 1898. 8:o.
— *R. Microscopical Society.*
Journal. 1898: P. 5. 8:o.
— *Zoological Society.*
Proceedings. Year 1898: P. 3. 8:o.
— *Royal Gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1898: N:o 143. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society.*
The Canadian Entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 10. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1898: 6. 4:o.
Boletín de agricultura, mineria é industrias. Año 7 (1897/98): N:o 3—6. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1898: H. 2. 8:o.
— *K. Meteorologische Centralstation.*
Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. 1898: 9. Fol.
Napoli. *R. Accademia di archeologia, lettere e belle-arti.*
Atti. Vol. 19 (1897/98). 4:o.
Rendiconto. N. S. Anno 12 (1898): 3—5. 8:o.
— *R. Istituto d'incorraggiamento.*
Atti. (4) Vol. 10. 1897. 4:o.
Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 11 (1897). 8:o.
Ottawa. *Royal Society of Canada.*
Proceedings and transactions. (2) Vol. 3 (1897). 8:o.
Paris. *Académie des sciences.*
PÂRIS, Souvenirs de marine. P. 1—5. 1882—92. Fol.
— *Bureau Central météorologique.*
Bulletin mensuel. Année 1898: N:o 6—7. 4:o.

(Forts å sid. 688.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 9.
Stockholm.

Elektriska och magnetiska sferiska vågor enligt Maxwell's teori.

Af C. A. Mebius.

[Meddeladt den 9 November 1898 genom B. Hasselberg].

1. De Maxwell'ska differentialekvationerna och deras lösning.

1. De ekvationer, ur hvilka enligt Maxwell's teori de elektriska och magnetiska företeelserna i en homogen, isotrop oledare kunna härledas, äro följande:

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\\ A\mu\frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y},\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (1)\qquad \left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},\\ A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},\\ A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (2)$$

Här betyda X, Y, Z den elektriska kraftens komposanter längs x-, y- och z-axlarne, L, M, N de motsvarande komposanterna af den magnetiska kraften, t tiden, A det inverterade värdet af ljusets hastighet i tomrummet, μ mediets magnetiseringskonstant och ε dess dielektricitetskonstant. ε och μ äro i en homogen, isotrop oledare oberoende af x, y, z, t. Är den positiva x-axeln riktad åt höger, den positiva z-axeln uppåt, så bör den positiva y-axeln vara riktad *mot* åskådaren. I annat fall bör motsatt tecken tagas på ena sidan om likhetstecknen i (1) och (2).

En lösning till föregående ekvationssystem är

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon X &= \frac{\partial M_0}{\partial z} - \frac{\partial N_0}{\partial y}, \\ \varepsilon Y &= \frac{\partial N_0}{\partial x} - \frac{\partial L_0}{\partial z}, \\ \varepsilon Z &= \frac{\partial L_0}{\partial y} - \frac{\partial M_0}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3) \qquad \left.\begin{aligned} L &= A\frac{\partial L_0}{\partial t}, \\ M &= A\frac{\partial M_0}{\partial t}, \\ N &= A\frac{\partial N_0}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

Ekvationssystemet (2) satisfieras identiskt och systemet (1) med villkor, att

$$\left.\begin{aligned} A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 L_0}{\partial t^2} &= \varDelta L_0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_0}{\partial x} + \frac{\partial M_0}{\partial y} + \frac{\partial N_0}{\partial z}\right), \\ A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 M_0}{\partial t^2} &= \varDelta M_0 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L_0}{\partial x} + \frac{\partial M_0}{\partial y} + \frac{\partial N_0}{\partial z}\right), \\ A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 N_0}{\partial t} &= \varDelta N_0 - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L_0}{\partial x} + \frac{\partial M_0}{\partial y} + \frac{\partial N_0}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

Antaga vi nu

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ M_0 &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ N_0 &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

så blir identiskt

$$\frac{\partial L_0}{\partial x} + \frac{\partial M_0}{\partial y} + \frac{\partial N_0}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots (7)$$

och systemet (5) öfvergår till

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \varDelta H\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \varDelta G\right), \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \varDelta F\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \varDelta H\right), \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \varDelta G\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \varDelta F\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8)$$

Är Q en arbiträr funktion af x, y, z, t, så är föregående system identiskt satifieradt, om vi sätta

$$\left.\begin{aligned} A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \Delta F - \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \Delta G - \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \Delta H - \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

För det speciella antagandet, att Q är konstant eller blott funktion af tiden t, satisfiera F, G, H alla en och samma differentialekvation

$$A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi, \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

men äro för öfrigt oberoende af hvarandra.

Den i (3) och (4) angifna lösningen antager på grund af (6) formen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon X &= \Delta F - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \varepsilon Y &= \Delta G - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \varepsilon Z &= \Delta H - \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \ldots (11) \qquad \left.\begin{aligned} L &= A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \\ M &= A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \\ N &= A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \ldots (12)$$

hvarest

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

På samma sätt finner man, att en annan med denna analog lösning är följande

$$\left.\begin{aligned} X &= A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial y}\right), \\ Y &= A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \\ Z &= A \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} . (14) \qquad \left.\begin{aligned} \mu L &= \Delta F_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x}, \\ \mu M &= \Delta G_1 - \frac{\partial V_1}{\partial y}, \\ \mu N &= \Delta H_1 - \frac{\partial V_1}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \ldots (15)$$

hvarest

$$V_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

om F_1, G_1, H_1 satisfiera (10) eller de med (9) analoga ekvationerna.

En allmännare lösning erhålles tydligen, om man tager summan af värdena på X, Y, Z i (11) och (14) och af L, M, N i (12) och (15).[1])

I den fria etern är $\varepsilon = 1$ och $\mu = 1$, och med dessa värden gälla alla föregående ekvationer för den fria etern. I följande afdelning skall jag tillämpa den i (11) och (12) angifna lösningen för studiet af elektriska och magnetiska sferiska vågor, men gör dervid för enkelhets skull antagandet $\varepsilon = \mu = 1$. Framställningen gäller således egentligen för den fria etern, men kan utan svårighet tillämpas på hvarje isotrop, homogen oledare. Man har då blott att i stället för X, Y, Z sätta εX, εY, εZ.

2. Elektriska och magnetiska sferiska vågor.

2. Vi skola nu sysselsätta oss med det fall, att funktionerna F, G, H i (11) och (12) utom af tiden t blott äro beroende af afståndet r från en fix punkt, hvilken tages till origo. De representera då ett tillstånd af rörelse, som utbreder sig likformigt åt alla håll i rymden, och de antaga på grund af differentialekvationen (10) någon af formerna

$$\frac{1}{r} f_1(r + at + b_1)\,, \quad \frac{1}{r} f_2(r - at + b_2)\,, \quad \ldots \quad (17)$$

hvarest a, b_1, b_2 äro konstanter, eller ock formen af en summa af dylika funktioner. Då således

$$F = F(r\,, t)\,, \quad G = G(r\,, t), \quad H = H(r\,, t) \quad \ldots \quad (18)$$

och

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \ldots \quad (19)$$

antager den i (11) och (12) framställda lösningen af de MAXWELL'ska differentialekvationerna följande form:

---

1) Denna lösning har jag i en föregående uppsats angifvit. F, F_1 etc. i denna motsvaras här af $\frac{F}{\varepsilon}$, $\frac{F_1}{\mu}$ etc. Se MEBIUS: Öfv. af K. Vet.-Akad. Förh. 1897, N:o 8, p. 410.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{x}{r}, \\ Y &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{y}{r}, \\ Z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{z}{r}, \end{aligned}\right\}^{1)} \quad \ldots\ldots (20)$$

$$\left.\begin{aligned} L &= A\frac{y}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t} - A\frac{z}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r\partial t} = A\frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) - A\frac{z}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right), \\ M &= A\frac{z}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial t} - A\frac{x}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial t} = A\frac{z}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) - A\frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right), \\ N &= A\frac{x}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r\partial t} - A\frac{y}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial t} = A\frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) - A\frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right), \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(21\text{ a})\\ \text{och}\\ (21\text{ b})\end{matrix}$$

der

$$V = \frac{x}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{y}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{z}{r}\frac{\partial H}{\partial r} \quad \ldots\ldots (22)$$

3. Då nu F, G, H och deras derivator i afseende på r och t blott bero af r och t, inses, att de öfverallt på en bestämd våg ($r =$ konstant) i ett gifvet ögonblick hafva samma värden, men att V och dess derivator i allmänhet ändra sina värden från punkt till punkt på den sferiska vågen.

Antager man för ett gifvet ögonblick ($t = t_1$) äfven V konstant ($V = V_1$), så representerar (22) i allmänhet en buktig yta. Antoge man äfven r konstant ($r = r_1$), så betydde (22) ett plan, som således skär vågen $r = r_1$ utefter en cirkel. Normalen till detta plan bildar med koordinataxlarne vinklar, hvilkas cosinus äro proportionella mot $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial r}$. De mot olika V-värden svarande cirklarne ligga således i parallella plan eller äro parallellcirklar med hänsyn till en viss med t och r till sitt läge föränderlig axel.

4. De elektriska kraftkomposanterna bestå enligt (20) af tvenne delar. De första

$$X_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right),\quad Y_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right),\quad Z_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) \quad .\ . (23)$$

---

1) $\frac{\partial V}{\partial r}$ betyder här partiella derivatan af V i afseende på r, under förutsättning att x, y, z i (22) äro konstanta.

hafva öfverallt på vågen samma storlek, deras resultant R_1 således öfverallt samma storlek och riktning. Den radie i den sferiska vågen, som har samma riktning, benämna vi vågens *axel* och dess ändpunkt vågens *pol;* cosinus för de vinklar, som axeln, således riktningen af resultanten R_1, bildar med koordinataxlarne, betecknas med α, β, γ.

De andra delarne

$$X_2 = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{x}{r}, \quad Y_2 = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{y}{r}, \quad Z_2 = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{z}{r}, \quad . \ (24)$$

hafva resultanten

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -\left[x\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + y\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}\right) + z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right)\right], \ . \ . \ (24\ a)$$

och denne bildar med koordinataxlarne vinklar, hvilkas cosinus äro $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

I hvarje punkt af vågen verka således två elektriska krafter, den ena R_1 parallell med vågens axel och den andra $-\frac{\partial V}{\partial r}$ i radiens riktning. Deras plan är ett meridianplan. Betecknas vinkeln mellan R_1 och r med φ, så kan R_1 uppdelas i två komposanter $R_1 \operatorname{Cos} \varphi$ och $R_1 \operatorname{Sin} \varphi$, den förra i radiens riktning, den senare utefter meridiancirkelns tangent. Då nu

$$R_1 \operatorname{Cos} \varphi = \Sigma X_1 \frac{x}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V) = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r} V, \quad . \ . \ (25)$$

så kan den elektriska kraften anses vara sammansatt af

en longitudinalkomposant $K_1 = \frac{2}{r} V$ . . . . (26)

och en transversalkomposant $K_2 = R_1 \operatorname{Sin} \varphi$ . . . . . . (27)

Den elektriska vågen är således i allmänhet sammansatt af en longitudinalvåg och en transversalvåg.

Longitudinalkomposant saknas och vågen är en ren transversalvåg

1) då $V = 0$, således utefter en storcirkel,

2) då $r = \infty$, så vida då icke V är oändlig.

Transversalkomposant saknas, då $\varphi = 0$; i polen hafva vi således en ren longitudinalvåg.

Af (25) följer, att R_1 är lika med maximivärdet af $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V)$ för konstant r.

5. Normalen till den storcirkels plan, längs hvilken V är noll, bildar med koordinataxlarne vinklar, hvilkas cosinus äro proportionella med $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial G}{\partial r}$, $\frac{\partial H}{\partial r}$. Den sammanfaller således i allmänhet icke med den elektriska vågens axel. Villkoret för att detta skall vara fallet är

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)}{r\frac{\partial F}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)}{r\frac{\partial G}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)}{r\frac{\partial H}{\partial r}}.$$

Genom integration fås härur

$$\alpha_1 F + \alpha_2 = \beta_1 G + \beta_2 = \gamma_1 H + \gamma_2 ,$$

hvarest α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 äro konstanter. De kunna ej vara funktioner af t, då enligt (17) t blott förekommer tillsamman med r i uttryck af formen $r+at+b$.[1]) Funktionerna F, G, H skilja sig i detta fall blott i afseende på konstanta termer och faktorer.

6. Äro koordinaterna för den elektriska vågens pol x_1, y_1, z_1, så bestämmas dessa derigenom, att axelns riktning sammanfaller med riktningen af R_1, så att

$$\frac{x_1}{r} = \frac{X_1}{R_1}, \quad \frac{y_1}{r} = \frac{Y_1}{R_1}, \quad \frac{z_1}{r} = \frac{Z_1}{R_1},$$

hvarför

$$x_1 = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right), \quad y_1 = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right), \quad z_1 = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right). \quad (28)$$

Är t konstant, så är detta i allmänhet ekvationerna för en kroklinie i rymden. Den utgör orten för den sferiska vågens pol, hvarför vi gifva den namnet *polarlinien*. Är r konstant, men t variabel, så angifver (28) ekvationerna för en kroklinie på sferen, utefter hvilken polen förflyttar sig. Äro F, G, H

[1]) Här förutsättes således liksom i § 6, att F, G, H blott innehålla *en* arbiträr funktion f_1 eller f_2 (17), och att det således är fråga om ett enkelt vågsystem, som går antingen från eller till origo.

periodiska funktioner af t med samma period, så rör sig polen periodiskt på sferen.

Polarlinien är en rät linie, om

$$a_0 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = b_0 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) = c_0 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right), \quad . \; . \; . \; (29)$$

hvarest a_0, b_0, c_0 äro konstanter. Äro då F, G, H periodiska funktioner, så kan man bevisa, att för alla tre svängningstiderna och våglängderna äro lika, och att de blott kunna skilja sig på en konstant faktor eller term.

Genom integration fås nämligen

$$a_0 r \frac{\partial F}{\partial r} + f_3 = b_0 r \frac{\partial G}{\partial r} + f_4 \, .$$

f_3 och f_4 kunna ej vara beroende af t, då enligt (17) t blott förekommer tillsamman med r i uttryck af formen $r + at + b$; de äro således konstanter. Genom en ny integration fås då

$$a_0 F = b_0 G + (f_4 - f_3) \log r + k \, .$$

En term af formen log r är emellertid stridande mot (17) eller (10), hvarföre $f_3 = f_4$.

7. De magnetiska krafternas resultant P är alltid vinkelrät mot radien, då

$$L\frac{x}{r} + M\frac{y}{r} + N\frac{z}{r} = 0 \, ,$$

hvarföre den magnetiska vågen är en ren transversalvåg.

Äro två af funktionerna F, G, H noll eller två af uttrycken $r\frac{\partial F}{\partial r}$, $r\frac{\partial G}{\partial r}$, $r\frac{\partial H}{\partial r}$ konstanta, så inses också omedelbart, att

$$XL + YM + ZN = 0$$

eller att den magnetiska kraften är vinkelrät mot den elektriska. De magnetiska svängningarna försiggå således längs tangenten till en parallellcirkel. Är blott ettdera eller intet af de tre uttrycken konstant, så är den magnetiska kraften i allmänhet icke vinkelrät mot den elektriska. Vi skola derföre undersöka, när vinkeln mellan de båda krafterna är rät. Betecknas vinkeln med ψ, så är, om R betecknar den totala elektriska kraften

$$RP \cdot \operatorname{Cos} \psi = XL + YM + ZN,$$

men

$$\Sigma X_2 L = 0$$

och

$$\begin{aligned}\frac{r^3}{A} \Sigma X_1 L = x &\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) \right\} \\ + y &\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) \right\} \\ + z &\left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) \right\} . \quad (30)\end{aligned}$$

Skall nu högra membran vara noll i alla punkter på samma våg, måste koefficienterna för x, y, z hvar för sig vara noll och således

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)}{\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)}{\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)}{\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Häraf följer, att om f_{I}, f_{II}, f_{III} beteckna arbiträra funktionsformer

$$f_{\mathrm{I}}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = f_{\mathrm{II}}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) = f_{\mathrm{III}}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

Är nu F periodisk i afseende på t, så är detta förhållandet äfven med $\frac{\partial F}{\partial r}$ på grund af (17). Af (32) följer då, att F, G, H måste hafva samma period och, då vågrörelsens hastighet a är konstant, att våglängden är densamma.

8. Då

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{x}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t} + \frac{y}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t} + \frac{z}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

så kan man skrifva uttrycket för de magnetiska krafternas resultant P på följande sätt:

$$P^2 = L^2 + M^2 + N^2 = A^2\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right] \quad (34)$$

De tre första derivaterna i högra membran hafva för ett gifvet ögonblick samma värden öfverallt på samma sferiska våg

($r =$ konst.), men $\frac{\partial V}{\partial t}$ ändrar i allmänhet sitt värde från punkt till punkt; derföre har den magnetiska kraften ett maximivärde P_m, bestämdt genom

$$P_m^2 = A^2\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}\right)^2\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Ger man åt $\frac{\partial V}{\partial t}$ ett konstant värde, så representerar (33) en yta. Denna skär en gifven våg utefter samma linie, som planet $\frac{\partial V}{\partial t} = A_0 x + B_0 y + C_0 z$, der A_0, B_0, C_0 betyda de konstanta värden, som koefficienterna till x, y, z i (33) antaga på den ifrågavarande sferen. P får således sitt maximivärde P_m utefter en storcirkel, och längs de cirklar, i hvilka vågen skäres af plan, parallella med denna storcirkel, har P konstanta värden.

Den magnetiska kraften blir noll, då $L = M = N = 0$, således enligt (21 b) för de värden på x, y, z, som bestämmas ur ekvationerna

$$\frac{x_0}{\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)} = \frac{y_0}{\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right)} = \frac{z_0}{\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{x_0,\, y_0,\, z_0}}. \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Det sista uttrycket erhålles, om de tre första i ordning förlängas med $\frac{x_0}{r}$, $\frac{y_0}{r}$, $\frac{z_0}{r}$, och täljarne, resp. nämnarne adderas.

Ur (33) och (36) fås

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2_{x_0,\, y_0,\, z_0} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}\right)^2; \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

detta är äfven kvadraten på maximivärdet af $\frac{\partial V}{\partial t}$ för konstant r. Således är

$$P_m = A\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\text{max.}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

9. Då den magnetiska kraften är vinkelrät mot den elektriska, erhåller man ur (23) och (31) för en godtycklig punkt på vinkelafståndet φ från polen

$$\frac{X_1}{\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}} = \frac{Y_1}{\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}} = \frac{Z_1}{\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}} = \frac{R_1 \operatorname{Cos} \varphi}{\frac{\partial V}{\partial t}} = \pm \frac{AR_1}{P_m} \quad . \; . \; . \; . \; (39)$$

Det femte membrum har erhållits genom rotutdragning, sedan de tre första kvadrerats och täljarne, resp. nämnarne adderats. Man bör taga positivt eller negativt tecken, allteftersom $\operatorname{Cos} \varphi$ och $\frac{\partial V}{\partial t}$ hafva samma eller motsatt tecken.

Divideras de tre första membra i (36) med motsvarande i (39), fås, om polarvinkeln för x_0, y_0, z_0 betecknas med φ_0

$$\frac{\frac{x_0}{r}}{X_1} = \frac{\frac{y_0}{r}}{Y_1} = \frac{\frac{z_0}{r}}{Z_1} = \frac{\Sigma X_1 \cdot \frac{x_0}{r}}{R_1^2} = \frac{\operatorname{Cos} \varphi_0}{R_1} = \frac{1}{\Sigma X_1 \cdot \frac{x_0}{r}} = \frac{1}{R_1 \operatorname{Cos} \varphi_0}, \quad (40)$$

hvaraf följer, att $\operatorname{Cos}^2 \varphi_0 = 1$, och att således den magnetiska kraften blir noll i polen och den diametralt motsatta punkten på vågen.

Ur (39) erhålles

$$\alpha \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{Cos} \varphi \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}; \quad \beta \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{Cos} \varphi \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}; \quad \gamma \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{Cos} \varphi \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} \quad (41)$$

och på grund häraf och af (21 a)

$$\left.\begin{aligned} L \operatorname{Cos} \varphi &= A \frac{\partial V}{\partial t} \left(\frac{y}{r} \cdot \gamma - \frac{z}{r} \cdot \beta \right), \\ M \operatorname{Cos} \varphi &= A \frac{\partial V}{\partial t} \left(\frac{z}{r} \cdot \alpha - \frac{x}{r} \cdot \gamma \right), \\ N \operatorname{Cos} \varphi &= A \frac{\partial V}{\partial t} \left(\frac{x}{r} \cdot \beta - \frac{y}{r} \cdot \alpha \right). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

Beteckna λ, μ, ν cosinus för de vinklar. som riktningen af den magnetiska kraften P bildar med koordinataxlarne, så är

$$P = L\lambda + M\mu + N\nu = \frac{A \frac{\partial V}{\partial t}}{\operatorname{Cos} \varphi} \cdot \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \frac{x}{r}, & \frac{y}{r}, & \frac{z}{r} \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; (43)$$

Determinanten har värdet Sin φ eller — Sin φ, alltefter som riktningarne af P, r, R_1 äro samstämmiga eller icke med koordinataxlarne. Vi få således

$$P = \pm A \frac{\partial V}{\partial t} \cdot tg\, \varphi \quad \ldots\ldots\ldots (44)$$

och enligt (39)

$$P_m \operatorname{Cos} \varphi = \pm A \frac{\partial V}{\partial t} \ldots\ldots\ldots (45)$$

10. Af det föregående följer, att vid det allmännaste fallet af vågrörelse i enlighet med (20) och (21) det existerar tre riktningar, som äro att betrakta som symmetriaxlar, nämligen en för den elektriska transversalkomposanten, en för longitudinalkomposanten och en för den magnetiska kraften.

Enligt (27) var storleken af den elektriska transversalkomposanten

$$K_2 = R_1 \operatorname{Sin} \varphi;$$

den är således symmetrisk med hänsyn till vågens axel. Sätta vi

$$R_m = \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial F}{\partial r}\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial G}{\partial r}\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right)\right]^2},$$

så äro cosinus för de vinklar, som symmetriaxeln bildar med koordinataxlarne, bestämda genom

$$R_m \cdot \alpha = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial F}{\partial r}\right); \quad R_m \cdot \beta = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial G}{\partial r}\right); \quad R_m \cdot \gamma = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right).$$

Den elektriska longitudinalkomposanten var enligt (26) och (22)

$$K_1 = \frac{2}{r} V = \frac{2}{r}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{y}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{z}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right).$$

Bildar normalen till planet $V =$ konstant (§ 3) med koordinataxlarne vinklar, hvilkas cosinus äro l, m, n, och sätta vi

$$K_m = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2},$$

så är

$$K_m \cdot l = \frac{\partial F}{\partial r}; \quad K_m \cdot m = \frac{\partial G}{\partial r}; \quad K_m \cdot n = \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Betecknar då φ_1 vinkeln mellan denna normal och radien, så är

$$K_1 = \frac{2K_m}{r} \cdot \operatorname{Cos} \varphi_1 .$$

Den nyssnämnda normalen är således en symmetriaxel för K_1.

Den magnetiska kraftens storlek var bestämd genom ekv. (34)

$$P^2 = A^2\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]. \quad . \quad . (34)$$

Beteckna vi cosinus för de vinklar, som normalen till planet $\frac{\partial V}{\partial t} =$ konst. (§ 8) bildar med koordinataxlarne, med λ_1, μ_1, ν_1, och sätta vi

$$Q_m = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}\right)^2},$$

så är

$$Q_m \cdot \lambda_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t}; \quad Q_m \cdot \mu_1 = \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial t}; \quad Q_m \cdot \nu_1 = \frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t}.$$

Är då φ_2 vinkeln mellan denna normal och radien i punkten x, y, z, så blir

$$P^2 = A^2\left(Q_m^2 - Q_m^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi_2\right) = A^2 Q_m^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi_2 = P_m^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi_2 ,$$

hvaraf följer, att nyssnämnda normal är en symmetriaxel för P.

I det enklaste fallet af sferiska vågor sammanfalla de tre symmetriaxlarne.

11. Vid den nu tillämpade i (11) och (12) angifna lösningen voro de elektriska svängningarna såväl transversella som longitudinella, men de magnetiska endast transversella. Hade man i stället tillämpat lösningen (14) och (15), så hade förhållandet blifvit omvändt. Vid tillämpningen af den allmännaste lösningen, summan af de båda föregående, visas, att såväl elektriska som magnetiska longitudinal- och transversal-svängningar äro möjliga.

12. Herr JAUMANN[1]) har framställt en teori för katodstrålarne, i hvilken han antager, att dessa äro longitudinella

[1]) JAUMANN: Wied. Ann. Bd. 57, p. 147. 1896.

elektriska vibrationer. Hans påstående, att de HERTZ-MAXWELL'ska ekvationerna icke tillåta longitudinalvibrationer var för mig första anledningen till dessa undersökningar. Samma åsigt har äfven framställts af HERTZ[1]) och BOLTZMANN.[2]) Emellertid har jag förut påpekat,[3]) att elektriska longitudinalvibrationer af HERTZ sjelf blifvit experimentelt påvisade, ehuru han ej framhåller detta. Ännu tydligare bevisas deras existens i en afhandling af STEFAN:[4]) Über elektrische Schwingungen in geraden Leitern. Att gnistbildning eger rum i vissa lägen af den sekundära ledaren »entspricht nicht den bekannten Grundsätzen der Electrodynamik», och han påpekar, att förhållandet kan förklaras af den elektrostatiska, på den primära ledaren befintliga periodiskt vexlande laddningen.

---

1) HERTZ: Wied. Ann. Bd. 40, p. 620. 1890.

2) BOLTZMANN: Vorlesungen über MAXWELL's Theorie der Elektricität und des Lichtes. Theil I, p. 99. Leipzig 1891.

3) MEBIUS: Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1897, N:o 8, p. 407. Då jag skref denna uppsats, hade jag ännu ej tagit kännedom om HELMHOLTZ' nyss förut i bokhandeln tillgängliga »Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichts», herausgegeben von ARTHUR KÖNIG und CARL RUNGE, Leipzig 1897, i hvars tredje del § 36 påpekas, att det existerar »eine (elektrische) Verschiebung in der Richtung der Axe, die auf der ganzen Kugelfläche gleiche Grösse hat».

4) STEFAN: Wied. Ann. Bd. 41, p. 417. 1890.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 186.

Sur les points singuliers des équations différentielles.

Par IVAR BENDIXSON.

(Communiqué le 9 Novembre 1898 par G. MITTAG-LEFFLER.)

Quand il s'agit de déterminer les courbes intégrales d'une équation de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \tag{1}$$

X et Y désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives des variables qui s'annullent pour $x = 0$, $y = 0$, BRIOT et BOUQUET[1]) ont prouvé que l'on peut dans des cas assez generaux réduire l'étude des courbes intégrales de l'équation (1) allant à l'origine à celle des courbes intégrales de diverses équations de la forme

$$x^n \frac{dy}{dx} = ay^m[1 - yf(y)] + x\psi(x, y) \tag{2}$$

f et ψ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives des variables.

Cette réduction ne peut pourtant pas toujours se faire à l'aide de la méthode des dits auteurs, et même dans le cas où la réduction peut être menée au bout, ils n'ont pas donné de méthode pour déterminer, si l'on obtient vraiment par cette réduction *toutes* les intégrales de l'équation (1) allant à l'origine.

On s'assure aisément qu'il existe des cas nombreux où cela n'a pas lieu. Par exemple si l'équation différentielle possède des

[1]) Voir BRIOT et BOUQUET: »Recherches sur les propriétés des fonctions, définies par des équations différentielles». Journal de l'école Polytechnique, Tome XXI, 1856.

intégrales allant à l'origine de telle manière qu'elles n'y ont pas de tangente déterminée, on ne les obtiendra pas par la méthode de BRIOT et BOUQUET.

Dans les pages suivantes je veux donner une nouvelle méthode de réduction, par laquelle on réduit l'étude des courbes intégrales de l'équation (1) allant à l'origine à celle des courbes intégrales de plusieurs équations de la forme (2), *qui seront en outre telles que l'un des nombres entiers m ou n sera égal à 1.*

Par mes mémoires, présentés à l'académie le 9 Fevrier et le 9 Mars cette année, on sait alors que l'on peut complètement déterminer les courbes intégrales *réelles* de ces équations et même en donner des développements analytiques en séries.

Pour le cas où il existe au moins une courbe intégrale réelle de l'équation (1) allant à l'origine avec une tangente déterminée, je veux prouver que cette méthode de réduction nous donnera toutes les courbes intégrales réelles allant à l'origine.

Pour le cas au contraire où il n'existe pas de courbe réelle allant à l'origine avec une tangente déterminée, on peut prouver que l'origine sera ou un FOYER ou un CENTRE, (en employant la terminologie introduite par M. POINCARÉ).

C'est-à-dire, l'origine jouira daas le premier cas de la propriété suivante:

On peut entourer l'origine par un cercle C $(x^2 + y^2 \leq \delta^2)$ de rayon suffisamment petit δ, tel qu'il passe une spirale, se rapprochant indéfiniment de l'origine, par chaque point du plan, situé à l'intérieur de C.

Et dans le second elle sera de la nature suivante.

Ayant entouré l'origine par un cercle C, de rayon aussi petit que l'on voudra, il existe toujours à l'intérieur de C une infinité de courbes intégrales fermées, entourant l'origine. [1])

Dans le présent mémoire je me borne pourtant à donner la méthode de réduction mentionnée, renvoyant à une autre occasion l'étude des cas où il n'existe pas de courbe intégrale réelle allant à l'origine avec une tangente determinée.

[1]) On observera que cette définition d'un CENTRE n'est pas identique à celle de M. POINCARÉ.

I.

En écrivant l'équation différentielle sous la forme suivante

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = X \qquad \frac{dy}{dt} = Y$$

nous commencerons par établir quelques théorèmes géneraux.

Soit A une region du plan des x, y telle que les fonctions X et Y soient développables en série de TAYLOR au voisinage de chaque valeur x_0, y_0, de A. Nous supposerons en outre que les fonctions X et Y n'aient pas de diviseur commun. En prenant un point quelconque x_0, y_0 de A, on sait alors qu'il existe un seul système d'intégrales

$$(4) \qquad x(t) = x(t - t_0, x_0, y_0) \qquad y(t) = y(t - t_0, x_0, y_0)$$

satisfaisant aux équations (3) et prenant pour $t = t_0$ les valeurs x_0, et y_0. Ces fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions holomorphes de t, quand $|t - t_0|$ est suffissamment petit.

On sait de plus, qu'il n'existe que cette seule courbe intégrale qui est telle que

$$\lim_{t=t_0} x(t) = x_0 ; \qquad \lim_{t=t_0} y(t) = y_0 .$$

Les équations (4) représentent toujours une courbe intégrale du système (3), excepté quand x_0, y_0 satisfont à

$$X(x_0, y_0) = 0 ; \qquad Y(x_0, y_0) = 0 .$$

Dans ce cas le point x_0, y_0 est dit *un point singulier* du système, et l'intégrale (4) se réduit au point

$$x = x_0 ; \qquad y = y_0 ;$$

qui sera donc le seul système d'intégrales qui tend vers le point singulier x_0, y_0, quand t tend vers une valeur finie.

Si x_0, y_0 n'est pas un point singulier, les fonctions $x(t)$, $y(t)$ seront des fonctions holomorphes pour des valeurs de t voisines de t_0.

Supposons que ces fonctions continuent d'être des fonctions holomorphes de t, tant que t ne dépasse pas la quantité T, mais qu'elles ne soient plus des fonctions holomorphes au voisinage de $t = T$.

Envisageons alors une région du plan des x, y quelconque A', située à l'intérieur de A, je dis que la courbe intégrale ne peut pas rester à l'intérieur de A', quand t croît de t_0 à T.

Car si la courbe intégrale restait toujours à l'intérieur de A', on pouvait déterminer un nombre positif M tel que

$$|X| < M; \quad |Y| < M; \quad \text{pour } t \leq t_0 \leq T.$$

En désignant par s l'arc de la courbe intégrale, on aurait

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{X^2 + Y^2} dt < M \cdot \sqrt{2} [T - t_0].$$

Mais l'arc de la courbe étant d'une longueur finie, il s'ensuit que $x(t)$ et $y(t)$ tendront vers des limites déterminées quand t tendra vers T.

On aurait donc

$$\lim_{t=T} x(t) = a; \quad \lim_{t=T} y(t) = b.$$

Le point $x = a$, $y = b$ ne peut donc pas être un point singulier de l'équation (3), car il n'existe alors d'autre système que $x = a$, $y = b$, qui tend vers le point (a, b), quand t tendra vers une valeur finie.

De même ce point ne peut pas être un point régulier, car alors $x(t)$, $y(t)$ seraient des fonctions holomorphes de t au voisinage de $t = T$.

Il n'est donc pas possible que la courbe reste à l'intérieur de A', quand t tend vers T. c. q. f. d.

Supposons maintenant que $x(t)$ et $y(t)$ soient des fonctions telles que le point x, y soit toujours situé à l'intérieur de A, tant que $t > t_0$. On conclut que ces fonctions seront des fonctions holomorphes pour chaque valeur de $t > t_0$.

Supposons enfin que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} x(t) = a; \quad \lim_{t=\infty} y(t) = b;$$

je dis que le point (a, b) sera un point singulier du système (3). Car si l'on avait par exemple $X(a, b) \neq 0$, on pourrait déterminer un nombre positif m tel que

$$|X(x(t), y(t))| > \left|\frac{X(a, b)}{2}\right| \qquad \text{pour } t > m$$

ce qui nous donne

$$|x(t) - x(m)| = \left|\int_m^t X(x(t), y(t))dt\right|$$
$$> (t - m)\frac{|X(a, b)|}{2}$$

et on en conclut que $x(t)$ tendra vers l'infini, quand t tend vers l'infini, ce qui est contraire à notre supposition.

Si a, b est un point singulier, et on a

$$\lim_{t=\infty} x(t) = a; \qquad \lim_{t=\infty} y(t) = b;$$

je dirai que la courbe intégrale $x = x(t)$; $y = y(t)$; ira au point singulier (a, b).

Envisageons maintenant le système d'équations (3). Nous pouvons toujours supposer que les termes de moindre dimension en X et en Y soient de même ordre m, car en effectuant une substitution linéaire convenable on peut toujours arranger de sorte que cela ait lieu.

Écrivons nos équations de la manière suivante

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_m + X_{m+1} \\ \frac{dy}{dt} &= Y_m + Y_{m+1} \end{aligned}$$

X_m et Y_m désignant des polynomes en x et en y de dimension m, et X_{m+1}, Y_{m+1} désignant des séries procédant suivant les puissances entières positives de x et de y, convergentes pour $|x| \leq \delta$; $|y| \leq \delta$; et ne contenant que des termes de dimension plus grande que m.

Nous supposerons en outre que δ soit suffisamment petit pour que le point $x = 0$, $y = 0$, soit le seul point singulier du système à l'intérieur d'un cercle C de rayon δ, $x^2 + y^2 \leq \delta^2$.

Nous voulons donc d'abord prouver le théorème suivant:

Théorème.

Une courbe intégrale du système d'équations (5), allant à l'origine, sera ou une spirale se rapprochant indéfiniment de l'origine, ou elle y parviendra avec une tangente déterminée.

Pour la démonstration on aura à distinguer deux cas, suivant que

$$xY_m - yX_m \equiv 0 \tag{6}$$

ou non.

1) *Supposons d'abord que l'identité (6) ne soit pas satisfaite* et faisons la substitution

$$x = \varrho \operatorname{Cos} \theta ; \; y = \varrho \operatorname{Sin} \theta .$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt_1} &= \varrho[\operatorname{Cos} \theta X_m(\operatorname{Cos} \theta , \operatorname{Sin} \theta) + \operatorname{Sin} \theta Y_m(\operatorname{Cos} \theta , \operatorname{Sin} \theta) + \\ &\qquad + \varrho \overline{X}(\varrho , \operatorname{Cos} \theta , \operatorname{Sin} \theta)] \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \operatorname{Cos} \theta Y_m(\operatorname{Cos} \theta , \operatorname{Sin} \theta) - \operatorname{Sin} \theta X_m(\operatorname{Cos} \theta , \operatorname{Sin} \theta) + \\ &\qquad + \varrho \overline{Y}(\varrho , \operatorname{Cos} \theta , \operatorname{Sin} \theta) \end{aligned} \tag{7}$$

où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignent des fonctions développables en série de TAYLOR pour tout système de valeurs ϱ, θ, tel que

$$0 \leq \varrho \leq \delta ; \quad -\infty < \theta < +\infty .$$

La nouvelle variable t_1 sera en outre liée à l'ancienne par la relation

$$\frac{dt_1}{dt} = \varrho^{m-1} . \tag{8}$$

Soit maintenant

$$x = x(t) ; \quad y = y(t) ;$$

une courbe intégrale L du système (5), telle que

$$\lim_{t=\infty} x(t) = 0 ; \quad \lim_{t=\infty} y(t) = 0 ;$$

et que le point $x(t)$, $y(t)$ soit situé à l'intérieur de C, tant que

$t > t_0$. A cette courbe correspondra alors dans le plan des ϱ, θ une courbe intégrale L_1 du système (7)

$$\varrho = \varrho(t_1) ; \quad \theta = \theta(t_1) ;$$

qui sera telle que

$$\varrho(t_1) < \delta \qquad \text{pour } t_1 > t_1^0$$

si la valeur t_1^0 de t_1 correspond à $t = t_0$.

Quand t va en croissant, t_1 ira en croissant. Si, quand t croît vers l'infini, t_1 tend vers une limite finie T, la fonction $\theta(t_1)$ ne peut alors pas être holomorphe pour $t_1 = T$. Car on aurait alors

$$\lim_{t_1 = T} \theta(t_1) = \alpha$$

α désignant un nombre fini déterminé. Le point $\theta = \alpha$, $\varrho = 0$ ne pouvant alors pas être un point singulier du système (7), il est nécessaire, que ce point est un point régulier. Mais par le point $\theta = \alpha$, $\varrho = 0$ ne passe alors d'autre intégrale que $\varrho = 0$.

La fonction $\theta(t_1)$ n'étant par conséquent pas holomorphe pour $t_1 = T$, on conclut que la courbe L_1 sortira de chaque partie finie du plan

$$\varrho \leq \delta ; \quad -m \leq \theta \leq +m ;$$

quand t_1 croît de t_1^0 vers T.

Il s'en suit donc, que θ ira vers l'infini, quand t_1 tend vers T, c'est-à-dire quand t tend vers l'infini, et la courbe intégrale est alors une spirale.

Si au contraire t_1 croît vers l'infini en même temps que t, je veux d'abord prouver que $\theta(t_1)$ tendra vers une limite déterminée, finie ou infinie, quand t_1 croît vers l'infini.

Supposons en effet qu'il ne soit pas ainsi, et soient $\theta = a$, $\theta = b > a$ deux des valeurs limites de la fonction $\theta(t_1)$, quand t_1 tendra vers l'infini.

Envisageons un point $\varrho = 0$, $\theta = \alpha$ de l'intervalle $a, \ldots b$, qui n'est pas un point singulier, et supposons pour fixer les idées que

$$\varphi_{m+1}(\alpha) = \operatorname{Cos} \alpha \, Y_m(\operatorname{Cos} \alpha\, , \ \operatorname{Sin} \alpha) - \operatorname{Sin} \alpha X_m(\operatorname{Cos} \alpha\, , \ \operatorname{Sin} \alpha) > 0.$$

On peut alors déterminer un nombre positif $\delta_1 < \delta$, suffisamment petit pour que

$$\frac{d\theta}{dt_1} > 0 \text{ pour } \theta = \alpha\,, \text{ tant que } \varrho \leq \delta_1\,.$$

Or la courbe L va, d'après notre supposition, à l'origine.

On peut alors toujours fixer un nombre positif m, tel que

$$\varrho < \delta_1 \qquad \text{pour } t > m\,.$$

Soit enfin m_1 la valeur de t_1 correspondant à la valeur m de t, on sait que

$$\varrho < \delta_1 \qquad \text{pour } t_1 > m_1\,.$$

L'inégalité

$$\frac{d\theta}{dt_1} > 0 \qquad \text{pour } \theta = \alpha$$

nous apprend, que la courbe L_1 passera du coté du plan des ϱ, θ, où $\theta < \alpha$ à celui où $\theta > \alpha$, quand t va en croissant.

Si elle coupe la droite $\theta = \alpha$ pour une valeur m_2 de t_1, elle ne peut donc pas couper la même droite pour une nouvelle valeur $m_3 > m_2$, sans passer du coté où $\theta > \alpha$ à celui où $\theta < \alpha$, quand t_1 va en croissant, mais cela est impossible.

La courbe L_1 ne pouvant donc pas couper la droite $\theta = \alpha$ pour $t_1 > m_2$, la valeur a ne sera evidemment pas une valeur limite de $\theta(t_1)$.

Nous pouvons donc affirmer que $\theta(t_1)$ tendra vers une limite déterminée, quand t_1 tendra vers ∞.

Si

$$\lim_{t_1=\infty} \theta(t_1) = \infty$$

il est évident que la courbe L est une spirale se rapprochaut indéfiniment de l'origine.

Si au contraire

$$\lim_{t_1=\infty} \theta(t_1) = \alpha$$

on conclut que la courbe L parviendra à l'origine avec la tangente déterminée $\theta = \alpha$. c. q. f. d.

Les directions des tangentes possibles seront toujours données par l'équation

$$xY_m - yX_m = 0\,.$$

Nous ferons ensuite une remarque importante: *S'il existe une seule courbe intégrale L allant à l'origine avec une tangente déterminée, chaque courbe intégrale, allant à l'origine, y parviendra avec une tangente déterminée.*

Car s'il existait une spirale allant à l'origine, cette spirale couperait nécessairement la courbe L à l'intérieur de C, ce qui est contraire à notre hypothèse, que l'origine soit le seul point singulier du système (5), situé à l'intérieur de C.

2) *Si au contraire l'identité* (6) *est satisfaite*, on aura

$$xY_m = yX_m = xyQ_{m-1}$$

Q_{m-1} désignant un polynome de x et y de dimension $m-1$.

Mettons alors

$$xY - yX = Z_{m+r+2}(x, y) + Z_{m+r+3}(x, y)$$

Z_{m+r+2} désignant un polynome de dimension $m+r+2$ en x et en y, et Z_{m+r+3} ne contenant que des termes de dimension plus grande.

La substitution

$$x = \varrho \operatorname{Cos} \theta; \quad y = \varrho \operatorname{Sin} \theta;$$

nous donne alors

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt_1} &= Q_{m-1}(\operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sin}\theta) + \varrho\overline{X}(\varrho, \operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sin}\theta) \\ \frac{d\theta}{dt_1} &= \varrho^r[Z_{m+r+2}(\operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sin}\theta) + \varrho\overline{Y}(\varrho, \operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sin}\theta] \end{aligned}$$

et on aura

$$\frac{dt_1}{dt} = \varrho^m.$$

Dans la région du plan des θ, ϱ, limitée par les deux droites

$$\varrho = 0; \quad \varrho = \delta;$$

le système (9) n'a donc pas d'autres points singuliers que ceux situés sur l'axe $\varrho = 0$, lesquels on obtient en déterminant les racines réelles de l'équation

$$Q_{m-1}(\operatorname{Cos}\theta, \operatorname{Sin}\theta) = 0.$$

Dans le cas où $r=0$ ces points ne sont évidemment pas toujours des points singuliers, mais les points singuliers, situés sur l'axe $\varrho=0$, se trouvent toujours entre les solutions de cette équation.

Soit $\theta=\alpha$ une valeur de θ qui ne satisfait pas à cette équation. On sait alors, qu'il passe une et une seule courbe intégrale du système (9) par le point $\varrho=0$; $\theta=\alpha$. On en conclut qu'il passe une et une seule courbe intégrale du système (5) par l'origine avec la tangente determinée

$$y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Sin} \alpha = 0 .$$

Désignons maintenant par L'_1 et L'_2 les deux courbes intégrales, passant par $\varrho=0$, $\theta=\alpha$ et par $\varrho=0$, $\theta=\alpha+2\pi$. Déterminons $\delta_1<\delta$, de manière que la droite $\varrho=\delta_1$ rencontre les deux courbes L'_1 et L'_2. A la courbe L du plan des x, y correspond alors une courbe L'

$$\varrho=\varrho(t_1)\,; \quad \theta=\theta(t_1)$$

du plan des ϱ, θ, située entre L'_1 et L'_2.

Quand t croît de t_0 vers l'infini, t_1 tendra vers une limite déterminée, finie ou infinie.

Si cette limite est une quantité finie T, on sait que $\theta(t_1)$ tendra vers une limite finie β, telle que le point $\varrho=0$, $\theta=\beta$, soit un point régulier du système (9). A la courbe L correspondra alors la courbe L' passant par $\theta=\beta$, $\varrho=0$, d'où l'on conclut que la courbe L parviendra à l'origine avec la tangente déterminée $y \operatorname{Cos} \beta - x \operatorname{Sin} \beta = 0$.

Si t_1 tend vers l'infini, quand t tend vers l'infini, je dis que $\theta(t_1)$ tendra vers une limite finie déterminée.

La courbe L' étant en effet située entre L'_1 et L'_2, il est évident que les valeurs limites de $\theta(t_1)$ seront situées entre α et $\alpha+2\pi$. Supposons maintenant que $\theta(t_1)$ ait deux valeurs limites β_1 et $\beta_2>\beta_1$, et envisageons la courbe intégrale L'_3, passant par le point $\varrho=0$, $\theta=\gamma$, γ étant un nombre quelconque situé entre β_1 et β_2, mais tel que le point $\varrho=0$, $\theta=\gamma$ soit un point régulier. [1])

[1]) Supposons en outre qu'on ait choisi δ_1 suffissamment petit pour que la droite $\varrho=\delta_1$ coupe les trois courbes L'_1, L'_2, L'_3.

La courbe L' étant alors située entre L'_1 et L'_2 et ayant les points $\varrho = 0$, $\theta = \beta$ et $\varrho = 0$, $\theta = \beta_1$ pour points limites, il est nécessaire que la courbe L' rencontre la courbe L'_3 à l'intérieur de cette région, ce qui est contraire à notre hypothèse qu'il n'existe pas d'autres points singuliers dans cette région que ceux situés sur l'axe $\varrho = 0$.

La fonction $\theta(t_1)$ ne peut donc avoir plus d'une seule valeur limite, quand t_1 tend vers l'infini, ce qui fait voir que la courbe L parviendra à l'origine avec une tangente déterminée.

Notre théorème étant ainsi démontré, supposons maintenant que l'identité (6) ne soit pas satisfaite et que X_m ne s'annulle pas pour $x=0$. On sait alors qu'il n'existe de courbe intégrale allant à l'origine avec la tangente $x = 0$.

Par la substitution

$$y = y_1 x$$

on obtient le système d'équations

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= x[X_m(1\,,\, y_1) + x\overline{X}(x\,,\, y_1)] \\ \frac{dy}{dt_1} &= Y_m(1\,,\, y_1) - y_1 X_m(1\,,\, y_1) + x\overline{Y}(x\,,\, y_1) \end{aligned}$$

$\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x et de y_1.

Afin de trouver les courbes intégrales du système (5) allant à l'origine avec des tangentes déterminées, il nous suffit d'étudier les courbes intégrales du système (10) qui vont aux points singuliers

$$x = 0\,; \qquad y = k_1\,;$$

où k_1 satisfait à

$$Y_m(1\,,\, k_1) - k_1 X_m(1\,,\, k_1) = 0\,.$$

Et comme par chacun de ces points singuliers passe une courbe intégrale qui parvient à l'origine avec une tangente déterminée, à savoir l'intégrale $x = 0$, on conclut qu'une courbe intégrale allant à l'un des points singuliers $x = 0$, $y = k_1$, y parviendra nécessairement avec une tangente déterminée.

Supposons enfin que l'identité (6) soit satisfaite et que $Q_{m-1}(0, y) \neq 0$. Notre substitution nous donnera alors

$$(10^{\text{bis}}) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= Q_{m-1}(1, y_1) + x\overline{X}(x, y_1) \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= x^r[Z_{m+r+2}(1, y_1) + x\overline{Z}(x, y_1)]. \end{aligned}$$

A une intégrale du système (10bis), passant par un point régulier $x = 0$, $y_1 = \alpha$, correspond alors une intégrale du système (5) allant à l'origine avec une tangente déterminée. Ces courbes nous pouvons les regarder comme connues.

Il existe aussi une seule courbe allant à l'origine avec la tangente déterminée $x = 0$, laquelle nous pouvons obtenir en déterminant l'intégrale du système (9) passant par $\varrho = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Toutes les autres courbes intégrales du système (5), allant à l'origine, correspondront aux courbes intégrales du système (10bis) allant aux points singuliers

$$x = 0, \; y = k_1 \; ; \; \text{où } Q_{m-1}(1, k_1) = 0.$$

Mais il nous suffit d'étudier les courbes intégrales allant à un tel point singulier avec des tangentes déterminées, car une spirale se rapprochant indéfiniment du point $x = 0$, $y = k_1$, coupera nécessairement la droite $x = 0$ dans une infinité de points réguliers et ne nous donnera donc pas d'autres courbes du système (5) que celles, qu'on a obtenues du système (10bis), en étudiant les points réguliers de la droite $x = 0$.

Nous pouvons donc énoncer que, *si l'on a, ou* $X_m(0, y) \neq 0$, *ou* $Q_{m-1}(0, y) \neq 0$, *on connaitra toutes les intégrales du système* (5) *allant à l'origine avec des tangentes déterminées, si l'on sait déterminer toutes les intégrales de l'équation* (10) *ou* (10bis) *qui iront aux points singuliers* $x = 0$, $y = k_1$ *avec des tangentes déterminées.*

II.

Envisageons maintenant le système d'équations différentielles

$$(11)\qquad \frac{dx}{dt} = X(x\,,\,y) \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x\,,\,y)$$

où nous supposons que les termes de moindre dimension soient d'ordre m (c'est-à-dire que l'une des fonctions X et Y contienne des termes de dimension m, et aucune d'elles n'en contienne des termes de moindre dimension). Supposons de plus qu'il existe au moins une courbe intégrale du système (11) allant à l'origine avec une tangente déterminée. Je veux donner une méthode par laquelle on pourra déterminer toutes les intégrales du système (11) allant à l'origine.

Effectuons à cet effet une substitution linéaire convenable

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}\right\} \text{ où } \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

telle que les termes de moindre dimension en $\alpha X + \beta Y$ et en $\gamma X + \delta Y$ soient d'ordre m tous les deux. On obtient alors

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha X + \beta Y = \varphi_m(\xi\,,\,\eta) + \varphi_{m+1}(\xi\,,\,\eta)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma X + \delta Y = \psi_m(\xi\,,\,\eta) + \psi_{m+1}(\xi\,,\,\eta)$$

où φ_m et ψ_m sont des polynomes en ξ et en η de dimension m.

Mettons enfin

$$xY - yX = Z_{m+r+1} + Z_{m+r+2}$$

où Z_{m+r+1} est un polynome en x et en y de dimension $m+r+1$, r étant ≥ 0.

Deux cas sont alors à distinguer, suivant que $r = 0$ ou non.

Si $r = 0$, nous choisirons les constantes α, β, γ, δ, de manière que Z_{m+r+1} ne s'annulle pas pour $\xi = 0$.

Il s'en suit que $\xi\psi_m - \eta\varphi_m$ ne s'annulle pas pour $\xi = 0$, c'est-à-dire que $\varphi_m(0, \eta) \neq 0$.

Mettons ensuite

$$\xi = x_1 ; \quad \eta = (y_1 + k_1)x_1$$

où k_1 est une racine réelle de

$$\psi_m(1, k_1) - k_1\varphi_m(1, k_1) = 0 . \tag{12}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= x_1[\varphi_m(1, y_1 + k_1) + x_1\varphi(x_1, y_1)] \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= \psi_m(1, y_1 + k_1) - (y_1 + k_1)\varphi_m(1, y_1 + k_1) + x_1\psi(x_1, y_1) \end{aligned} \tag{13}$$

φ et ψ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x_1 et de y_1, et t_1 désignant une variable auxiliaire convenable.

Pour déterminer les courbes intégrales du système (11) allant à l'origine, il faut alors déterminer les courbes intégrales, allant à l'origine, des divers systèmes d'équations (13) qu'on obtient, en prenant les différentes racines réelles k_1 de l'équation (12).

Si au contraire $r > 0$, on aura

$$\begin{aligned} X &= xQ_{m-1}(x, y) + X_{m+1} \\ Y &= yQ_{m-1}(x, y) + Y_{m+1} . \end{aligned}$$

En choisissant alors les constantes α, β, γ, δ de telle manière que $Q_{m-1}(x, y) \neq 0$ pour $\xi = 0$, on sait que

$$\begin{aligned} \varphi_m(\xi, \eta) &= \xi\overline{Q}_{m-1}(\xi, \eta) \\ \psi_m(\xi, \eta) &= \eta\overline{Q}_{m-1}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

où $\overline{Q}_{m-1}(\xi, \eta)$ est un polynome de dimension $m-1$, tel que $\overline{Q}_{m-1}(0, \eta) \neq 0$.

Mettons maintenant

$$\xi = x_1 ; \quad \eta = (y_1 + k_1)x_1$$

où k_1 est une racine réelle de l'équation

$$\overline{Q}_{m-1}(1, k_1) = 0 \tag{12^{bis}}$$

on obtient

$$(13^{bis})\quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= \overline{Q}_{m-1}(1\,,\,y_1 + k_1) + x_1\varphi \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= x_1^{r-1}[Z_{m+r+1}(\delta - \beta k_1 - \beta y_1\,,\, \alpha k_1 - \gamma + \alpha y_1) + x_1\psi]. \end{aligned}$$

Pour déterminer les courbes intégrales du système (10) allant à l'origine, il nous suffit de déterminer les courbes intégrales allant à l'origine *avec des tangentes déterminées* des différentes équations (13bis), que l'on obtient en prenant pour k_1 les différentes racines réelles de l'équation (12bis).

Résumons maintenant les résultats auxquels nous sommes parvenus.

Étant donné le système d'équations (10), où les termes de moindre dimension sont d'ordre m, on peut toujours par des substitutions

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \xi &= x_1 \\ \eta &= (y_1 + k_1)x_1 \end{aligned}$$

ou ce qui revient à la même chose, par des substitutions de la forme

$$(14)\quad \begin{aligned} x &= (a + by_1)x_1 \\ y &= (c + dy_1)x_1 \end{aligned}$$

où $\quad a = \delta - \beta k_1\,;\quad b = -\beta\,;\quad c = -\gamma + \alpha k_1\,;\quad d = \alpha\,;$

réduire l'étude des courbes intégrales allant à l'origine du système (10), à celle des courbes intégrales, allant à l'origine avec des tangentes déterminées, de divers systèmes d'équations de la forme

$$(15)\quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= X_1(x_1\,,\,y_1) \\ \frac{dy_1}{dt_1} &= Y_1(x_1\,,\,y_1) \end{aligned}$$

où les termes de moindre dimension sont d'ordre $m_1 \leq m + 1$. On aura en outre

$$\alpha X + \beta Y = x_1^{m-1+\varepsilon} X_1$$

$$[\gamma - \alpha(k_1 + y_1)]X + [\delta - \beta(k_1 + y_1)]Y = x_1^{m+\varepsilon} Y_1$$

ε désignant une quantité qui sera égale à 0, si $r = 0$, et égale à 1, si $r > 0$.

Ce qui nous donne

$$(16) \quad \begin{aligned} X &= x_1^{m-1}[(a + by_1)x_1^{\varepsilon}X_1 + bx_1^{1+\varepsilon}Y_1] \\ Y &= x_1^{m-1}[(c + dy_1)x_1^{\varepsilon}X_1 + dx_1^{1+\varepsilon}Y_1]. \end{aligned}$$

Nous supposerons en outre que l'on ait choisi les constantes α, β, γ, δ de manière que $a = \delta - \beta k_1 \neq 0$.

En traitant maintenant le système d'équations (15) de la même manière, on peut réduire l'étude des courbes intégrales, allant à l'origine avec des tangentes déterminées, de chacune de ces équations à l'étude des courbes intégrales, allant à l'origine avec des tangentes déterminées, de divers systèmes d'équations différentielles de la forme

$$(15^{\text{bis}}) \quad \begin{aligned} \frac{dx_2}{dt_2} &= X_2 \\ \frac{dy_2}{dt_2} &= Y_2 \end{aligned}$$

lesquelles on obtient en faisant des substitutions convenables

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_1 + b_1 y_2)x_2 \\ y_1 &= (c_1 + d_1 y_2)x_2 \end{aligned} \qquad \text{où } a_1 \neq 0$$

et on aura alors

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2^{m_1-1}[(a_1 + b_1 y_1)x_2^{\varepsilon_1}X_2 + b_1 x_2^{1+\varepsilon_1}Y_2] \\ Y_1 &= x_2^{m_1-1}[(c_1 + d_1 y_1)x_2^{\varepsilon_1}X_2 + d_1 x_2^{1+\varepsilon_1}Y_2] \end{aligned}$$

les termes de moindre dimension des système (15bis) étant en outre d'ordre $m_2 \leq m_1 + 1$, et ε_1 étant égal à 1 ou 0.

On s'assure donc que

$$\begin{aligned} X &= x_1^{m-1} \cdot x_2^{m_1-1}\overline{X}_2(x_2, y_2) \\ Y &= x_1^{m-1} \cdot x_2^{m_1-1}\overline{Y}_2(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$\overline{X}_2$ et $\overline{Y}_2$ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x_2 et y_2.

En continuant ainsi, on sera en général amené à étudier les courbes intégrales, allant à l'origine avec des tangentes déterminées, de divers systèmes

$$\frac{dx_\nu}{dt_\nu} = X_\nu$$
$$\frac{dy_\nu}{dt_\nu} = Y_\nu$$

où

$$x_{\nu-1} = (a_{\nu-1} + b_{\nu-1}y_\nu)x_\nu \qquad a_{\nu-1} \neq 0$$
$$y_{\nu-1} = (c_{\nu-1} + d_{\nu-1}y_\nu)x_\nu$$

et où

$$X_{\nu-1} = x_\nu^{m_{\nu-1}-1}[(a_{\nu-1} + b_{\nu-1}y_1)x_\nu^{\varepsilon_{\nu-1}}X_\nu + b_{\nu-1}x_\nu^{1+\varepsilon_{\nu-1}}Y_\nu]$$
$$Y_{\nu-1} = x_\nu^{m_{\nu-1}-1}[(c_{\nu-1} + d_{\nu-1}y_1)x_\nu^{\varepsilon_{\nu-1}}X_\nu + d_{\nu-1}x_\nu^{1+\varepsilon_{\nu-1}}Y_\nu].$$

On aura alors

$$(17)\qquad \begin{aligned} x &= (a + by_1)(a_1 + b_1y_2)\ldots(a_{\nu-1} + b_{\nu-1}y_\nu)x_\nu \\ y &= (c + dy_1)(a_1 + b_1y_2)\ldots(a_{\nu-1} + b_{\nu-1}y_\nu)x_\nu \end{aligned}$$

et

$$(18)\qquad \begin{aligned} X &= x_\nu^{m-1+m_1-1+\ldots+m_{\nu-1}-1}\overline{X}_\nu(x_\nu, y_\nu) \\ Y &= x_\nu^{m-1+m_1-1+\ldots+m_{\nu-1}-1}\overline{Y}_\nu(x_\nu, y_\nu) \end{aligned}$$

$\overline{X}_\nu$ et $\overline{Y}_\nu$ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x_ν et y_ν.

Je dis qu'en prenant ν suffisamment grand, on parviendra toujours à de telles fonctions X_ν et Y_ν, que leurs termes de moindre dimension seront d'ordre 1 tout au plus, si toutefois on ne rencontre pas de telles fonctions que l'équation, déterminant la direction des tangentes, n'ait pas de racine réelle.

En mettant

$$hx + ky = \xi$$
$$h_1x + k_1y = \eta$$

après avoir choisi les constantes h, k, h_1, k_1 d'une manière convenable, on sait en effet d'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS [1]) qu'on peut écrire

$$\alpha X + \beta Y = [\eta^m + \varphi_1(\xi)\eta^{m-1} + \ldots + \varphi_m(\xi)]e^{\mathfrak{P}(\xi,\eta)}$$
$$\gamma X + \delta Y = [\eta^m + \psi_1(\xi)\eta^{m-1} + \ldots + \psi_m(\xi)]e^{\mathfrak{P}_1(\xi,\eta)}$$

---

[1]) Voir WEIERSTRASS: »Einige auf die Theorie der Analyt. Funct. sich bezieh. Sätze». Math. Werke, Tome II.

les fonctions φ_ν et ψ_ν étant des fonctions holomorphes de ξ au voisinage de $\xi = 0$, et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ étant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de ξ et de η.

En mettant

$$\varphi(\xi, \eta) = \eta^m + \varphi_1(\xi)\eta^{m-1} + \ldots + \varphi_m(\xi)$$
$$\psi(\xi, \eta) = \eta^m + \psi_1(\xi)\eta^{m-1} + \ldots + \psi_m(\xi)$$

on aura alors

$$\varphi(\xi, \eta) = x_\nu^{m-1+m_1-1+\ldots+m_{\nu-1}-1}\overline{X}'_\nu(x_\nu, y_\nu)$$
$$\psi(\xi, \eta) = x_\nu^{m-1+m_1-1+\ldots+m_{\nu-1}-1}\overline{Y}'_\nu(x_\nu, y_\nu)$$

les fonctions $\overline{X}'_\nu$ et $\overline{Y}'_\nu$ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de x_ν et de y_ν, convergentes au voisinage de $x_\nu = 0$, $y_\nu = 0$.

En appliquant la méthode pour la recherche du plus grand diviseur commun des deux polynomes φ, et ψ, on peut déterminer deux polynomes en η $L(\xi, \eta)$, $M(\xi, \eta)$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes en ξ, tels que

$$L(\xi, \eta)\varphi(\xi, \eta) + M(\xi, \eta)\cdot\psi(\xi, \eta) = \mathfrak{P}(\xi) \tag{19}$$

$\mathfrak{P}(\xi)$ désignant une fonction holomorphe en ξ au voisinage de $\xi = 0$. On pourra alors écrire

$$\mathfrak{P}(\xi) = \xi^s e^{\mathfrak{P}_1(\xi)}$$

où s sera un nombre entier facile à déterminer.

Choisissons maintenant les constantes h et k de telle manière que

$$ha + kc \neq 0$$

et introduisons les nouvelles variables x et y_ν, dans l'équation (19). Les équations (17) nous apprennent alors que le membre droit est divisible par x_ν^s, mais pas par x_ν^{s+1}. Le membre gauche sera au contraire divisible par $x_\nu^{m-1+m_1-1+\ldots+m_{\nu-1}-1}$.

Il s'en suit que l'une des quantités $m-1, \ldots, m_{\nu-1}-1$ doit nécessairement être égale à zéro, si $\nu > s$.

Il est donc établi, qu'on parviendra toujours à un système de la forme

$$\frac{dx_\nu}{dt_\nu} = X_\nu \tag{20}$$
$$\frac{dy_\nu}{dt_\nu} = Y_\nu$$

où les termes de moindre dimension sont d'ordre 1. c. q. f. d.

Nous supposerons maintenant d'abord que

$$X_\nu = x_\nu \overline{X}_\nu .$$

Deux cas sont alors faciles à traiter

I. $\overline{X}_\nu(0, 0) \neq 0$.

Le système (20) peut alors s'écrire

$$x_\nu \frac{dy_\nu}{dx_\nu} = f(x_\nu, y_\nu)$$

$f(x_\nu, y_\nu)$ désignant une fonction holomorphe au voisinage de $x_\nu = 0$, $y_\nu = 0$. Pour cette équation on peut complètement déterminer les courbes intégrales allant à l'origine. [1])

II. $\overline{X}_\nu(0, 0) = 0$; $Y_\nu = \alpha y_\nu + \beta x_\nu + Y_2$; où $\alpha \neq 0$.

Par Y_2 j'ai désigné ici une série de TAYLOR en x et en y, ne contenant que des termes de dimension plus grande que 1.

Les tangentes des courbes, allant à l'origine avec des tangentes déterminées, seront donc

$$x_\nu = 0; \quad \alpha y_\nu + \beta x_\nu = 0 .$$

Or on s'assure aisément que la courbe $x_\nu = 0$ est la seule courbe intégrale qui parviendra à l'origine avec la tangente $x_\nu = 0$.

Car mettons $x_\nu = \xi y_\nu$ on aura

$$\frac{dy_\nu}{dt_\nu} = y_\nu[\alpha + \psi]$$
$$\frac{d\xi}{dt_\nu} = \xi[-\alpha + \varphi]$$

[1]) Voir mon mémoire: »Sur les points sing. des équat. diff.» Öfversigt af K. Vet. Ak. Förh. 9 Mars 1898.

φ et ψ contenant des termes de dimension 1 au moins. Le point $\xi = 0$, $y_\nu = 0$, sera donc un *COL*, et on sait qu'il ne passe par ce point d'autre courbe intégrale que $y_\nu = 0$ et $\xi = 0$, lesquelles correspondent toutes les deux à $x_\nu = 0$.

En entendant par n un nombre entier tel que $\overline{X}_\nu$ soit divisible par x_ν^{n-1}, mais pas par x_ν^n, on peut écrire le système (20) de la manière suivante

$$x_\nu^n \frac{dy_\nu}{dx_\nu} = \frac{y_\nu - kx_\nu + Y_2}{\overline{X}_q(x_\nu, y_\nu) + \overline{X}_{q+1}} \tag{21}$$

$\overline{X}_q$ ne contenant que des termes de dimension q, et Y_2 et $\overline{X}_{q+1}$ ne contenant que des termes de dimensions plus grandes que 1 et q.

Si $q = 0$, cette équation se réduit à une de celles que j'ai traitées dans un mémoire antérieur. [1])

Si au contraire $q > 0$, nous mettons

$$y_\nu = (k + y_{\nu+1})x_\nu$$

ce qui nous donne

$$x_\nu^{n+q} \frac{dy_{\nu+1}}{dx_\nu} = \frac{y_{\nu+1} - k_1 x_\nu + Y_2'}{X_q(1, y_{\nu+1} + k) + x\, X} - x_\nu^{n+q-1}(k + y_{\nu+1})$$
$$= \frac{y_{\nu+1} - k_1 x_\nu + Y_2'}{\overline{X}_{q_1}(x_\nu, y_{\nu+1}) + \overline{X}_{q_1+1}} - x_\nu^{n+q-1}(k + y_{\nu+1})$$

$\overline{X}_{q_1}$ désignant les termes de moindre dimension q_1 du dénominateur. Il nous suffit ici d'étudier les intégrales de cette équation allant à l'origine, car l'équation (21) ne possède qu'une seule courbe intégrale allant à l'origine avec la tangente $x_\nu = 0$, à savoir $x_\nu = 0$.

Si $q_1 = 0$, on pourra traiter cette équation par la méthode de mon mémoire cité. Si au contraire $q_1 > 0$, nous ferons la substitution

$$y_{\nu+1} = (k_1 + y_{\nu+2})x_\nu .$$

En continuant ainsi on parviendra par la substitution

$$y_{\nu+\lambda-1} = (k_{\lambda-1} + y_{\nu+\lambda})x_\nu$$

[1]) Voir mon mémoire: »Sur les points singuliers des équat. diff.» présenté à l'Académie le 9 Février.

à l'équation

$$x_\nu^{n+q+q_1+\ldots+q_\lambda-1}\frac{dy_{\nu+\lambda}}{dx_\nu}=\frac{y_{\nu+\lambda}-k_\lambda x_\nu+Y_2^{(\lambda)}}{\overline{X}_{q_\lambda}+\overline{X}_{q_\lambda+1}}-x_\nu^n\varphi$$

où φ est une fonction holomorphe de x_ν et de $y_{\nu+\lambda}$, et où $\overline{X}_{q_\lambda+1}$ et $Y_2^{(\lambda)}$ ne contiennent que des termes de dimension $q_\lambda+1$ et 2 au moins.

Je dis, qu'en prenant λ suffisamment grand, on parviendra toujours à un nombre $q_\lambda=0$. On aura en effet

$$(22)\qquad \begin{aligned} Y_\nu &= y_\nu-kx_\nu+Y_2=x_\nu[y_{\nu+1}-k_1x_\nu+Y'_2]=\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad =x_\nu^\lambda\left[y_{\nu+\lambda}-k_\lambda x_\nu+Y_2^\lambda\right]\\ X_\nu &= x_\nu^n[\overline{X}_q+\overline{X}_{q+1}]=\ldots\\ &\qquad\qquad =x_\nu^{n+q+q_1+\ldots+q_\lambda-1}\left[\overline{X}_{q_\lambda}+\overline{X}_{q_\lambda+1}\right].\end{aligned}$$

Or si α, β, γ, δ sont des constantes convenables, on pourra mettre

$$(23)\qquad \begin{aligned} \alpha X_\nu+\beta Y_\nu &= \left[\eta_\nu^q+\varphi_1(\xi_\nu)\eta_\nu^{q-1}+\ldots+\varphi_q(\xi_\nu)\right]e^{\mathfrak{P}(\xi_\nu,\eta_\nu)}=\\ &= \varphi(\xi_\nu,\eta_\nu)e^{\mathfrak{P}(\xi_\nu,\eta_\nu)}\\ \gamma X_\nu+\delta Y_\nu &= \left[\eta_\nu^q+\psi_1(\xi_\nu)\eta_\nu^{q-1}+\ldots+\psi_q(\xi_\nu)\right]e^{\mathfrak{P}_1(\xi_\nu,\eta_\nu)}=\\ &= \psi(\xi_\nu,\eta_\nu)e^{\mathfrak{P}_1(\xi_\nu,\eta_\nu)}\end{aligned}$$

où $\xi_\nu=\alpha x_\nu+\beta y_\nu$; $\quad\eta_\nu=\gamma x_\nu+\delta y_\nu$.

Mais on pourra alors déterminer des polynomes en η_ν $L(\xi_\nu,\eta_\nu)$, $M(\xi_\nu,\eta_\nu)$, tels que

$$(24)\qquad L(\xi_\nu,\eta_\nu)\varphi(\xi_\nu,\eta_\nu)+M(\xi_\nu,\eta_\nu)\psi(\xi_\nu,\eta_\nu)=\xi_\nu^s e^{\mathfrak{P}(\xi_\nu)}.$$

De l'autre coté les équations (22) et (23) donneront

$$\varphi(\xi,\eta)=x_\nu^\lambda X_\lambda(x_\nu,y_{\nu+\lambda})$$

$$\psi(\xi,\eta)=x_\nu^\lambda Y_\lambda(x_\nu,y_{\nu+\lambda}).$$

Le membre gauche de l'équation (24) est donc divisible par x_ν^λ, et le membre droit ne sera divisible que par x_ν^s si $\alpha+\beta k\neq 0$, car on a

$$\begin{aligned}\xi_\nu &= (\alpha+\beta k+\beta y_{\nu+1})x_\nu\\ &= (\alpha+\beta k)x_\nu+\beta k_1x_\nu^2+\beta k_2x_\nu^3+\ldots+\beta y_{\nu+\lambda}x_\nu^\lambda.\end{aligned}$$

Après un nombre suffisant de substitutions on parviendra donc nécessairement à une équation différentielle telle que $q_\lambda=0$, c'est à dire telle que nous en pouvons déterminer toutes les intégrales allant à l'origine.

Avant de procéder plus loin, observons que nous pouvons maintenant déterminer toutes les intégrales, allant à l'origine avec des tangentes déterminées, d'un système d'équations de la forme

$$\frac{dx}{dt} = X_m + X_{m+1}$$

$$\frac{dy}{dt} = Y_m + Y_{m+1}$$

où $xY_m - yX_m$ ne s'annulle pas identiquement et n'a pas de facteur réel linéaire multiple. Car si $y - \alpha x$ est un des facteurs linéaires de cette expression, la substitution

$$y = (\alpha + \eta)x$$

nous donnera

$$\frac{dx}{dt} = X_m(1\,,\ \alpha + \eta) + xX$$

$$x\frac{dy}{dt} = Y_m(1\,,\ \alpha + \eta) - (\alpha + \eta)X_m(1\,,\ \alpha + \eta) + xY$$

$$= a\eta + bx + \psi_2$$

où a n'est pas zéro, ce qui nous donne une équation de la forme traitée ici.

Retournons maintenant aux équations (20), et mettons

$$X_\nu = \varphi_1 + \varphi_2\,; \qquad Y_\nu = \psi_1 + \psi_2\,;$$

où φ_1 et ψ_1 ne contiennent que des termes de dimension 1. Les seuls cas qu'il nous reste à traiter sont:

I. Si $x_\nu\psi_1 - y_\nu\varphi_1 \equiv 0$.

On aura alors $\varphi_1 = ax_\nu$; $\psi_1 = ay_\nu$, et l'origine sera un *NOEUD*.

II. Si $x_\nu\psi_1 - y_\nu\varphi_1 = (ky_\nu + \lambda x_\nu)^2$.

La substitution

$$ky_\nu + \lambda x_\nu = x_\nu$$

nous donnera alors

$$(25)\qquad \begin{aligned} \frac{d\bar{x}_\nu}{dt_1} &= \beta\bar{x}_\nu + X_2 \\ \frac{dy_\nu}{dt_1} &= \bar{x}_\nu + \beta y_\nu + Y_2 \end{aligned}$$

X_2 et Y_2 contenant des termes de dimension plus grande que 1. Si $\beta \neq 0$, la substitution

$$\bar{x}_\nu = \xi y_\nu$$

nous donnera une équation différentielle

$$y_\nu \frac{d\xi}{dy_\nu} = f(\xi\,,\ y_\nu)$$

f désignant une fonction holomorphe au voisinage de $\xi = 0$, $y_\nu = 0$, et cette équation peut être traitée par la méthode de mon mémoire cidessus cité.

Pour le cas au contraire où $\beta = 0$, la substitution

$$y_\nu = \xi_\nu\,; \quad \bar{x}_\nu + \alpha y_\nu = \eta_\nu$$

nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_\nu}{dt_\nu} &= \eta_\nu - \alpha\xi_\nu + X_2(\xi_\nu\,,\ \eta_\nu) \\ \frac{d\eta_\nu}{dt_\nu} &= \alpha(\eta_\nu - \alpha\xi_\nu) + Y_2(\xi_\nu\,,\ \eta_\nu)\,. \end{aligned}$$

Les seules courbes intégrales de cette équation qui vont à l'origine avec des tangentes déterminées, y parviendront avec la tangente $\eta_\nu - \alpha\xi_\nu = 0$. Par la substitution

$$\eta_\nu = (\alpha + y_{\nu+1})x_{\nu+1}\,; \quad \xi_\nu = x_{\nu+1}$$

on obtient

$$(26)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_{\nu+1}}{dt_\nu} &= x_{\nu+1}[y_{\nu+1} + x_{\nu+1}\varphi] \\ \frac{dy_{\nu+1}}{dt_\nu} &= -y_{\nu+1}^2 + x_{\nu+1}\psi(x_{\nu+1}\,,\ y_{\nu+1}) \end{aligned}$$

φ et ψ désignant des séries procédant suivant les puissances entières et positives de $x_{\nu+1}$ et de $y_{\nu+1}$.

Si $\psi(0,\ 0)$ ne s'annulle pas, les seules intégrales qui iront à l'origine avec des tangentes déterminées, y parviendront avec la tangente $x_{\nu+1} = 0$. Mettons donc

$$x_{\nu+1} = \xi y_{\nu+1}$$

on obtient

$$(27) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_{\nu+1}}{dt_{\nu+1}} &= -y_{\nu+1}^2 + y_{\nu+1}\xi\psi(0, 0) + \psi_3 \\ \frac{d\xi}{dt} &= 2\xi y_{\nu+1} - \xi^2\psi(0, 0) + \varphi_3 \end{aligned}$$

φ_3 et ψ_3 ne contenant que des termes de dimension plus grande que 2. L'équation, déterminant les tangentes à l'origine, sera ici

$$\xi y_{\nu+1}[2\xi\psi(0, 0) - 3y_{\nu+1}] = 0 .$$

Toutes ces tangentes étant distinctes nous savons traiter le système (27).

Le système (25) conduira donc, ou à un système que nous savons traiter, ou à un système (26) dont les termes de moindre dimension seront d'ordre 2. En traitant ce système par notre méthode de réduction de la page 647, nous parviendrons, ou à un système que nous savons déjà traiter, ou à un système de la forme (25). Celui-ci conduira, ou à un système que nous savons traiter, ou à un système dont les termes de moindre dimension sont d'ordre 2.

Mais l'équation (19) met en évidence que nous ne pouvons pas rencontrer plus de s tels systèmes d'équations, dont les termes de moindre dimension sont d'ordre 2, et il s'en suit, que nous parviendrons toujours à un système d'équations que nous savons traiter.

Nous sommes donc parvenus au resultat que nous voulions prouver, à savoir:

S'il existe des courbes intégrales du système (10), allant à l'origine avec des tangentes déterminées, toutes les courbes intégrales allant à l'origine, y parviendront avec des tangentes déterminées, et notre méthode de réduction nous donnera toutes ces courbes.

Si au contraire notre méthode de réduction ne nous donne pas de courbe allant à l'origine, nous pouvons conclure qu'il n'existe pas de courbe allant à l'origine avec une tangente déterminée. — L'origine sera alors ou un *Foyer* ou un *Centre.*

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 9.
Stockholm.

Om Ishafsfararnes »Trold-sæl».

Af Einar Lönnberg.

(Meddeladt den 9 November 1898 genom A. G. Nathorst.)

Under innevarande års Spetsbergsexpedition sköts af expeditionens chef Professor A. G. Nathorst den 29 juli 1898 på drifisen utanför östra Grönland vid 78° 3′ n. br., 3° 40′ v. l. en liten skälhund, som af fångstmännen benämndes »troldsæl» och som dessa sade vara en särskild art, väl skild från alla öfriga skälhundsarter, som förekomma i Ishafvet. Då dessa uppgifter hördes från flera håll samstämmigt och lika uttalanden gjordes af erfaret folk, som under åratal ja tiotal af år företagit fångstfärder uppåt Spetsbergen och andra delar af Norra Ishafvet, syntes det med rätta vara af behofvet påkalladt att anställa en genomgående undersökning, som möjligen skulle kunna kasta ljus öfver denna gåtfulla »troldsæl». För detta ändamål tillvaratogs hela djuret och inlades af konservator G. Kolthoff i formalin samt öfverlemnades vid hemkomsten för bestämning åt författaren af dessa rader.

Tyvärr var genom den våldsamma kraft, som utvecklas af de nutida finkalibriga gevären, kraniet helt och hållet sönderkrossadt liksom en stor del af framkroppens ben äfvensom kotorna voro sönderssprängda ända bort till lumbalregionen, fastän skottet träffat sidan af hufvudet. Emellertid har jag anställt undersökning och jemförelse med de delar, som stodo till buds.

Djurets längd var från nosen till svansspetsen omkring 60 cm., men exakt mått kunde ej tagas, då hufvud, hals och framkropp voro så illa krossade. Kroppsfärgen öfverensstämde enligt uppgift, meddelad af konservator Kolthoff, alldeles med

densamma hos exemplar af *Phoca foetida*, som under expeditionen skötos vid Spetsbergen.

Af kraniet återstår blott själfva nospartiet, ej ens gom- och näsben äro fullständiga. Högra öfverkäkstandraden finnes fullständig, af den venstra har sista kindtanden slagits bort. Högra underkäksgrenen är hel, men den venstra är afbruten strax bakom sista kindtanden. Ehuru således blott fragmenter återstå, är det dock tillräckligt för kraniets identifierande.

Af åtskilliga anledningar finnas ej några skäl att anställa jemförelse annat än mellan dessa fragment af »trold-sælens» skalle och kraniet af de båda mindre *Phoca*-arterna *Ph. foetida* och *vitulina.*[1]) Om vi då först taga fatt på underkäksbenens byggnad, finna vi genast, att största höjden af underkäkens ramus horizontalis är belägen under den bakersta (5:e) kindtanden såsom hos *Ph. foetida*, ej under 3:e såsom hos *Ph. vitulina.* Underkäksbenets kropp har vidare insidan nedanför kindtänderna plan eller t. o. m. svagt konkav såsom hos *foetida*, ej konvex såsom hos *vitulina.* Vända vi oss sedan till öfverkäksresterna, finna vi foramina palatina belägna i suturen mellan öfverkäksbenen och gombenen såsom hos *foetida*, ej framom sagda sutur såsom hos *vitulina.* Näsbenens relativt mindre bredd och form öfverensstämmer med förhållandena hos *foetida.* För att vinna ett exakt uttryck för detta förhållande, har jag anställt mätningar och dervid funnit, att båda näsbenens sammantagna största bredd framtill hos *foetida* alltid innehålles *mer* än tre gånger i gombredden mellan bakersta kindtänderna, men hos *vitulina* är näsbenens sammantagna bredd så stor, att den aldrig innehålles fullt tre gånger i gombredden å sagda ställe. Äfven i detta afseende framvisar »trold-sælen» *foetidas* karakterer. Tänderna hos denna äro också rätt-sittande såsom hos *foetida* och ha också samma allmänna form såsom hos denna art med tandspetsarne mera tydligt skilda från hvarandra och ej så gytt-

---

[1]) Denna art uppgifves visserligen ej från Spetsbergen, men då den förekommer bl. a. vid Grönland, Island, Ostfinnmarken och Sibiriens kust, måste den tagas med i räkningen.

rade såsom hos *vitulina*. Det visar sig sålunda, att i alla de karakterer, som särskilja *foetida* och *vitulina*, »trold-sælen» öfverensstämmer med *foetida*. De enda afvikelser, som kunna skönjas, äro följande: Tänderna hos »trold-sælen» äro något mindre än vanligt hos *foetida*, men dock så obetydligt, när jemförelsen utsträckes till ett större antal kranier, så att man ej kan fästa någon vigt därvid, desto mindre som variationen härvidlag är ganska stor. Så t. ex. fins i Upsala museum ett kranium af vikare från Roslagen med ännu kortare, nästan en-spetsade tänder. Vidare är processus angularis hos »trold-sælen» mindre skarpt afsatt, så att den ej bildar, såsom tyckes vara fallet äfven hos unga exemplar af *foetida*, ett rätvinkligt hak, utan snarare ett trubbvinkligt utskott. Men då formen på underkäkens bakre del med läget af processus angularis samt läge och form af processus coronoideus synes vexla ganska betydligt hos *foetida*, anser jag ej heller att den något afvikande formen af proc. angularis kan tillskrifvas någon större betydelse.

Hvad »trold-sælens» yttre angår, tilldrager sig naturligen den ringa kroppsstorleken största uppmärksamheten, i synnerhet då man ser morrhår, klor och extremiteter jemförelsevis stora och starkt utvecklade. Den ofvan anförda kroppslängden af omkring 60 cm. eller något däröfver är t. o. m. mindre än längden af en af Prof LILLJEBORG omtalad[1]) ofödd unge af *Phoca foetida*, hvilken mätte »2 fot och 5 tum» eller omkring 74 cm. Exemplaret af »trold-sæl», som här afhandlas, är ett ungt exemplar, det synes genast af benens beskaffenhet, epiphyserna äro helt lösa o. s. v., men morrhåren ha redan vuxit ut till en längd af 75 mm. och något längre än hos ett, äfven det jemförelsevis litet, i stoppadt tillstånd 82 cm. långt exemplar af *Ph. foetida* i Upsala museum, hvilket bär en etikett med påskriften »gammal».

Hos den omnämnda ofödda ungen äro morrhåren helt obetydligt utvecklade. Extremiteterna hos »trold-sælen» äro också i det närmaste lika stora som hos det ofvannämnda 82 cm. långa exemplaret. Klorna hos »trold-sælen» äro långa och hvassa, så-

[1]) Sveriges och Norges Ryggradsdjur, I, Däggdjuren, p. 690.

som plägar vara fallet hos unga vikare, men erbjuda ej heller de något afvikande i utseende eller form.

Vid undersökning af bukens viscera visade sig matsmältningskanalen helt tom och hade följande mått:

mage	24	cm.
tunntarm	1160	»
blindtarm	3	»
tjocktarm	40	»

Djuret var en hona, med könsorganerna helt små och outvecklade, så att man kunde se, att det ännu ej haft någon partus och ej ens var könsmoget.

Efter ofvan anförda resultat af den undersökning, som företagits, kan jag ej draga någon annan slutsas än att »troldsælen» må vara en ung *Phoca foetida*, ehuru af ovanligt ringa storlek. Jag anser därvid, att kranialkaraktererna böra tillskrifvas stor betydelse, ty äfven om man antager, att »troldsælen» skulle representera en *Phoca foetida* mycket nära stående form, synes det osannolikt, att en dylik skulle kunna vara lika *foetida* i t. ex. hvarje karakter, som skiljer denna från *vitulina*. Huru många månader gammal efter födelsen den varit är ej så godt att säga. Visserligen tyda de flesta uppgifterna i litteraturen därhän, att vikarens yngeltid skulle infalla tidigt på våren, februari—april. Men säkerligen kan detta vexla ganska betydligt och man har också exempel på vikarehonor, som födt i början af juni.[1]) Förliden sommar den 16 aug. såg jag utanför Söderhamn en ganska liten unge af vikare, som ännu följde modern och hvars dimensioner jag kunde temligen noga iakttaga, emedan den under lek flera gånger hoppade med hela kroppen öfver vattnet. Dessa anföranden må vara nog för att angifva, att vikarens yngletid högst betydligt vexlar, såsom man också vet vara fallet med andra skälhundsarter, t. ex. *Halichœrus* har helt olika yngletid i Östersjön och Nordsjön.

Från Spetsbergen berättar NATHORST 1882, att han den 11 juli i Green Harbour af en fångstman inköpte en lefvande unge

[1]) Se LILLJEBORG l. c. p. 689.

af *Phoca foetida*, som var så liten, att man försökte uppföda den med mjölk.[1])

Men äfven om denna »trold-sæl» har varit sent född, är den ju ovanligt liten, och huru skall detta kunna förklaras? Härtill kunna finnas flera olika, men måhända samverkande orsaker. För det första är det möjligt, att dess moderdjur varit ett litet, svagt och illa närdt individ, så att »trold-sælen» redan såsom foster varit liten. Det är också möjligt, att modern tidigt dukat under för fiender eller andra svårigheter, så att ungen alltför tidigt lemnades på egen hand och då ej kunde skaffa sig näring nog att växa ut utan blef hvad man säger knuten i växten. En annan omständighet, som ej bör förbises, är att »trold-sælen» träffades ute bland drifisen öfver stort djup. Vikaren är dock, som ju redan dess svenska namn antyder, en kustform, som i regel ej vistas ute i hafvet, utan ini skärgårdar, i vikar och i bugter.[2] Det är derför ej antagligt, att den, då den kommer ut, kanske utdrifven mot sin vilja, med isflak öfver de stora djupen kan så lätt sätta sig in i förhållandena och lära sig att skaffa sig näring där på samma sätt som de mera pelagiskt lefvande formerna, såsom t. ex. i första rummet Grönlandsskälen. Den senare är också en ojemförligt starkare simmare och dykare än vikaren. Om nu en ung vikare, som kanske från början varit svag och illa närd, kommer ut under för honom så ogynsamma omständigheter, att den ej kan skaffa sig nog föda att tillväxa, uppstår en förkrympt form, som af fångstmännen uppfattas såsom en egen art, då den erbjuder vissa egendomligheter och skenbara afvikelser från andra skälhundar. Namnet »trold-sæl» tillägges den då på analogt sätt, som vi ha »trollharar» o. s. v.

De bestämda uppgifterna från fångstmännen äro emellertid rätt egendomliga, i synnerhet som de höras från så många håll, enligt uppgift af NATHORST och KOLTHOFF både från fångstmän, som drifvit jagt kring Grönland och kring Spetsbergen. »Trold-

[1]) Bih. till K. V. A. H. Bd 9, N:o 2, p. 33.

[2]) Enligt meddelanden af Prof. NATHORST sågos dock flera exemplar af denna säl vid Grönlandsisens yttre kant.

sælen» är för alla dessa bekant och påstådd vara en egen art och säges ehuru sällsynt och enstaka nästan hvarje år observeras i ett eller annat exemplar. Saken bör om möjligt närmare utforskas, helst med fullständigare material. Den frågan kan också framkastas: är »trold-sæl» ett enhetligt begrepp eller är det ett gemensamt namn, som af fångstmännen gifves än åt en än åt en annan form, som visar sig afvikande från de vanliga i ett eller annat afseende. Jägare och fiskare draga ofta artdistinktionerna olika än zoologen och gifva namn därefter. På den saken kunna bevis framdragas äfven här hemma i Sverige. Huru ofta hör man ej fiskare säga det fins »2 (3) slags gäddor», »2 slags id», »2 slags harr» o. s. v. Utlekta magra sillar med blodsprängda fenor har jag hört af bohuslänska vadfiskare benämnas »sillkong» o. s. v. Likaledes påstå många jägare, att det finnes 2 arter elg i Sverige: »gräselg» och »fjällelg», flera andra dylika exempel att förtiga. Af dylika anledningar bör man visserligen beakta och taga lämplig hänsyn till hvad jägare och fiskare förtälja, men också samtidigt försigtigt umgås med saker, som ofta framställas och af sagesmannen uppfattas såsom fakta. Därför vågar jag ej påstå, att ishafsfångstmännens »trold-sæl» alltid är en förkrympt eller dvärgartad unge af *Phoca foetida*, men i ifrågavarande fall tror jag, att det är förklaringen.

Sedan ofvanstående redan tryckts, har jag haft nöjet att mottaga ett bref från konservator SPARRE-SCHNEIDER i Tromsö, i hvilket han vänligen meddelar mig, att han hört ishafsfarare omtala ett slags skälhund, som af dem benämdes »Larv» eller »Larvkobbe» och som ansågs tillhöra en särskild art. Denna form är tydligen identisk med »Trold-sælen». Rigtigheten af ofvan gjorda tolkning framgår äfven af den omständigheten, att en dylik »Larv», som lemnats till Tromsö Museum, vid undersökning visat sig vara en unge af *Phoca foetida*, ehuru den uppgifvits vara fullvuxen.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 9.
Stockholm.

Die Ichthyobdelliden im Zool. Reichsmuseum in Stockholm.

Von LUDVIG JOHANSSON.

[Mitgeteilt den 9 November 1898 durch HJ. THÉEL.]

Die in den Sammlungen des Museums vorfindlichen *Ichthyobdelliden* sind, abgesehen von einigen hier nicht mit besprochenen Formen aus wärmeren Gegenden, teils in den Binnengewässern Schwedens und an den schwedisch-norwegischen Küsten, teils während der schwedischen arktischen Expeditionen eingesammelt. R. BLANCHARD behauptet irgendwo — ich kann mich der Stelle nicht entsinnen — dass die *Hirudineen* in nördlichen Gegenden nur sehr spärlich vorkommen. Dieses trifft vielleicht in Bezug auf übrige Egel zu; dass aber die Sachlage betreffs der *Ichthyobdelliden* eine andere ist, dass nämlich gerade im Gegenteil das nördliche Polargebiet einen Reichtum von dieser Egelgruppe angehörenden Arten besitzt, bezeugen die bedeutenden Sammlungen der betreffenden von mir hier zu erörternden Formen, und auch die nicht minder grossartigen Sammlungen des Kopenhagener Museums, welche ich dank dem freundlichen Entgegenkommen des Herrn Prof. BLANCHARD habe untersuchen dürfen.

Bezüglich der Untersuchungsmethode will ich mitteilen, dass ich von allen neuen oder bisher ungenügend bekannten Arten mehr oder weniger vollständige Schnittserien verfertigte, ausgenommen *Ichthyobdella borealis*, von der mir nur ein einziges

Exemplar zur Verfügung gestanden. Eine mit Hülfe solcher Schnittserien ausgeführte Untersuchung ist zwar zeitraubend und mühsam, für das Erzielen sicherer Ergebnisse aber unumgänglich. Die äussere Differenzierung ist nämlich so unerheblich, dass, wenn man nur auf die äusseren Merkmale hingewiesen wäre, die einzelnen Arten wohl in der Regel erkannt, aber nicht die Gattungen begrenzt werden könnten. Eine gewisse systematische Bedeutung hat freilich die Zahl der Ringe eines typischen Segmentes; aber teils ist diese Bedeutung meist viel zu hoch angeschlagen worden, teils muss ferner eine Einteilung in Gattungen, welche sich hauptsächlich auf diesen Charakter stützt, natürlich stets mehr oder weniger gekünstelt erscheinen. Die innere Organisation liefert aber in systematischer Beziehung zuverlässige Charaktere, was ich bereits früher gelegentlich dargethan habe.[1]) Wenn ich z. B. betreffs *Platybdella Fabricii* nur das Äussere berücksichtigt hätte, würde ich höchst wahrscheinlich ohne Beanstandung diese Art in die Gattung *Callobdella* eingereiht haben, da die längs den Seiten des Hinterkörpers vorkommenden Aufragungen den Seitenblasen bei *Callobdella nodulifera* in hohem Grade gleichen und auch sonst, abgesehen von den Augen, ihr Äusseres dieser Art ähnelt; die anatomische Untersuchung ergiebt indes sofort, dass sie einer von *Callobdella* weit getrennten Gattung angehören muss. Und ebenso verhält es sich mit den übrigen Arten: um die Gattung zu bestimmen, ist die anatomische Untersuchung vonnöten.

Aus dem Gesagten muss gefolgert werden, dass ich natürlich nicht habe entscheiden können, zu welcher Gattung die neue Art *Ichthyobdella borealis* gehört, da ich auf die anatomische Untersuchung derselben habe verzichten müssen. Freilich hege ich anlässlich ihrer äusseren Erscheinung die starke Vermutung, dass sie einer bisher unbekannten Gattung angehöre; ich glaube aber ganz und gar der Berechtigung zu entbehren, für diese Art

[1]) Ludvig Johansson, Bidrag till kännedomen om Sveriges Ichthyobdellider. Upsala 1896.
Ludvig Johansson, Einige systematisch wichtige Teile der inneren Organisation der *Ichthyobdelliden* (Zool. Anzeiger 1898, p. 581).

eine neue Gattung aufzustellen, erstens, weil es ja immerhin möglich ist, dass sie dennoch einer früher beschriebenen Gattung angehört, und zweitens hauptsächlich deswegen, weil ich vorläufig nicht im stande wäre, den Platz der neuen Gattung im Systeme der *Ichthyobdelliden* zu bestimmen. Noch weniger dürfte ich berechtigt gewesen sein, die neue Art ohne jedwede Kenntnis des inneren Baues irgend einer der übrigen, bereits bestimmt definierten Gattungen zuzuführen. Ich finde es demnach zweckmässig, die fragliche Art vorläufig unter dem hier angegebenen Namen zu beschreiben, da der Name *Ichthyobdella*, welcher im Jahre 1828 von BLAINVILLE genau derselben Gattung beigelegt wurde, die er 1818 als *Piscicola* bezeichnete, doch wohl heutzutage für keine definierte Gattung in Anspruch genommen werden kann. Da eine ganze Menge von Arten aus verschiedenen Gattungen bald als *Ichthyobdella*-Arten, bald als *Piscicola*-Arten beschrieben worden sind, aber jetzt die Gattung *Piscicola* bestimmt begrenzt worden ist, könnte ja künftighin der Name *Ichthyobdella* als ein provisorischer Gattungsname für Arten verwendet werden, deren Gattungsbestimmung noch aussteht. Ich mache hiermit den Vorschlag, dass Andere, welche neue *Ichthyobdelliden* beschreiben, meinem Beispiele folgend sie als *Ichthyobdella*-Arten beschreiben, bis die anatomische Untersuchung erfolgt, wonach sie ohne irgendwelche Unschlüssigkeit einer bestimmten Gattung zuerteilt werden können. Ich habe mich bereits früher dieser Methode bedient, nämlich betreffs *Oxytonostoma typica* MALM, wie aus dem Nachstehenden ersichtlich ist.

Von den Ergebnissen meiner anatomischen Untersuchungen teile ich in der Folge nur so viel mit, als behufs Andeutung der systematischen Stellung neuer oder bisher ungenügend bekannter Arten notwendig ist. Das Übrige spare ich für eine Monographie über die *Ichthyobdelliden* auf, mit deren Ausarbeitung ich beschäftigt bin.

I. Pontobdella Leach.

1. P. muricata (L.) Lam.

Von dieser auf Rocken schmarotzenden Art finden sich in der Sammlung mehrere Exemplare vom Kattegat und Skagerrak.

II. Oxytonostoma Malm 1863.

Körper cylindrisch, nach dem Vorderende m. o. w. erheblich verjüngt, der ganzen Länge nach mit Längsreihen von kleinen spitzen Wärzchen versehen. Jedes typische Segment umfasst 12 (oder 14?) Ringe. Blinddärme fast gänzlich verschmolzen. Männlicher Begattungsapparat einfach gebaut. Augen fehlen.

Als Malm im Jahre 1863[1]) diese Gattung aufstellte, gab er als hauptsächliches Merkmal an, dass die Mundscheibe vorn einen kleinen Fortsatz haben solle; ausserdem nichts, als dass der Körper langgestreckt, fast gleich breit und etwas plattgedrückt sei.[2]) Da ich zur Zeit der Veröffentlichung meiner vorhin erwähnten Arbeit (Bidrag etc.) die einzige damals bekannte Art, *O. typica*, nicht gesehen hatte, sie aber auf Grund der Beschreibung teils mit *Piscicola picta* Olsson, teils, wie vor mir Levinsen, mit *Ichthyobdella elegans* M. Sars identifizieren konnte, äusserte ich dort, dass es unsicher sein dürfte, ob diese Art in der That eine neue Gattung repräsentiere, und dass wenigstens behauptet werden könnte, dass dem von Malm als der Gattung besonders eigen erwähnten Merkmale, dem Fortsatze der Mundscheibe, gar nicht eine so aussergewöhnliche Bedeutung anzuerkennen sei, dass infolgedessen die Aufstellung einer neuen Gattung berechtigt wäre, vor allem, da nur ein Individuum bekannt war. Ich fand es wahrscheinlich, dass jene Eigentümlichkeit nichts sei, als eine zufällige Missbildung des Organes. In der Tabelle,

[1]) A. W. Malm, Svenska Iglar (Göt. Vet. o. Vitt. Samh. Handl. VIII).

[2]) Er stellte diese Gattung übrigens nebst *Pontobdella*, da sie beide seiner Auffassung nach der vorstreckbaren Saugröhre ermangelten, mit *Hirudo*, *Aulostomum* und *Nephelis* zusammen.

welche ich zur Bestimmung der schwedischen *Ichthyobdelliden* in derselben Arbeit lieferte, führte ich denn auch jene Art unter dem Namen *Ichthyobdella elegans* SARS als durchaus nichtssagend bezüglich der Gattung an. Da in den Sammlungen des Reichsmuseums eine Reihe von Exemplaren jener *O. typica* existiert, und da ich ausserdem die Gelegenheit gehabt, die dem Museum zu Kristiania angehörenden Exemplare von *Ichthyobdella elegans*, welche SARS selbst gesammelt, zu untersuchen, so habe ich einerseits die Identität dieser beiden Arten zur Genüge nachweisen können, und anderseits eine Bestätigung meiner Annahme in Bezug auf die Beschaffenheit der Mundscheibe erhalten, denn wenigstens die konservierten Exemplare zeigen keine Spur, welche mutmassen liesse, dass die Mundscheibe normalen Falls jene von MALM als für die Gattung charakteristisch beschriebene Form besessen habe. Dann habe ich aber durch die anatomische Untersuchung fernerhin ermittelt, dass die fragliche Art nebst einer anderen, unten zu besprechenden, thatsächlich eine gut begrenzte Gattung vertritt, welche merkwürdigerweise mit *Piscicola* nahe verwandt zu sein scheint.

Der Körper ist von besonders langgestreckter Form, und dürfte in dieser Hinsicht sogar von *Piscicola* kaum übertroffen werden. Die meisten Ringe jedes Segments besitzen eine bestimmte Anzahl von Wärzchen. Die anatomische Untersuchung ergiebt, dass sie bei *O. arctica* ungefähr denselben Bau, obgleich en miniature haben, wie die Warzen bei *Pontobdella*, während ihr Bau bei *O. typica* einfacher ist.

Betreffs der inneren Organisation findet sich bei dieser Gattung allerlei Bemerkenswertes, worauf hier nicht näher eingegangen werden kann. Ich erwähne nur, dass das Leibeshöhlensystem zwar in wichtigen Beziehungen Abweichungen darweist, im grossen und ganzen aber zunächst mit dem *Piscicola*-Typus übereinstimmt.

2. **O. typica** MALM.

Synon. *Oxytonostoma typica* MALM, 1863.
Pontobdella granulifera MALM, 1863.
Ichthyobdella elegans M. SARS, 1863.
Piscicola picta OLSSON 1876.

Die Mundscheibe in eingezogenem Zustand tief schalenförmig mit zusammengebogenen Rändern, wenig excentrisch befestigt, so dass der dorsale Teil kaum doppelt so lang ist, wie der ventrale. Die hintere Saugscheibe in eingezogenem Zustande tief schalenförmig mit eingebogenen Rändern, gerade nach hinten gerichtet. Warzen nur auf der Rückenseite des Körpers, in 6 Reihen angeordnet.

In den Sammlungen des Reichsmuseums finden sich zur Zeit 7 Exemplare dieses Egels; mit einer einzigen Ausnahme scheinen sie Alle frei gelebt zu haben, als sie eingesammelt wurden. Von diesen ist 1 Ex. bei der zoologischen Meeresstation Kristineberg im Jahre 1893 eingefangen, 1 Ex. im Kosterfjord am $^{24}/_{7}$ 1865 auf 125 Faden tiefem Thongrunde, 2 von der Gunhild-Expedition im Skagerrak auf 370 Faden tiefem Thongrunde, endlich 2 bei Hofsås (Island?) gleichfalls auf Thongrund, und zwar in der Tiefe von 40 Faden. Ein drittes von dem letztgenannten Orte stammendes Exemplar habe ich für die anatomische Untersuchung verwendet. Schliesslich existiert ein bei Strömstad auf *Raja radiata* aufsitzend gefundenes Exemplar. Das grösste Individuum ist 26 mm. lang und misst dort, wo es am breitesten, d. h. nahe dem Hinterende, $2^1/_2$ mm.

Das auf *Raja radiata* aufsitzende Exemplar ist früher von MALM bestimmt worden. Da ich, wie oben erwähnt wurde, auch die von SARS eingesammelten Exemplare von *Ichthyobdella elegans* untersuchte, habe ich mit Bestimmtheit konstatieren können, dass dieser Name die hier beschriebene Art bezeichnet. Was *Pontobdella granulifera* MALM betrifft, hatte ich die Gelegenheit, das dem Kopenhagener Museum gehörende Typusexemplar zu sehen, und obgleich es jetzt von kümmerlichster Beschaffenheit

ist, konnte ich mich doch von der Richtigkeit der LEVINSEN'schen Angabe, dass es mit *O. typica* durchaus identisch sei, überzeugen.

Wenn der Darmkanal nicht mit Blut angefüllt ist, ist der Hinterkörper nahezu gleich dick, verjüngt sich nur ganz unbedeutend nach hinten und ein wenig mehr nach vorn. Der Vorderkörper schmälert sich stark ab und ist im vorderen Ende viel schmaler, als der Hinterkörper. Bei einem Exemplare ist der Hinterkörper nahe dem hinteren Ende bedeutend verdickt, offenbar weil der als Nahrungsbehälter fungierende Blinddarm stark mit Blut angefüllt ist. Sehr charakteristisch sind bei dem in Alkohol aufbewahrten Tiere die Form und die Stellung der Saugscheiben. Während die vordere als eine etwas abwärts gebogene und von dem schmaleren Vorderkörper scharf abgesetzte tiefe Schale auftritt, scheint die hintere gar nicht abgesetzt zu sein, sondern ist wie eine tiefe Schale mit eingebogenen Rändern und mit einer Wand, deren Aussenfläche direkt nach hinten die Oberfläche des Körpers einfach fortsetzt, geformt. Bei dem Exemplare, dessen Darmkanal hinten stark von Blut angefüllt ist, erscheint die Saugscheibe natürlich viel schmaler, als der Hinterkörper.

Die Ringelung ist sehr undeutlich, jedoch scheint die Anzahl der Ringe sich auf die in der Gattungsdiagnose angegebene Ziffer zu belaufen.

3. **O. arctica** n. sp.

Synon. *Piscicola typica* LEVINSEN 1887 (nicht MALM).

Die Mundscheibe in eingezogenem Zustand schalenförmig, sehr excentrisch befestigt, so dass der dorsale Teil etwa dreimal so lang ist, wie der ventrale. Die hintere Saugscheibe in eingezogenem Zustand seicht schalenförmig mit abstehenden Rändern, aber dennoch wenig breiter als der Hinterkörper, schief nach hinten und ventralwärts gerichtet. Warzen ringsum den Körper in 12 in gleichen Abständen gelegenen Reihen.

Von dieser Art besitzt das Reichsmuseum nur 2 Exemplare, beide während der Nowaja-Semlja-Expedition 1875 im Karischen Meere gesammelt, und zwar ist das eine bei Kap Middendorff aus einer Tiefe von 40—45 Faden, das andere von thonigem Grunde aus einer Tiefe von 20 Faden geholt; demnach waren wahrscheinlich beide Tiere frei lebend, als sie eingefangen wurden. Das grösste ist 21 mm. lang und 2 mm. breit; in den Sammlungen des Kopenhagener Museums finden sich aber bedeutend grössere Exemplare, welche übrigens ebenfalls dem Karischen Meere entnommen sind, mit Ausnahme eines Exemplares, welches bei Grönland gefunden sein soll.

Mit Hülfe der 12 Warzenreihen sowie der Form und Stellung der beiden Saugscheiben lässt sich diese Art leicht von der vorigen unterscheiden, mit welcher LEVINSEN sie verwechselte.

Was die Zahl der Ringe an einem typischen Segment betrifft, habe ich in den meisten Fällen freilich nur 12 gefunden, hie und da konnte ich aber an einem Segmente noch zwei Ringe gewahren, und es dürfte möglich sein, dass ein typisches Segment in der That 14 Ringe enthält, obgleich ein paar durch das Konservieren verundeutlicht worden sind. An dem einen Exemplare sind die Seitenblasen sehr deutlich erkennbar.

III. **Callobdella** v. BEN. & HESSE 1863.

Körper cylindrisch, nach den beiden Enden mehr oder weniger verjüngt, normalen Falls unbedeutend oder gar nicht geplattet, ohne Wärzchen. Jedes typische Segment umfasst 4 (6) Ringe. Jede Seite des Hinterkörpers entlang zieht sich eine Reihe von 11 pulsierenden Blasen. Das Leibeshöhlensystem mit ringförmigen, segmental wiederkehrenden Kommunikationen, die mit den Seitenblasen in Verbindung stehen. Die Blinddärme in jedem Segment ein längeres oder kürzeres Stück mit einander verschmolzen. Der gemeinschaftliche Endteil der Ductus ejaculatorii mündet in eine grosse, weite, mit einem muskulösen Anhangsorgan und zwei Vesiculæ seminales versehene Bursa aus, welche,

wenn vorgestülpt, einen Begattungsapparat bildet, der mindestens ebenso lang, wie der Körper an jener Stelle breit ist. Augen fehlen.

Dieser Gattung, welche vor allem durch den eigentümlichen und allen anderen Gattungen gegenüber abweichend gestalteten Begattungsapparat besonders gut begrenzt ist, wurde ihr Name von VAN BENEDEN & HESSE zuerteilt, obgleich natürlich die der Gattung damals gegebene Begrenzung keineswegs mit der obigen stimmt. Die von jenen Forschern als die Gattung kennzeichnende Charaktere angeführten Merkmale sind im Gegenteil derartig, dass ihre Nennung seitens der Verfasser deren mangelhafte Kenntnis von den zu jener Zeit bereits recht gut untersuchten *Ichthyobdelliden*-Gattungen an den Tag bringt. Ihre Gattungsdiagnose deckt sich fast buchstäblich mit derjenigen für die im Jahre 1859 aufgestellte und schon 1850 von TROSCHEL beschriebene Gattung *Cystobranchus*, und unterscheidet sich nur in ganz unwesentlichen Teilen von der Diagnose, welche auch für *Piscicola* zutreffen würde. Für jene Verfasser lag also gar kein Anlass vor, für die von ihnen aufgestellten neuen Arten eine neue Gattung zu bilden. Einzig dem Umstande, dass einer der hierhergehörigen Arten, *C. lophii*, unter diesem Namen von VAN BENEDEN & HESSE eine zwar recht armselige, aber doch die Art einigermassen erkennen lassende Beschreibung zu teil geworden, ist es zu verdanken, dass der Gattungsname beibehalten wird.

APATHY[1]), welcher aus irgend einer eigentümlichen Veranlassung der Ansicht war, dass *Callobdella lophii* BEN. & HESSE mit *Pontobdella lubrica* GRUBE identisch sei, benannte die letztere *Callobdella lubrica*, wodurch eine grosse Wirrnis geschafft wurde, da infolgedessen diese dem Mittelmeere angehörende Form als der Typus der Gattung *Callobdella* galt. Ich habe meinesteils die *C. lubrica* nie gesehen; nach den Beschreibungen APATHY's und Anderer finde ich es aber höchst unwahrscheinlich, dass sie überhaupt eine *Callobdella* sei. BLANCHARD, welcher anfänglich den Namen *Callobdella lubrica* guthiess, glaubte spä-

[1]) ST. APATHY, Systematische Streiflichter. I. Marine Hirudineen (Arch. f. Nat. 1888).

ter[1]) nachweisen zu können, dass diese Art einer im Jahre 1850 von DIESING aufgestellten Gattung *Trachelobdella* angehöre und bezeichnete sie deshalb mit dem Namen *Trachelobdella lubrica*; daraus folgert er, dass *Callobdella* als Synonym von dem älteren Namen *Trachelobdella* anzusetzen sei. Zu dieser Gattung sollten nun drei Arten gehören, *T. lubrica* (GRUBE) und *T. Mülleri* DIESING, mit welcher er *T. Kollari* DIESING gleichstellt, und schliesslich eine Art, welche BLANCHARD später[2]) unter dem Namen *T. sinensis* beschrieb. Ich bezweifle durchaus, dass irgend eine der von BLANCHARD als *Trachelobdella*-Arten beschriebenen Formen *Callobdella*-Arten sind; dieses kann übrigens nur durch eine anatomische Untersuchung besonders des Leibeshöhlensystemes und vor allem des männlichen Begattungsapparates ermittelt werden. Erst nachdem dieses geschehen ist und das Ergebnis dargethan hat, dass eine der DIESING'schen *Trachelobdella*-Arten eben in jenen Beziehungen mit *Callobdella lophii* BEN. & HESSE übereinstimmt, kann von einem Austausch des Namens *Callobdella* gegen *Trachelobdella* die Rede sein.

Betreffs der inneren Organisation will ich Folgendes hervorheben. Das Leibeshöhlensystem besteht aus einem Ventralsinus, einem Dorsalsinus und ein paar Lateralsinus nebst von ringförmigen in den 11 ersten Hinterkörpersegmenten wiederkehrenden Kommissuren, die die erwähnten Sinusabschnitte vereinigen und mit den in der Unterhaut vorkommenden Hohlräumen, welche die Seitenblasen verursachen, in Verbindung stehen. Die Blinddärme sind wie bei den meisten *Ichthyobdelliden* an 4 Stellen mit einander verschmolzen, bei *C. nodulifera* so vollständig, dass thatsächlich ein einziger Blinddarm vorliegt, der an 5 Stellen von schmalen, dorsoventralen Strängen durchsetzt ist. Der männliche Begattungsapparat ist in äusserst bemerkenswerter Weise entwickelt, indem die vorstülpbare Bursa sehr gross und kräftig muskulös ist, und sowohl mit einem eigentümlichen kugelförmigen

[1]) R. BLANCHARD, Hirudinées de l'Italie continentale et insulaire (Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. Torino 1894, N:o 192, s. 69).

[2]) R. BLANCHARD, Déscription de quelques Hirudinées Asiatiques (Mém. Soc. Zool. France 1896).

oder birnförmigen muskulösen Organ, welches bei der vorgestülpten Bursa in ihrer Spitze gelegenen ist, als auch mit ein paar langen, schmalen Vesiculæ seminales in Verbindung steht.

In Bezug auf die Ringe sei bemerkt, dass es sich hier erweist, mit welcher Vorsicht ihre Anordnung als Gattungscharakter zu verwenden ist. Ein typisches Segment besteht hier aus 4 durch ziemlich tiefe Furchen getrennten Ringen, was im allgemeinen bei einer Untersuchung lebender Tiere leicht konstatiert werden kann. Der erste und vierte dieser Ringe sind grösser als die übrigen und gewöhnlich, obschon nicht immer, durch eine seichte Furche in 2 Ringe geteilt, so dass man dann für das Segment 6 Ringe angeben kann. Bisweilen sind indes auch der dritte und vierte Ring in dieser Weise geteilt, ja mitunter können alle 6 derart gespalten sein, wodurch die Möglichkeit gegeben ist, an einem typischen Segmente 8 oder 12 Ringe zu zählen. Dieses habe ich jedoch nur an konservierten Exemplaren beobachtet.

4. **C. lophii** v. BEN. & HESSE.

Synon. *Calliobdella lophii* v. BEN. & HESSE 1863.
Piscicola lophii LEVINSEN, 1884.
Callobdella lophii L. JOH. 1896.

Der Körper, insbesondere der Hinterkörper, im allgemeinen mehr oder weniger abgeplattet. Die hintere Saugscheibe sehr gross, wenigstens von doppelter Weite der breitesten Stelle des Hinterkörpers, und 3- bis 4-facher Breite der Mundscheibe. Der Körper nicht mit gelben Pünktchen besäet.

In den Sammlungen finden sich mehrere Exemplare, alle von der norwegischen Küste, die meisten im Jahre 1879 bei Bergen auf *Lophius piscatorius* aufsitzend gefunden; betreffs zweier Exemplare fehlen nähere Angaben.

Diese seltene Art wird von der nachfolgenden leicht unterschieden, teils wegen ihrer kolossal ausgebildeten hinteren Saugscheibe, teils, und zwar hauptsächlich, durch das Ermangeln des für *C. nodulifera* charakteristischen gelben Pigments. Anstatt

dessen ist aber ein andersfarbiges Pigment vorhanden, dessen Anordung ich an Schnittserien beobachtet habe, dessen Aussehen bei dem lebenden Tiere ich indes nicht beschreiben kann, da ich diese Art nicht lebend gesehen habe.

In anatomischer Hinsicht zeigt diese Art mehrere Eigentümlichkeiten, welche dadurch würden erklärt werden können, dass dieser Egel sich sicherlich zu einem stationären Schmarotzer entwickelt hat. Ich habe in meinen vorhin citierten Arbeiten hierüber berichtet.

5. **C. nodulifera** (MALM).

Synon. *Piscicola nodulifera* MALM, 1863.
P. crassicaudata MALM, 1863.
P. subfasciata MALM, 1863.
P. gracilis MALM, 1863.
Callobdella nodulifera L. JOH. 1896.

Körper cylindrisch, gegen beide Enden verjüngt, nicht abgeplattet. Die hintere Saugscheibe nicht mehr als doppelt so breit, wie die Mundscheibe, und wenig oder gar nicht breiter, als die breiteste Stelle des Hinterkörpers. Der ganze Körper ziemlich gleichförmig mit kleinen gelben oder braungelben Pünktchen besäet.

Von diesem als Schmarotzer auf einer Menge verschiedener Meerfische wenigstens im Kattegat und Skagerrak äusserst häufig vorkommenden Egel besitzt das Reichsmuseum eine grosse Zahl von Exemplaren, welche teils an der Küste der Provinz Bohuslän, teils im Fjord von Kristiania auf *Gadus morrhua*, *G. æglefinus* und *Molva vulgaris* aufsitzend eingesammelt sind. Einige wurden ausserdem frei lebend eingefangen, darunter ein Exemplar ausserhalb Helsingborg.

IV. **Piscicola** BLAINV. 1818.

Körper fast völlig cylindrisch, nicht abgeplattet, ohne Wärzchen. Jedes typische Segment umfasst 14 Ringe. Entlang jeder Seite

des Hinterkörpers läuft eine Reihe von 11 pulsierenden Blasen. Das Leibeshöhlensystem hat segmental wiederkehrende ringförmige Kommunikationen, welche mit den Seitenblasen in Verbindung stehen. Die Blinddärme jedes Segments grösstenteils mit einander verschmolzen. Die Bursa kurz und eng, vorgestülpt kürzer als die Körperbreite an jener Stelle, kein muskulöses Organ an der Spitze und keine Vesiculæ seminales besitzend. Vier Augen. Der Körper von einem schwarzbraun-braunroten Pigment gefärbt, das an sternenartig verästelte Zellen, die sowohl in der Unterhaut, als im inneren Bindegewebe in bestimmte Längs- und Querreihen geordnet sind, gebunden ist.

6. **P. geometra** (L.).

Synon. *Hirudo piscium* BERGM. 1757.
Hirudo geometra L., 1758.
H. galearia BRAUN, 1805.
Piscicola piscium LAM., 1818.
Hæmocharis piscium SAV. 1820.
Piscicola geometra MOQ.-TAND., 1826.
Ichthyobdella geometra BLAINV., 1828.
Piscicola perspicax OLSSON, 1893.
P. lippa OLSSON, 1893.
P. geometra L. JOH. 1896.

Die Mundscheibe in ausgedehntem Zustande vorn und hinten seicht eingekerbt, von der Breite des Hinterkörpers, mit einer mehr oder weniger deutlichen, kreuzförmigen Zeichnung versehen, in deren Mitte die Augen gelegen sind. Die hintere Saugscheibe in ausgedehntem Zustande eirund, mit dem spitzen Teile nach hinten gerichtet, doppelt so breit, wie die grösste Körperbreite, mit 14 Pigmentstrahlen und einem Kreis aus 14 Augenpünktchen.

Von dieser Art, welche als Schmarotzer auf einer Menge verschiedener Fische sowohl in den Binnengewässern Schwedens, als an der östlichen Küste bis nach Öresund sehr häufig vorkommt, besitzt das Reichsmuseum eine grosse Zahl von Exemplaren, die

teils der Ostsee, teils einigen Binnenseen und Flüssen entstammen; ein paar Exemplare sind sogar so weit nordwärts wie in Lappland eingefangen, der genaue Ort ist jedoch nicht angegeben.

Die Art hat ein recht verschiedenes Aussehen, je nachdem sie im Süsswasser oder im Brackwasser lebt. Die dem Süsswasser entnommenen variieren erstlich weniger, die anderen treten in einer endlosen Reihe von verschieden gefärbten Formen auf, was ich bereits im Jahre 1896 (Bidrag etc.) näher entwickelt habe. Mitunter ist im vorderen Augenpaar das eine Auge oder beide Augen geteilt, was unter den *Ichthyobdelliden* sehr gewöhnlich, und bekanntlich auch bei anderen *Hirudineen* vorkommt. Eine solche Form mit 6 Augen gab OLSSON[1]) die Veranlassung, seine Art *P. perspicax* aufzustellen.

V. **Cystobranchus** DIESING 1859.

Der Körper, besonders der Hinterkörper, stets bedeutend geplattet, ohne Papillen. Jedes typische Segment besteht aus 7 Ringen. Jede Seite des Hinterkörpers entlang läuft eine Reihe von 11 pulsierenden Blasen. Das Leibeshöhlensystem mit segmental wiederkehrenden ringförmigen Kommunikationen, welche mit den Seitenblasen in Verbindung stehen. Die Blinddärme ein gutes Stück an jedem Segment mit einander verwachsen. Die kurze und enge Bursa in vorgestülptem Zustande viel kürzer, als die Körperbreite an jener Stelle, des muskulösen Organes an der Spitze und der Vesiculæ seminales ermangelnd. Der Körper mit sternenförmigen, in regelmässige Längs- und Querreihen geordneten Pigmentzellen. Die Nephridien unverzweigt, mit einander gar nicht kommunizierend.

Ich hatte keine Gelegenheit, die Art *C. respirans* (TROSCHEL), welche das Aufstellen der Gattung veranlasste, zu untersuchen. Ich bin indes durchaus nicht unschlüssig, die nachstehend beschriebene Art hierher zu führen, da ihr Äusseres nahe mit der genauen Beschreibung BLANCHARD's von *C. respirans* überein-

[1]) P. OLSSON, Bidrag till Skandinaviens Helminthfauna. II. Vet. Akad. Handl. Stockholm 1893.

stimmt; von dieser Art scheint sie hauptsächlich durch das Fehlen der Augen abzuweichen.

Von der sehr nahestehenden, wennschon nach dem Äussern recht verschiedenen Gattung *Piscicola* unterscheidet sich diese Gattung vor allem durch das Verhalten der Nephridien. Während nämlich bei allen übrigen *Ichthyobdelliden* die Nephridien reich verzweigt und untereinander netzförmig verbunden sind, und zwar sowohl die beiden demselben Segment angehörenden, als auch die der verschiedenen Segmente, so sind die Nephridien hier gänzlich unverzweigt und überdies völlig selbständig und hängen also niemals unter einander zusammen. Ihre Lage zeigt eine höchst bemerkenswerte Übereinstimmung mit gewissen stärker ausgebildeten Teilen der Nephridien von *Piscicola*, was ich in meinen vorerwähnten Arbeiten eingehender erörtert habe.

7. **C. mammillatus** (MALM).

Synon. *Platybdella mammillata* MALM 1863.
Cystobranchus mammillatus L. JOH. 1896.

Die Mundscheibe von der Breite des Vorderkörpers. Der Hinterkörper beträchtlich breiter, als der Vorderkörper. Die hintere Saugscheibe kreisrund, etwa dreimal so breit, wie die Mundscheibe. Augen fehlen.

Von diesem dem Anscheine nach nur auf *Lota vulgaris* schmarotzenden Egel besitzt das Reichsmuseum zahlreiche Exemplare, welche teils in der Gegend von Stockholm, teils im Wetternsee eingesammelt sind.

VI. **Abranchus** L. JOH. 1896.

Körper cylindrisch oder mehr oder weniger abgeplattet, ohne Warzen. Jedes typische Segment besteht aus 3 (6) Ringen. Seitenblasen fehlen. Das Leibeshöhlensystem mit nur zwischen dem Dorsalsinus und den Lateralsinus — demnach nur in den 6 ersten Segmenten des Hinterkörpers — segmental wiederkehrenden Kommunikationen. Die Blinddärme gänzlich getrennt oder in

vereinzelten Fällen ganz unbedeutend vereinigt. Die Bursa sehr klein und äusserst einfach gebaut. Sechs Augen.

Für diese Gattung in erster Reihe charakteristisch ist teils die Entwicklung des Leibeshöhlensystemes, welches von dem des *Piscicola*-Typus gänzlich abweicht, teils aber auch die getrennten und verhältnismässig schmalen Blinddärme, welche darthun, dass das Tier keines besonders gut ausgebildeten Nahrungsbehälters bedarf, was denn auch mit seiner Lebensweise übereinstimmt.

Jedes typische Segment besteht aus 3 durch recht tiefe Furchen getrennten Ringen, deren jeder wiederum durch eine sehr seichte und öfters ganz undeutliche Furche in zwei Ringe geteilt ist.

8. **A. brunneus** L. Joh.

Synon. *Abranchus brunneus* L. Joh. 1896.

Körper cylindrisch, nicht abgeplattet, gleich dick, der Vorderkörper gar nicht oder nur wenig schmaler, als der Hinterkörper. Die Mundscheibe gut ausgebildet und ausgebreitet, etwas kleiner, als die hintere Saugscheibe, welche den Hinterkörper wenig an Breite übertrifft. Die hintere Saugscheibe mit einem Pünktchenkreise. Der Körper undurchsichtig und ganz braun gefärbt.

Von dieser auf *Cottus scorpius* schmarotzenden Art finden sich in den Sammlungen nur wenige Exemplare vom südlichen Teil der Provinz Bohuslän.

9. **A. scorpii** (Malm).

Synon. *Platybdella scorpii* Malm 1863.

Körper cylindrisch, nicht abgeplattet, gleich dick, der Vorderkörper gar nicht oder wenig schmaler, als der Hinterkörper. Die Mundscheibe gut entwickelt und ausgebreitet, kaum halb so breit wie die hintere Saugscheibe, welche die doppelte Breite des Hinterkörpers hat. Die hintere Saugscheibe hat einen Pünktchenkreis. Der Körper mit braunen Längsbändern oder mit in Längs- und Querreihen geordneten grossen braunen Flecken, bisweilen auch ganz braun gefärbt.

Diese Art ist mit der vorigen sehr nahe verwandt. Ich muss sie jedoch vorläufig als getrennte Arten betrachten, da sie hinsichtlich der Grösse der hinteren Saugscheiben erheblich von einander abweichen, und da ich keine Zwischenformen gefunden, obgleich mir von beiden Arten eine sehr grosse Zahl von Exemplaren zur Untersuchung vorgelegen.

FABRICIUS hat in seiner Fauna groenlandica unter dem Namen *Hirudo piscium* einen auf *Cottus scorpius* schmarotzenden Egel beschrieben, und diese von FABRICIUS beschriebene Art benennt DIESING 1850 *Ichthyobdella versipellis.*

Falls nun, gemäss der Annahme MALMS, jene von FABRICIUS beschriebene Art mit *Platybdella scorpii* MALM identisch sein solle, dürfte diese also nunmehr *Abranchus versipellis* (DIESING) benannt werden.

Nun hat zwar FABRICIUS offenbar die betreffende Art beschrieben, aus seiner Beschreibung erhellt aber ganz unzweideutig, dass er gleichzeitig mehrere Arten mit ihr verwechselte. In zwei der in den Sammlungen befindlichen Flaschen, welche grönländische Egel enthielten, fand ich sowohl *A. scorpii*, als *A. microstomus*, und in der einen Flasche ausserdem *Platybdella Olriki.* Deshalb ist der DIESING'sche Name nicht verwendbar.

Von *A. scorpii* besitzt das Reichsmuseum eine grosse Zahl von Exemplaren, die teils von Grönland (Godhavn, Suckertoppen) und teils von Spitzbergen (Bellsund, Storfjord) stammen. Fast alle Individuen sassen beim Einfangen auf *Cottus scorpius* auf, nur ein paar lebten frei in der Tiefe von 15—20 Faden, auf steinigem Grunde.

10. A. microstomus L. JOH.

Synon. *Abranchus microstomus* L. JOH. 1896.

Der Vorderkörper schmaler, als der Hinterkörper, der gewöhnlich mehr oder weniger abgeplattet erscheint, und an der Mitte oder etwas vor derselben am dicksten ist und also sowohl nach vorn, als nach hinten sich allmählich verjüngt. Die Mund-

scheibe sehr winzig, im Ruhezustand ganz unwahrnehmbar. Die hintere Saugscheibe gut entwickelt, etwa so breit, wie der Hinterkörper an seiner breitesten Stelle. Die hintere Saugscheibe mit einem Pünktchenkreise. Der Körper fast ganz unpigmentiert, durchscheinend.

In den Sammlungen finden sich mehrere Exemplare teils aus den Schären von Bohuslän, alle auf *Cottus scorpius* aufsitzend, und teils von Spitzbergen (Storfjorden, auf *Cottus scorpius*) und Grönland (Egedesminde, frei auf 5—10 Faden tiefem Thongrunde mit Algen, ferner Godhavn und Suckertoppen, auf *Cottus scorpius*).

Diese Art bildet mit der folgenden eine Gruppe, welche sowohl dem Äusseren nach (vorzugsweise durch die Körperform und die Ausbildung der Mundhöhle), als auch betreffs der inneren Organisation recht erheblich von den vorhergehenden Arten abweicht. Es wäre vielleicht das richtigste, sie als eine Gattung für sich abzutrennen, ich will aber eine solche Spaltung nicht unternehmen, bevor ich von *Platybdella*-Arten besseres Untersuchungsmaterial erhalten, um das Verhältnis dieser Gattung zu *Abranchus* und den anderen Gattungen mit voller Bestimmtheit entscheiden zu können.

11. **A. sexoculatus** (MALM).

Synon. *Platybdella sexoculata* MALM 1863.
Abranchus sexoculatus L. JOH. 1896.

Der Vorderkörper schmaler, als der mehr oder weniger abgeplattete Hinterkörper, der ein wenig hinter der Mitte am breitesten ist. Die Mundscheibe winzig klein, im Ruhezustand ganz unwahrnehmbar. Die hintere Saugscheibe gut entwickelt, breiter als der Hinterkörper an seiner breitesten Stelle. Beide Saugscheiben mit einem Pünktchenkreise. Der Körper reich pigmentiert von kleinen schwarzen, in Querbänder geordneten Pünktchen.

Von dieser Art finden sich in den Sammlungen des Museums mehrere Exemplare, welche alle, auf *Zoarces viviparus* aufsitzend, in den Schären von Bohuslän eingesammelt wurden.

VII. **Platybdella** MALM 1863.

Körper cylindrisch, mit oder ohne Warzen. Jedes typische Segment umfasst 3 Ringe, welche in je 2 geteilt sein können. Seitenblasen fehlen. Das Leibeshöhlensystem stark reduziert, ohne Lateralsinus und ohne Kommunikationen. Die Blinddärme ein längeres oder kürzeres Stück in jedem Segment mit einander verschmolzen. Bursa von einfachem Bau. Augen 6 oder gar keine.

Was vorhin betreffs *Callobdella* in Bezug auf die Berechtigung, den Gattungsnamen zu behalten, gesagt wurde, hat auch betreffs *Platybdella* Geltung. Die Gattung *Platybdella*, wie sie von MALM gefasst wurde, deckt sich in der That ganz und gar nicht mit der Gattung, wie sie hier charakterisiert worden ist.

Ganz besonders wird die Gattung durch die äusserst rudimentäre Beschaffenheit des Leibeshöhlensystemes charakterisiert. Wie ich bereits in meiner vorhin citierten Arbeit (Einige syst. wicht. Teile etc.) erwähnt habe, konnte ich bisher nicht entscheiden, ob die Leibeshöhle von einer Leibeshöhle des *Abranchus*-Typus oder des *Piscicola*-Typus reduziert worden ist. Vielleicht verhalten sich verschiedene Arten in dieser Beziehung verschieden; solchenfalls wäre die Gattung in zwei Gattungen zu teilen. Hierfür scheinen übrigens noch andere Thatsachen zu sprechen, worauf ich jedoch jetzt nicht eingehen kann.

12. **P. anarrhichæ** (DIES.).

Synon. *Piscicola marina* LEUCK. 1849 (nicht JOHNST. 1845).
Ichthyobdella anarrhichæ DIES. 1859.
Platybdella anarrhichæ MALM 1863.
Platybdella anarrhichæ L. JOH. 1896.

Körper fast gleich dick; nur ist der Vorderkörper unerheblich schmaler, als der Hinterkörper; ohne Warzen. Die Mundscheibe kaum so breit, wie der Hinterkörper; die hintere Saugscheibe doppelt so breit, wie die Mundscheibe. Augen fehlen.

Von dieser, dem Anscheine nach ausschlissslich auf *Anarrhichas lupus* schmarotzenden Art besitzt das Reichsmuseum wenige Exemplare, welche teils an der Bohuslän'schen Küste, teils bei Bergen (Norwegen) eingefangen sind.

13. P. fabricii MALM.

Synon. *Platybdella Fabricii* MALM 1863.

Der Körper über die Mitte des Hinterkörpers am dicksten, von dort sowohl nach hinten, als besonders nach vorn stark verjüngt. Jede Seite des Hinterkörpers entlang zieht sich eine Reihe von 12 kleinen rundlichen Aufragungen, welche äusserlich Seitenblasen sehr ähneln; von diesen sind die 1:ste bis 4:te und die 8:te bis 10:te etwas mehr ventralwärts gelegen, als die übrigen. Die Mundscheibe halb so breit, wie die hintere Saugscheibe, welche bedeutend schmaler ist, als der Hinterkörper an seiner breitesten Stelle. Augen 6.

Die oben erwähnten Aufragungen längs dem Hinterkörper erweisen sich bei der anatomischen Untersuchung nicht als Seitenblasen, sondern als Zellenanhäufungen, welche die Haut auftreiben.

In den Sammlungen findet sich eine sehr grosse Menge von Exemplaren, hauptsächlich von verschiedenen Orten bei Spitzbergen entstammend, einige aber auch von Grönland. Die meisten scheinen frei lebend eingefangen worden zu sein, aus Tiefen von 1—10 Faden; etliche schmarotzten auf *Cottus scorpius*.

14. P. olriki MALM.

Synon. *Platybdella Olriki* MALM 1865.

Körper fast gleich dick, sowohl nach vorn als nach hinten nur wenig verjüngt. Die Mundscheibe etwas schmaler, als die hintere Saugscheibe, welche in ausgedehntem Zustande wenig schmaler sein dürfte, als der Hinterkörper. Der Hinterkörper mit undeutlichen, rundlichen, seitlich gelegenen Aufragungen ver-

sehen, zwischen ihnen auf der Rückenseite in der Nähe des Hinterendes 4 Reihen kleiner, spitzer Wärzchen. Augen 6.

Diese Art, welche von LEVINSEN[1]) als mit *P. fabricii* MALM identisch aufgefasst wurde, ist von ihr thatsächlich sehr gut zu unterscheiden, sowohl durch ihre allgemeine Körpergestaltung, als vor allem durch die spitzen Wärzchen, welche am Hinterende des Körpers auf dem Rücken in 4 Längsreihen auftreten. Gewöhnlich sind 3—4 Querreihen solcher Wärzchen deutlich erkennbar, je eine einem Segment aufsitzend. Auch in anatomischer Hinsicht weicht diese Art in gewissen Fällen von der vorhergehenden ab.

Im Reichsmuseum finden sich nicht wenige Exemplare, welche teils bei Spitzbergen, teils an der Küste Grönlands eingefangen worden sind.

VIII. **Notostomum** LEVINSEN 1881.

Körper sehr langgestreckt, cylindrisch, gleich dick, nur der Vorderkörper nach vorn etwas verjüngt. Jedes typische Segment besteht aus wenigstens 16 Ringen. Die Mündung der Rüsselscheibe liegt in der Mitte des dorsalen Mundscheibenrandes. Seitenblasen fehlen. Die Blinddärme fast völlig mit einander verschmolzen. Augen fehlen.

Diese Gattung, welche nach den bisherigen Ermittelungen nur grosse Formen umfasst, wird vor allem durch die Lage der Rüsselscheidenmündung charakterisiert. Im übrigen zeichnet sich diese Gattung durch mehrere anatomische Eigentümlichkeiten aus, die ich hier nicht näher erörtern kann. Sie ist jedoch nicht in dem Masse merkwürdig, wie LEVINSEN sie beschreibt. Beispielsweise sei erwähnt, dass nicht *eine*, sondern wie gewöhnlich zwei Geschlechtsöffnungen vorhanden sind, die weibliche hinter der männlichen, obschon jene sehr klein ist und leicht übersehen wird, insbesondere, da die männliche aussergewöhnlich weit ist. Gleichfalls finden sich wie im allgemeinen bei den *Ichthyobdelliden* 6 Hodenpaare, von denen je ein Paar in den Segmenten der

---

[1]) G. M. R. LEVINSEN, Nordiske Annulata. etc. Vidensk. Meddel. Nat. For. Kjøb. 1882.

Hodenregion gelegen ist; also nicht, wie LEVINSEN behauptet, eine einzige langgedehnte Masse, die aus zahlreichen winzigen Testikeln besteht. Das von LEVINSEN als die Hoden Beschriebene sind Cocondrüsen. Auch verhalten sich die Blinddärme nicht anders, als bei den meisten *Ichthyobdelliden.* Ich habe die Gelegenheit gehabt, alles dieses auch an der von LEVINSEN beschriebenen Art, *N. læve*, zu bestätigen.

15. **N. cyclostomum** n. sp.

Mundscheibe platt, kreisrund, nicht zusammenlegbar. Hintere Saugscheibe in der Gestalt einer tiefen kreisrunden Schale mit eingebogenem Rande, gerade nach hinten gerichtet, nicht breiter, als der zunächst gelegene Teil des Hinterkörpers und deswegen gar nicht abgesetzt. Das Saugrohr erstreckt sich nicht über das zweite Segment des Præclitellum.

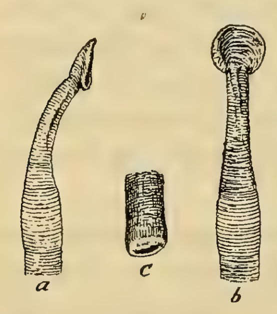


Fig. 1. *Notostomum cyclostomum*, nat. Gr.
a, vorderes Körperende von der Seite gesehen.
b, vorderes Körperende von dem Rücken gesehen.
c, hinteres Körperende.

Von dieser Art besitzt das Museum nur 2 Exemplare, welche beide während der Vega-Expedition im Behringssund eingefangen worden sind.

Beide sind ungefähr gleich gross; das grösste misst in der Länge 105 mm., und wo es am breitesten 7 mm. Die Art unterscheidet sich vor allem durch die Form der Saugscheiben und durch das verhältnismässig kurze Saugrohr leicht von *N. læve* LEV., die sich durch grosse schalenförmige, aus je 2 zusammenklappbaren Seitenhälften bestehende Saugscheiben und durch ein bis an die männliche Geschlechtsöffnung heranreichendes Saugrohr auszeichnet. Die Ringe sind sehr kurz; es hält schwer, ihre Zahl an einem typischen Segment zu bestimmen, sie dürfte indes die in der Diagnose genannte Ziffer eher überschreiten.

16. **Ichthyobdella borealis** n. sp.

Körper cylindrisch; der Vorderkörper nach vorn allmählich verjüngt, der Hinterkörper fast der ganzen Länge nach gleich dick, nur am hinteren Ende etwas verjüngt. Jedes typische Segment aus 3 Ringen bestehend, die wieder in je 4 geteilt sind Beide Saugscheiben tief glockenförmig. Der Körper dicht mit schwarzen Pünktchen besetzt. Augen fehlen.

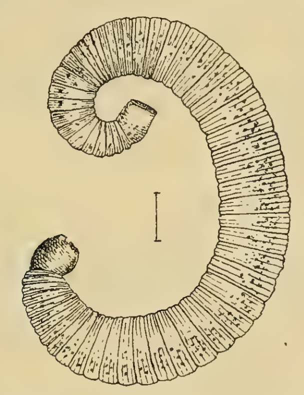


Fig. 2. *Ichtyobdella borealis*, vergr.

Da das Reichsmuseum von dieser hübschen kleinen Art nur ein einziges Exemplar besitzt, habe ich sie nicht anatomisch untersuchen können. Deswegen habe ich auch nicht entscheiden können, welcher Gattung sie angehört, sondern es vorgezogen, sie vorläufig unter dem obigen Namen aufzuführen. Wahrscheinlich gehört sie einer neuen Gattung an.

Das im Museum befindliche, von Spitzbergen stammende Exemplar ist 15 mm. lang und misst, wo es am breitesten, $1^1/_4$ mm.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 620.)

Paris. *Ministère des travaux publics, Division des mines.*
Annales des mines. (9) T. 12 (1897): Livr. 12; 13 (1898): 1–4; 14 (1898): 8. 8:o.
— *Observatoire municipal de Montsouris.*
Annuaire. Année 1898. 16:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 10. 8:o.
— *Rédaction de la Feuille des jeunes naturalistes.*
Feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 29 (1898): N:o 337. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 25 (1897): N:o 9; 26 (1898): 1. 8:o.
Pola. *K. u. k. hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegsmarine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen. 1898: 9. Fol.
Roma. *R. Comitato Geologico d'Italia.*
Bollettino. Anno 1898: N:o 2. 8:o.
Riga. *Naturforscher-Verein.*
Korrespondenzblatt. 41. 1898. 8:o.
Riposto. *Osservatorio meteorologico del R. Istituto nautico.*
Bollettino mensile. Anno 27 (1898): Fasc. 9. 8:o.
Saint John. *Natural history society of New Brunswick*
Bulletin. N:o 16. 1898. 8:o.
St. Pétersbourg. *Musée Zoologique de l'acad. Imp. des sciences.*
Annuaire. 1898: N:o 1. 8:o.
— *Société de Géographie.*
Izvjestija. T. 33 (1897): B. 6; 34 (1898): B. 3. 8:o.
Otčet. 1897. 8:o.
Sydney. *Geological survey.*
Mineral resources. N:o 3. 1898. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
Boletín. T. 2: N. 4. 1898. 8:o.
Tōkyō. *Earthquake investigation committee.*
Publications. N:o 2. 1898. 4:o.
— *Geographical society.*
Journal of geography. Vol. 10 (1898): N:o 113–117. 8:o.
Venezia. *R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.*
Atti. T. 55: Disp. 3–10; 56: 1–7. 1896—98. 8:o.
Memorie. Vol. 26: N:o 1–2. 1897. 4:o.
Washington. *Dep. of agriculture, Weather bureau.*
Monthly weather review. 1898: 7. 4:o.
Wellington. *New Zealand Institute.*
Transactions and proceedings. Vol. 30. 1897. 8:o.
Winnipeg. *Historical and scientific Society of Manitoba.*
Transactions. N:o 51—52 (1898). 8:o.
Annual report. Year 1897. 8:o.
Wien. *K. K. geologische Reichsanstalt.*
Verhandlungen. 1898: N:o 13. 8:o.

(Forts. å sid. 704.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 9.
Stockholm.

Ueber den Zusammenhang zwischen der dissociirenden Kraft, der Dielectricitätskonstanten und der molekularen Beschaffenheit von Flüssigkeiten.

Von HANS EULER.

(Mitgeteilt den 9 November 1898 durch O. PETTERSSON.)

In einer vor kurzem erschienenen Mitteilung veröffentlichen die HH. DULOIT und ASTON[1]) eine Untersuchung über die Frage, ob eine Beziehung besteht zwischen der Polymerisation der Flüssigkeiten und ihrer dissociirenden Kraft.

Durch die von ihnen ausgeführten Leitfähigkeitsbestimmungen an einigen Salzen, gelöst in Propionitril, Aceton, Methylaethylketon, Methylpropylketon und Nitroaethan sehen die genannten Autoren ihre Hypothese als bestätigt an: »On peut conclure, qu'il existe bien une relation générale entre la polymérisation du dissolvant et son pouvoir dissociant.»

Wie es scheint, ist den Verfassern die Abhandlung von NERNST[2]) über »Dielectricitätskonstante und chemisches Gleichgewicht» nicht bekannt geworden.

Da es aber gerade von Interesse sein dürfte, die beiden Beziehungen zu vergleichen, durch welche einerseits die Dielektricitätskonstante (D. E.), anderesseits event. die Polymerisation mit der dissociirenden Kraft verbunden sind, so habe ich durch einige orientirende Versuche die Fragen zu ermitteln gesucht:

---

[1]) Comptes rendus **125**, p. 240.

[2]) Zeitschr. f. phys. Chem. **13**, p. 531.

1) Können unimolekulare (nicht associirte) Flüssigkeiten dissociiren?

Giebt es associirte Flüssigkeiten, welche keine messbare dissociirende Kraft besitzen?

3) Welcher Zusammenhang ergiebt sich in beiden Fällen mit der Dielectricitätskonstanten?

Es wurden zu diesem Zweck die Lösungen einiger anorganischen Salze in Bezug auf ihre Leitfähigkeit untersucht, und hieraus nach Ermittlung der Konzentration die molekulare Leitfähigkeit nach den neuen von F. KOHLRAUSCH hierfür gegebenen Grundlagen[1]) berechnet.

Die Lösungsmittel waren: Furfurol, Nitrobenzol, Benzonitril, Buttersäure, Isobuttersäure und Valeriansäure. Die Reinheit der von der Firma Kahlbaum bezogenen und nochmals destillirten Lösungsmittel wurde durch Bestimmung des Siedepunctes kontrollirt. Besonders notwendig zeigte es sich, den Zutritt von Feuchtigkeit vollkommen zu verhindern; deswegen wurden die Lösungen in zugeschmolzenen Glasröhren aufbewahrt.

Die Messungen wurden in einem Gefäss ARRHENIUS'scher Konstruktion ausgeführt. Die Kapazität ergab sich aus dem Widerstand von 46,14 Ohm, welchen eine $^1/_{50}$ normale Chlorkaliumlösung bei 18° zeigte, zu $K = 0{,}1106$.

Bei den *Lösungen* konnte KOHLRAUSCH's Methode in ihrer einfachsten Form angewandt werden, da die Widerstände weniger als 10 000 Ohm betrugen. Die ausserordentlich geringe Leitfähigkeit der *reinen Lösungsmittel* hingegen machte die Nebenschaltung einer Kapazität nötig. Ich habe mit der gebräuchlichen Brückenanordnung und einem Luftkondensator im Nebenzweig die Widerstände der reinen Lösungsmittel gemessen, und mich überzeugt, dass die Leitfähigkeit der letzteren gegen diejenige der Lösungen vollkommen vernachlässigt werden kann. Derartig grosse Widerstände werden indessen wohl am sicher-

---

[1]) Wied. Ann. **64**, p. 417.

sten mit NERNST's Apparat zur Bestimmung der D. E.[1]) untersucht. Sobald mir dieser Apparat zur Verfügung stehen wird. sollen die betr. Widerstände genauer bestimmt und die Messungen auf Lösungen sehr wenig dissociirender Flüssigkeiten erstreckt werden.

Einer etwas weiteren Ausdehnung der Arbeit stand bis jetzt hauptsächlich die sehr geringe Löslichkeit der meisten Salze in organischen Lösungsmitteln im Wege.

Von der Untersuchung gelöster *Säuren* wurde deswegen abgesehen, weil dieselben sich hinsichtlich ihrer Spaltbarkeit in Jonen ganz anormal verhalten. Wie z. B. ZANNINOVICHTESSARIN[2]) gefunden hat, bilden starke Mineralsäuren wie Salzsäure in der sonst sehr gut dissociirenden Ameisensäure nicht nur keine Jonen, sondern sogar Doppelmoleküle.

Ich stelle in Folgendem die gefundenen molekularen Leitfähigkeiten von KJ, NaJ, KCl und NaBr in *nicht associirten* Lösungsmitteln zusammen.

Die Tabelle enthält: in der 1. Spalte das Lösungsmittel, in der 2. dessen D. E., in den folgenden für die gelösten Salze unter 1000 η die Anzahl Grammoleküle im Liter, unter Λ die für die betr. Konzentrationen gefundenen molekularen Leitfähigkeiten.[3])

Tab. I.

Lösungsmittel.	D. E.	KJ		NaJ		NaBr		KCl	
		1000 η	Λ	1000 η	Λ	1000 η	Λ	1000 η	Λ
Furfurol . . .	39.4	0.35	19			0.05	31	0.05	25
		0.17	24					0.0025	29
Nitrobenzol .	34	0.001	19	0.001	10				
		0.0005	19	0.0005	10				
		0.00025	19.5						
		t = 40							
		0.001	24						
Benzonitril. .	26			0.005	25	0.0025	25		
				0.0025	23	0.00125	24		

[1]) Zeitschr. f. phys. Chem. **14**, p. 622. Siehe auch MALMSTRÖM, Zeitschr. f. phys. Chem. **22**, p. 331.

[2]) Zeitschr. f. phys. Chem. **18**, p. 258.

[3]) Bei diesen Versuchen bin ich von Frl. stud. E. MOLIN unterstützt worden, wofür ich ihr zu besonderem Dank verpflichtet bin.

Es zeigt sich, dass die untersuchten Lösungen ein nicht unbedeutendes molekulares Leitvermögen besitzen. Auffallend ist indessen, dass letzteres in Nitrobenzol und Benzonitril nicht mit steigender Verdünnung zu wachsen scheint.

Zum Vergleich führe ich in folgender Tabelle DUTOIT und ASTON's Resultate an, umgerechnet auf die oben benutzten Einheiten.

Tab. II.

Gelöstes Salz.	Lösungsmittel.	Anzahl Liter	Λ	D. E.
$HgCl^2$	Propionitril	64	7.07	(20—30)
		128	(12.0)	
	Methylaethylketon	32	0.754	17.8
$AgNO_3$	Propionitril	128	36.48	(20—30)
		256	41,19	
NaBr	Propionitril	2048	66.17	(20—30)
CdI^2	Propionitril	128	18.0	(20—30)
		256	20.2	
	Aceton	128	12.6	20.7
		256	12.7	
	Methylaethylketon	64	5.91	17.8
	Methylpropylketon	64	2.26	15.2
$CdBr^2$	Propionitril	384	17.2	(20—30)

Für Propionitril konnte in der Litteratur die Dielectricitätskonstante nicht gefunden werden. Indessen ist aus den Angaben für die übrigen Nitrile zu schliessen, dass die Konstante dieses Körpers zwischen 20 u. 30 liegt. Bei dieser Gelegenheit sei überhaupt darauf hingewiesen, dass, ähnlich wie der Gehalt eines Lösungsmittels an gewissen Sauerstoffgruppen, so auch der *Stickstoffgehalt* eine besonders grosse dissociirende Kraft und Dielectricitätskonstante zu bedingen scheint. (Benzonitril, Acetonitril, Propionitril, Cyanessigester, Nitrokörper, Ammoniak.)[1]) Diese Erscheinung ist nach BRÜHL[2]) auf ungesättigte Bindung zurück-

[1]) CARDY, Journ. Phys. Chem. I, p. 707, 1897.
[2]) Zeitschr. f. phys. Chem. 18, p. 514. 1895.

zuführen, und dürfte eine *nicht unwesentliche Stütze der Brühl'schen Hypothese bilden.*

Die Tabelle zeigt, dass alle von DUTOIT und ASTON untersuchten Lösungsmittel eine ziemlich hohe D. E. besitzen. Da dieselben demgemäss nach der NERNST'schen Hypothese beträchtlich dissociiren sollen, so können die Zahlen der beiden Verfasser wenig zur Aufklärung des Einflusses der Polymerisation beitragen.

Nachdem durch die Resultate der Tabelle I Dissociation in nicht associirten Flüssigkeiten nachgewiesen war, habe ich die oben genannten Salze in Buttersäure, Isobuttersäure und Valeriansäure gelöst, und die Leitfähigkeit der Lösungen zu messen versucht.

Es ergab sich das Resultat, dass die molekulare Leitfähigkeit der untersuchten Salze *in den associirten Lösungsmitteln Buttersäure, Isobuttersäure und Valeriansäure kleiner ist als 0,001.*

Die Dielectricitätskonstanten[1]) und Associationsfaktoren der reinen Säuren sind:

	D. E.	Assoc. Fakt.
Buttersäure	2,85	1,58
Isobuttersäure	2,60	1,45
Valeriansäure	2,67	1,36

Es zeigt sich also hier der Zusammenhang zwischen dissociirender Kraft und D. E. Allerdings scheint auch der Einfluss der molekularen Beschaffenheit bedeutend zu sein, was auf eine Verbindung der Jonen mit den Molekülen des Lösungsmittel hinweist.[2])

In vielen Fällen laufen Molekularassociation und dielektrische Leitfähigkeit parallel. Bekanntlich ist ja nach der CLAUSIUS-MOSOTTI'schen Theorie die D. E. eine Function des Molekular-

[1]) Die Dielektricitätskonstanten sind, wie auch alle früher angegebenen der bekannten Arbeit von DRUDE (Zeitschr. f. phys. Chem. **23**, p. 267), die Associationsfaktoren derjenigen von RAMSAY und SHIELDS (Zeitschr. f. phys. Chem. **12**, p. 433) entnommen.

[2]) Siehe hierzu H. EULER, Wied. Ann. **63**, p. 275, und Zeitschr. f. phys. Chem. **25**, p. 541.

volumens, worauf auch mehrfach experimentelle Ergebnisse hingedeutet haben.[1])

Besonders durch die neuesten Messungen der D. E. von DRUDE[2]) und von PHILIP[3]) an Mischungen zweier Flüssigkeiten ist der Einfluss des Molekularzustandes auf die D. E. zweifellos festgestellt. So hat sich z. B. gezeigt, dass die D. E. von Wasser-Alkoholmischungen bedeutend höher liegt, als sich nach der Mischungsregel berechnen lässt, d. h., dass die D. E. der einzelnen Komponenten gewachsen sind, nachdem durch Mischung unter Kontraktion deren Molekularkomplexe sich zum grossen Teil gespalten haben.

Es sei mir gestattet, im Anschluss an Vorstehendes schon jetzt eine Vermutung auszusprechen, deren Richtigkeit bald experimentell geprüft werden soll.

Es handelt sich um die Abweichungen der starken Elektrolyte vom OSTWALD'schen Dissociationsgesetz.

Bekanntlich besteht das Wasser zum grössten Teil aus Doppelmolekülen, von welchen einige, vermutlich sehr wenige, in einfache Moleküle zerfallen sind.

Ausserdem finden sich im Wasser, wie RÖNTGEN[4]) eingehend dargelegt hat, bei niedriger Temperatur höhere Komplexe, »Eismoleküle», welche bei höherer Temperatur allmählich zu verschwinden scheinen.

Nun weist es die ausserordentlich niedrige D. E. des Eises — 3, 2[5]) zwischen 24° bis nahe 0° — darauf hin, dass das Vorhandensein von Eismolekülen die D. E. des Wassers erniedrigt.

Andererseits geht aus dem ganzen Verhalten der Salzlösungen hervor, was besonders TAMMANN[6]) in ausgedehnten Berechnungen zeigt, dass durch das Auflösen des Salzes das Wasser eine Zustandsänderung erleidet, welche einer Steigerung des äusseren

---

[1]) LANDOLT und JAHN, Zeitschr. f. phys. Chem. **10**, p. 000.

[2]) l. c.

[3]) Zeitschr. f. phys. Chem. **24**, p. 18.

[4]) Wied. Ann. **45**, p. 91.

[5]) ABEGG, Wied. Ann. **65**, p. 231.

[6]) Zeitschr. f. phys. Chem. **14**, p. 163, **16**, p. 659, **17**, p. 620, 725, **18**, p. 625.

Druckes entspricht. Es dürfte nicht zweifelhaft sein, dass der wirkliche Grund der korrespondirenden Zustände zwischen Wasser und wässrigen Lösungen daher rührt, dass die Molekularkomplexe des Wassers in beiden Fällen in analoger Weise gespalten werden.[1])

Hieraus ist nach dem vorher bezgl. der D. E. erwähnten zu folgern, dass die D. E. (und damit die dissociirende Kraft) mit steigendem Salzgehalt zunimmt.

Von den experimentellen Ergebnissen über D. E. von Salzlösungen scheint die Mehrzahl die erwähnte Auffassung zu stützen.

Schon COHN[2]) konnte unzweifelhaft ein Steigen der D. E. durch Salzzusatz nachweisen. SMALE[3]) kam auf Grund der electrometrischen Methode zum Resultat, dass die D. E. gut leitender Flüssigkeiten mit steigender Konzentration zunimmt, dass aber die Zunahme der Leitfähigkeit nicht proportional verlaufe. NERNST teilt die mit Hilfe seiner eigenen Methode erhaltenen Werte mit:

$$0{,}005 \ \ KCl\ D = 1{,}03$$
$$0{,}01 \ \ KCl\ D = 1{,}05.$$

(Die Zahlen bedeuten die auf Wasser gleich eins bezogenen Werthe der Dielectricitätskonstanten für 18°).

Nur DRUDE[4]) glaubt nach Versuchen mit etwa hundertmal schnelleren Schwingungen durch directe Wellenlängenbestimmung gefunden zu haben, dass geringer Salzzusatz ohne Einfluss ist.

Erwähnt werde hierzu das von LÖWENHERZ[5]) für Wasser-Alkoholgemische erhaltene Resultat, dass die vierte Wurzel aus der Dissociationskonstante der Dielectricitätskonstante proportional ist, woraus jedenfalls hervorgeht, wenn auch diese Beziehung quantitativ nicht allgemein gültig wäre, dass mit einer *geringen* Änderung der Dielektricitätskonstanten eine *beträchtliche* Änderung der Dissociation verbunden ist.

---

[1]) Siehe auch Zeitschr. f. phys. Chem. **25**, p. 542.
[2]) Wied. Ann. **45**, p. 375.
[3]) Wied. Ann. **60**, p. 625.
[4]) Wied. Ann. **60**, 600.
[5]) Zeitschr. f. phys. Chem. **20**, 282.

Endlich ist noch zu sagen, dass der Einfluss der Temperatur auf die Dielektricitätskonstanten den dargelegten Ansichten nicht widerspricht. Wie aus ABEGG's Messungen hervorgeht, nimmt die Dielektricitätskonstante *aller* untersuchten Stoffe mit steigender Temperatur ab.

Dieser bedeutende, theoretisch übrigens noch nicht behandelte Einfluss muss die durch molekulare Änderungen hervorgerufene Wirkung der Temperatur verdecken.

Jedenfalls nimmt aber beim Wasser die Veränderlichkeit des Molekularzustandes mit dem Salzgehalt bei zunehmender Temperatur ab.

Deswegen sollen neue demnächst anzustellende Leitfähigkeitsversuche zeigen, ob bei höherer Temperatur, — etwa 70° — das OSTWALD'sche Gesetz, das zweifellos auch für die starken Electrolyte gilt, entweder bestätigt werden kann, oder wenigstens eine bedeutende Annäherung an dasselbe erreicht wird.

Die mitgeteilten Versuche sind im physikalischen Institut der Stockholmer Hochschule ausgeführt worden, dessen Vorstande, Herrn Prof. Dr. S. ARRHENIUS ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 9.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Über eine neue Methode hohe Drucke zu messen.

Von Erik Lisell.

(Mitgeteilt den 9 November 1898 durch K. Ångström.)

Bei einer Untersuchung über die Wirkung des Druckes auf den elektrischen Leitungswiderstand von Metalldrähten, die ich auf Anregung des Herrn Prof. K. Ångström während des Frühlings 1898 im Physikalischen Institut zu Upsala ausgeführt habe, bin ich zu einer Druckmessungsmethode gelangt, nach welcher man Drucke bis auf mehrere Tausend Atmosphären sehr bequem und sicher bestimmen kann. Obgleich ich beabsichtige, später eine ausführlichere Beschreibung dieser Untersuchungen zu veröffentlichen, will ich doch jetzt schon die betreffende Methode kurz besprechen.

Bei der obenerwähnten Untersuchung bediente ich mich des Cailletet'schen Apparates zur Herstellung der Drucke und der Wheatstone'schen Brücke zur Messung der Widerstandsänderungen. Da diese sehr klein waren, liess sich die gewöhnliche Nullmethode nicht mit Vorteil verwenden, sondern die Änderungen wurden vermittels der Ablenkungen des Galvanometers, bei stets geschlossenem Strome und geschlossener Galvanometerleitung, gemessen. Da der Widerstand der Metalle bekanntlich mit der Temperatur sehr beträchtlich variiert, und da eine Kompression im Allgemeinen von einer Temperaturerhöhung begleitet wird, so ist es klar, dass dieser Umstand sich in hohem Grade bei der Messung der Widerstandsänderungen bemerkbar machen musste. Bei den gewöhnlichen Metallen Kupfer, Zink u. s. w

und mit Paraffinöl als drückendem Medium konnte sogar die Einwirkung der Temperaturveränderung einen mehrere hundertmal grösseren Betrag erreichen als die Einwirkung des Druckes selbst. Um nur die letztere allein zu erhalten, war es deshalb nötig, die bei der Kompression entwickelte Wärme wenn möglich durch eine besondere Anordnung abzuleiten. Für diese Temperaturausgleichung war jedoch einige Zeit erforderlich, die je nach der Grösse des Druckes zwischen 15 und 30 Minuten variierte. Bei Legierungen mit kleinen Temperaturkoefficienten, besonders Manganin, wurden dagegen die bei der Druckänderung erhaltenen Galvanometerablenkungen nach einem ganz kurzen Zeitraume, einer Minute oder weniger, konstant. Die Ablenkungen erwiesen sich ausserdem, innerhalb der benutzten Druckgrenzen, 1—300 Atmosphären, als proportional den Druckänderungen. Alles deutete darauf hin, dass man sich mit Vorteil der Widerstandsänderungen des Manganins bedienen könnte, um hohe Drucke zu messen, und um diese Frage näher zu ermitteln, wurde die Untersuchung auf Drucke von einigen Tausend Atmosphären ausgedehnt.

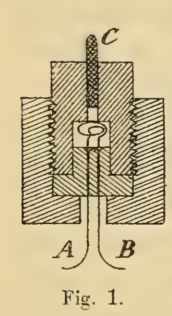


Fig. 1.

Zur Herstellung und Messung der Drucke wurde folgende einfache Anordnung benutzt. Ein Stahlblock (Fig. 1) von ungefähr 8 cm Höhe und 6 cm Durchmesser war aus drei Teilen derartig zusammengesetzt, dass in seiner Mitte ein cylindrischer Raum von 18 mm Durchmesser und 15 mm Höhe gebildet wurde. In diesem Raum befand sich der zu untersuchende Draht, und zwei dickere Manganindrähte A und B, die mittels Maringlu in zwei Durchbohrungen eingekittet und isolirt waren, verbanden ihn mit den übrigen Teilen der WHEATSTONE'schen Brücke. Von oben führte eine vertikale Durchbohrung von ungefähr 6 mm Durchmesser in den Raum hinab, und in diese Durchbohrung war ein Kolben C aus gehärtetem Stahl genau eingeschliffen, so dass sich derselbe mit möglichst geringer Friktion auf und nieder bewegen konnte. Der Hohlraum wurde mit dem

den Druck vermittelnden Stoffe gefüllt, und der Druck wurde, wie es aus Fig. 2 näher ersichtlich ist, durch einen belasteten Hebel A B, der auf den Kolben presste, hervorgerufen. Als drückendes Medium wurde ein *fester* Körper benutzt, und zwar eine Mischung von 70 Proc. weissem Wachs und 30 Proc. Vaselin. Diese Mischung erfüllte ihre Aufgabe auf ganz vorzügliche Weise, und drängte sich nur sehr langsam um den Kolben heraus.

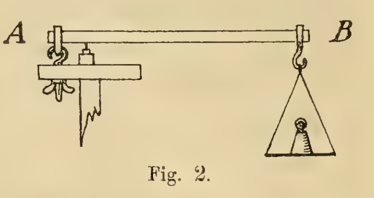


Fig. 2.

Wenn d (0,6095 cm) den Durchmesser des Kolbens, a (4,86 cm) den kürzeren Hebelarm, b (99,89 cm) den längeren Hebelarm, und P die Veränderung der Belastung des Hebels in Kilogrammen bezeichnet, dann beträgt die Druckänderung p, in Atmosphären ausgedrückt:

$$p = \frac{1}{1{,}033} \cdot \frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot P = 68{,}20\ P.$$

Als Versuchsdraht diente ein seidenumsponnener und gefirnisster Manganindraht aus Isabellenhütte bei Dillenburg, Hessen-Nassau;[1]) er war ungefähr 20 cm lang, sein Durchmesser betrug 0,5 mm und sein Widerstand 0,4275 Ohm. Die bei den Druckänderungen erhaltenen Galvanometerablenkungen wurden — weil keine besondere Vorrichtung getroffen worden war, um die bei der Kompression erzeugte Wärme abzuleiten — erst nach Verlauf einiger Zeit konstant; diese Zeit belief sich bei den grössten Belastungen auf ungefähr 4 Minuten, und die Einwirkung der Temperaturänderung betrug etwa 10 Proc. von derjenigen der Druckänderung. Die Ablenkungen des Galvanometers

[1]) Ausser Manganin habe ich auch einige andere Kupfer-Mangan-Legierungen mit niedrigem Temperaturkoefficienten untersucht; diese Legierungen habe ich aus Isabellenhütte kostenfrei erhalten, und ich bediene mich gern dieser Gelegenheit, um den Herren Dr FR. und C. HEUSLER meinen herzlichen Dank auszusprechen für die freundliche Überlassung des Rohmaterials sowie für das gütige Entgegenkommen, das sie mir mit der besonderen Herstellung der Drähte bewiesen haben

waren für eine und dieselbe Belastung dieselben, gleichviel ob eine etwas höhere oder niedrigere Belastung vorausgegangen war. Nur bei den grössten Belastungen zeigte sich ein Unterschied von einem oder zwei Skalenteilen, der wahrscheinlich auf der durch die Deformation des Kolbens entstandenen Friktion beruhte. Nachwirkungen oder permanente Veränderungen konnten selbst bei den grössten Druckänderungen nicht konstatiert werden. Um die Grösse der Widerstandsänderungen in absolutem Masse zu erhalten, wurde in denselben Zweig der Brücke eine konstante Widerstandsänderung von 0,001543 Ohm vermittels eines Nebenschlusses eingeführt und der entsprechende Galvanometerausschlag beobachtet.

Da die Druckänderungen nur durch Belastung bezw. Entlastung des Hebels bewirkt wurden, war der Anfangsdruck nicht gleich einer Atmosphäre, sondern gleich dem durch das eigene Gewicht des Hebels und das der Wagschale verursachten Druck, der sich auf 275 Atmosphären belief. Folgende sieben Belastungen P_1, P_2 . . . . P_7 mit den entsprechenden Druckänderungen p_1, p_2 . . . . p_7 sind benutzt worden:

$P_1 = 8{,}52$ Kg.; $p_1 = 581$ Atm.
$P_2 = 17{,}06$ » ; $p_2 = 1163$ »
$P_3 = 25{,}58$ » ; $p_3 = 1744$ »
$P_4 = 34{,}11$ » ; $p_4 = 2326$ »
$P_5 = 42{,}60$ » ; $p_5 = 2905$ »
$P_6 = 48{,}95$ » ; $p_6 = 3338$ »
$P_7 = 57{,}44$ » ; $p_7 = 3917$ »

Der höchste Druck, der erreicht wurde, war demnach $3917 + 275 = 4192$ Atm.

Die Messungen sind, nach der Zeitfolge geordnet, in der folgenden Tabelle zusammengestellt, wo n den bei der Druckänderung erhaltenen Galvanometerausschlag, α den Ausschlag für eine Widerstandsänderung von 0,001543 Ohm, und P die Belastung des Hebels bedeutet.

P	n	α	$\frac{n}{\alpha P}$
P_1	30,2	84,4	419.10^{-4}
P_2	61,7	84,8	427
P_1	30,9	85,0	427
P_1	31,3	85,9	428
P_2	62,7	85,9	428
P_3	93,5	86,0	425
P_3	94,1	86,0	428
P_4	126,0	86,0	430
P_4	71,1	49,2	424
P_3	39,0	35,7	427
P_3	39,3	36,0	427
P_4	52,1	36,0	424
P_2	63,6	86,2	432
P_1	31,5	86,2	429
P_4	52,8	35,8	432
P_4	52,8	36,0	430

P	n	α	$\frac{n}{\alpha P}$
P_5	65,8	36,0	429
P_5	65,7	36,1	427
P_4	52,0	36,1	422
P_3	39,4	36,0	428
P_6	74,5	35,3	431
P_7	86,7	35,6	424
P_6	73,7	35,6	423
P_1	31,0	85,5	426
P_2	61,7	85,7	422
P_3	92,5	85,9	421
P_1	24,0	66,1	425
P_2	47,8	66,3	423
P_3	71,9	66,6	422
P_4	96,6	66,6	425
P_5	123,2	66,7	434.10^{-4}

Mittel $(426{,}4 \pm 0{,}42).10^{-4}$

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass $\frac{n}{\alpha P}$ für verschiedene Belastungen konstant ist, und dass die Widerstandsänderungen folglich den Druckänderungen proportional sind. Die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Werten ist eine sehr gute; die Abweichungen vom Mittelwert betragen durchschnittlich nur 0,7 Proc. Darin sind jedoch auch die Fehler eingerechnet, die durch den Unterschied zwischen den berechneten und den wirklichen Drucken verursacht sind. Dieser Unterschied dürfte wegen der Schwierigkeit, die Länge des kleineren Hebelarms konstant zu erhalten, im Allgemeinen wenigstens 0,5 Proc. erreichen.

Wird unter Benutzung des gefundenen Mittelwertes von $\frac{n}{\alpha P}$ die relative Widerstandsänderung pro Atmosphäre γ berechnet, so erhält man

$$\gamma = 0{,}000002257.$$

Bei einer zweiten Versuchsreihe, die mit einem anderen Drahte ausgeführt wurde, habe ich

$$\gamma = 0{,}000002261$$

gefunden.

Im Mittel ist also

$$\gamma = 0{,}000002259$$[1])

— ein Wert, der auch zwischen 0 und 275 Atmosphären gilt, wie ich mich durch direkte Versuche überzeugt habe.

In Betreff der Genauigkeit dieses Wertes haben wir oben gefunden, dass der wahrscheinliche Fehler der Quantität $\frac{\alpha}{nP}$ 0,1 Proc. beträgt. Nehmen wir weiter einen konstanten Fehler von 0,3 Proc. in der Länge des kürzeren Hebelarmes als möglich an, und ferner dass der Fehler im Querschnitte des Kolbens gleich 0,1 Proc. und derjenige der Widerstände 0,1 Proc. ist, so wird der totale Fehler des Druckkoefficienten γ demnach höchstens gleich 0,6 Proc.

Die vorliegende Untersuchung dürfte also ergeben, dass die neue Methode zur Messung hoher Drucke gut geeignet ist. Die Genauigkeit der Methode ist natürlich hauptsächlich von der Genauigkeit bedingt, mit welcher die von dem Drucke hervorgerufenen Widerstandsänderungen bestimmt werden. Da man aber die Fehler der Widerstandsänderungen bei einer zweckmässigen Anordnung der WHEATSTONE'schen Brücke beinahe auf die Ablesungsfehler des Galvanometers beschränken kann, so dürften diese im Allgemeinen 0,4 Procent nicht überschreiten. Relative Druckmessungen lassen sich dann ebenfalls mit derselben Genauigkeit ausführen. Bei absoluten Druckmessungen kommt noch der Fehler des Druckkoefficienten γ hinzu, welcher sich bei dem oben gefundenen Wert auf höchstens 0,6 proc. belief. Dieser Fehler kann selbstverständlich noch verkleinert wer-

---

[1]) Ich mache den Leser auf das eigentümliche Vorzeichen von γ aufmerksam. Bei allen von mir untersuchten reinen Metallen habe ich, in Übereinstimmung mit den älteren Resultaten von CHWOLSON, gefunden, dass γ negativ ist, also dass der Widerstand mit dem Drucke vermindert wird; bei den Legierungen mit niedrigem elektrischem Temperaturkoefficienten habe ich aber γ positiv gefunden.

den. Auch bei Benutzung dieses Wertes[1]) wird jedoch der totale Fehler der Druckangaben nicht grösser als höchstens 1 Proc.; übrigens ist die relative Genauigkeit der Methode auch von der Grösse des Druckes abhängig, jedoch dergestalt, dass sie mit dem Drucke zunimmt.

Die neue Methode lässt sich also kurz folgendermassen charakterisieren:

1. Das Princip der Methode besteht in der Anwendung der Änderung des Leitungswiderstandes unter Einwirkung des Druckes bei einer Legierung, deren Temperaturkoefficient = 0 ist (Manganin), und deren Widerstand also von der die Druckänderung begleitenden Temperaturveränderung nicht beeinflusst wird.

2. Das Verhältniss des Druckes zum Widerstand ist ein sehr einfaches, indem der Widerstand — jedenfalls bis zu einem Drucke von 4200 Atmosphären — eine lineare Funktion des Druckes ist.

3. Wenn man die Messung der Widerstandsänderungen mit Hülfe der Galvanometerausschläge in der WHEATSTONE'schen Brücke ausführt, lassen sich Drucke von 50 bis mindestens 4200 Atmosphären wenigstens bis auf 1 Proc. bestimmen.

4. Die Methode besitzt ausserdem die rein praktischen Vorteile, dass der die Druckmessung vermittelnde Draht nur einen sehr beschränkten Raum erfordert, dass man die Empfindlichkeit bequem und in bedeutendem Grade verändern kann, und dass für die Anwendung der Methode kein anderes Instrument als das Galvanometer erforderlich ist.

Schliesslich sei es mir gestattet, Herrn Professor K. ÅNGSTRÖM für die grosse Bereitwilligkeit, mit welcher er mir die erforderlichen Instrumente und Apparate zur Verfügung gestellt hat, und zugleich auch für seine mir bei dieser Arbeit durch Rat und That gewährte Unterstützung meinen wärmsten Dank auszusprechen.

[1]) Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass der hier gefundene Wert von γ, streng genommen, nur für die untersuchte Drahtsorte gültig ist.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 688.)

Wien. *K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. N. F. Bd. 31 (1894); 34 (1897). 4:o.

Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 43 (1898): H. 2—3. 8:o.

— *Schweizerische geodätische Kommission.*
Das Schweizerische Dreiecknetz. Bd. 8. 1898. 4:o.

Af Utgifvarne:

Svensk kemisk tidskrift, utg. af Å. G. EKSTRAND. Årg. 10(1898): N:o 5—6. Sthlm. 8:o.

Tidskrift för skogshushållning, utg. af C. G. HOLMERZ. Årg. 26 (1898): N:o 4. Sthlm. 8:o.

Annaes de sciencias naturaes, publ. por AUG. NOBRE. Anno 5 (1898): 1—3. Porto 8:o.

Af författarne:

AGARDH, J. G., Species genera et ordines Algarum, seu descriptiones succinctæ specierum generum et ordinum, quibus algarum regnum constituitur. Lundæ 1898. 8:o.

ENESTRÖM, G., Über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen. Lpz. 1898. 8:o.

HILDEBRANDSSON, H. H., Études internationales des nuages 1896—97. Observations et mesures de la Suède. Upsala 1898. 8:o.

KROK, T. O. B. N., Svensk botanisk literatur 1897. Lund 1898. 8:o.

ALBERT IER, Prince Souverain de Monaco, Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fasc. 12. Monaco 1898. 8:o.

HJELT, EDV., Chemie der fünfgliedrigen heterocyklischen Systeme von J. W. Brühl in Gemeinsch. mit Edv. Hjelt und O. Aschan. Braunschweig 1898. 8:o.

KÖRÖSY, J. VON, Die Hauptstadt Budapest im Jahre 1891. Resultate der Volksbeschreibung und Volkszählung. Berlin 1898. 8:o.

— Die Sterblichkeit der Haupt- und Residenzstadt Budapest in den Jahren 1886—90. Berlin 1898. 8:o.

— Resultate der am 15. Nov. 1896 durchgef. Conscription d. Bevölkerung Budapest's. Berlin 1898. 8:o.

— Bauthätigkeit in Budapest in den Jahren 1885—95. Berlin 1898. 8:o.

— Die Natalitäts- und Mortalitäts-Verhältnisse Ungarischer Städte in den Jahren 1878—95. Bearb. von J. von Körösy und G. Thirring. Budapest & Berlin 1897. 8:o.

LUCAS, FRED. W., The annals of the voyages of the brothers Nicolo and Antonio Zeno in the North Atlantic about the end of the 14th century and the claim founded thereon to a Venetian Discovery of America. London 1898. 4:o.

LIVERSIDGE, A., Address at the 7th session of the Australasian Association for the advancement of Science. Sydney 1898. 8:o.

PERNTER, J. M., Neues über den Regenbogen. Wien 1898. 8:o.

Stockholm 1899. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 55. 1898. № 10.

Onsdagen den 14 December.

INNEHÅLL:

Herr HASSELBERG öfverlemnade för införande i Akademiens skrifter en af honom författad afhandling med titel: »Untersuchungen über die Spectra der Metalle im electrischen Flammenbogen. V. Spectrum des Vanads», och redogjorde för de undersökningar, som legat till grund för densamma.

Herr THÉEL meddelade förklaringar öfver hörselorganen hos evertebrerade djur och öfver deras funktioner.

Friherre NORDENSKIÖLD öfverlemnade en uppsats af Amanuensen vid Upsala observatorium T. RUBIN med titel: »Meteoren den 25 November 1897», till grund för hvilken lågo meddelanden, som, efter i de allmänna tidningarne gjord uppmaning, erhållits från omkring 200 iakttagare af detta fenomen.

Årsräntan af *Wallmarkska* donationsfonden beslöt Akademien låta fördela i två lika delar, af hvilka den ena delen anvisades åt Professor T. R. THALÉN såsom belöning för hans i Kongl. Vetenskaps-societetens i Upsala Acta offentliggjorda afhandling: »Sur la détermination absolue des longueurs d'onde de quelques raies du spectre solaire», och den andra delen åt Filos. Doktor K. G. OLSSON såsom understöd för räknebiträdes anlitande vid beräknande af gruppstöringar för de s. k. småplaneter, som hafva stora banexcentriciteter och lutningar, med hvilket arbete Dr. OLSSON sedan längre tid är sysselsatt.

Det *Beskowska stipendiet* tilldelade Akademien Medicine Licentiaten ERNST LANDERGREN för fortsättande vid Karolinska Institutets fysiologiska laboratorium af redan planlagda näringsfysiologiska undersökningar rörande menniskans minimala ägghviteomsättning.

Den *Edlundska belöningen* för året fann Akademien icke anledning att utdela, utan skulle, jemlikt donationsbrefvets föreskrift, årets ränta läggas till kapitalet.

Till ledamot af Stockholms Högskolas Styrelse utsågs genom val Professor A. E. TÖRNEBOHM.

På tillstyrkan af komiterade antogos till införande i Akademiens skrifter följande afhandlingar, nämligen:

dels i Akademiens Handlingar: förutnämnda afhandling af Professor B. HASSELBERG;

dels i Bihanget till Handlingarne: 1:o) »Notes on the Fishes collected during the Swedish Expedition to Spitzbergen and King Charles Land 1898 under the Direction of Professor A. G. NATHORST», af Docenten E. LÖNNBERG; 2:o) »Ueber tropische und subtropische Süsswasser-Chlorophyceen», af Fil. Doktor O. BORGE; 3:o) »Ueber Chlorosaccus, eine Gattung der Süsswasser-Algen» af Studeranden A. LUTHER;

dels i Öfversigten af Akademiens Förhandlingar de i innehållsförteckningen angifna fem afhandlingar.

Följande skänker anmäldes:

Till Akademiens Bibliotek.

Af H. MAJ:T KONUNGEN.

HABER, L., Beitrag zur Kenntnis einiger seltener Erden. Wien 28/9 1898. (Handskr. i praktbd.). Fol.

Exploration internationale des régions polaires 1882—83 et 1883—84. Expédition polaire Finlandaise. Hfors 1886. 4:o.

Stockholm. *Kongl. Civildepartementet.*

Komitébetänkanden, utlåtanden m. m. 35 st.

Kartor. 6 st.

— *Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiela statistik. 2 häften. 4:o.

— *Generalstaben.*

Karta öfver Sverige, 1 : 100,000. Bl. 90.

Norrbottens läns kartverk, 1 : 200,000. Bl. 41.

— *Generalstabens Litografiska Anstalt.*

Postkarta öfver Sverige. 1 : 800,000.

— *Svenska sällskapet för antropologi och geografi.*

Ymer. 1898: H. 3. 8:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. 1898: N:o 10—11. 8:o.

Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*

Handlingar. 1898: H. 2. 8:o.

Upsala. *Meteorologiska observatoriet.*

Études internationales des nuages 1896—97. Observations et mesures de la Suède. 1—2. 1898. 4:o.

Aachen. *Meteorologische Station.*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an der Station 1. Ordnung Aachen u. deren Nebenstationen im Jahre 1897. 4:o.

Basel. *Schweizerische Landesbibliothek.*

Jahresbericht 1(1895)—3(1897). 8:o.

Die Stadt Basel und ihre Umgebung. Basel 1898. 8:o.

Bergen. *Museum.*

SARS, G. O., An account of the Crustacea of Norway. Vol. 2: P. 11—12. 1898. 8:o.

Berlin. *K. Preussisches Meteorologisches Institut.*

Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam. 1892: H. 2; 1893: 2. 4:o.

— *K. botanischer Garten und Museum.*

Notizblatt. N:o 15. 1898. 8:o.

— *Deutsche geologische Gesellschaft.*

Zeitschrift. Bd 50 (1898): H. 2. 8:o.

— *Physikalische Gesellschaft.*

Verhandlungen. Jahrg. 17 (1898): N:o 9. 8:o.

Bern. *Departement des Innern, Abth. Bauwesen. — Département fédéral de l'Intérieur, Section des travaux publics.*

Graphische Darstellung der schweizerischen hydrometrischen Beobachtungen. 1897: 1—17. Fol.

Tableau graphique des observations hydrométriques Suisses. 1897: 1—17. Fol.

Graphische Darstellung der Lufttemperaturen und der Niederschlagshöhen. 1896: 1—3. Fol.

Tableau graphique des températures de l'air et des hauteurs pluviales. 1896: 1—3. Fol.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Bulletin. (3) T. 36 (1898): N:o 9—10. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*

Anales. T. 46 (1898): Entr. 3—4. 8:o.

Buitenzorg. *Jardin Botanique.*

Annales. Vol. 15: P. 2. 1898. 8:o.

SCHIFFNER, V., Conspectus hepaticarum Archipelagi Indici. Batavia 1898. 8:o.

Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*

Atti. (4) Vol. 11 (1898). 4:o.

Bollettino delle sedute. N. S. Fasc. 53—54. 1898. 8:o.

Chambésy. *Herbier Boissier.*

Bulletin. T. 6 (1898): N:o 11. 8:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Das Klima des Königreiches Sachsen. H. 5. 1898. 4:o.

Abhandlungen. H. 3. 1898. 4:o.

Córdoba. *Oficina meteorológica Argentina.*

Anales. T. 12. 1898. 4:o.

Dorpat. *Meteorologisches Observatorium der Universität.*

Meteorologische Beobachtungen. 1896: 1—3; 1898: 8—9. 8:o.

Dresden. *K. Sächsisches statistisches Bureau.*

Zeitschrift. Jahrg. 44 (1898): H. 3—4. 4:o.

Genova. *Musei di zoologia e anatomia comparata della R. Università.*

Bollettino. 1898: 62—66. 8:o.

— *Società Ligustica di scienze naturali e geografiche.*

Atti. Vol. 9 (1898): N:o 3. 8:o.

Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*

Mittheilungen. 34 (1897). 8:o

Harlem. *Teyler's Godgeleerd Genootschap.*

Verhandelingen. N. S. D. 16. 1898. 8:o.

— *Musée Teyler.*

Archives. (2) Vol. 6: P. 2. 1898. 8:o.

Heidelberg. *Universitäts-bibliothek.*

Dissertationer. 1897/98. 134 st. 8:o.

Innsbruck. *Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg.*

Zeitschrift. (3) H. 42. 1898. 8:o.

Jekaterinburg. *Société Ouralienne d'amateurs des sciences naturelles.*

Bulletin. T. 15: Livr. 2; 16: 2; 17: 1—2; 19: 1. 1895—97. 8:o & Fol.

Kazan. *Kejserl. universitetet.*

Učenija zapiski. T. 65 (1898): N:o 4—9. 8:o.

Dissertationer. 5 st. 8:o.

(Forts. å sid. 760.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 10.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Quantitative Bestimmungen über die Zerstäubung der Kathode in verdünnter Luft.

Von G. GRANQVIST.

[Mitgeteilt den 14 December 1898 durch K. ÅNGSTRÖM.]

In einem früheren Aufsatze[1]) habe ich einige Versuche mitgeteilt über die Ursache der Zerstäubung der Kathode in verdünnter Luft, wenn sie von einem elektrischen Strome durchflossen wird. Meine Versuche führten zu dem Ergebniss, dass diese Zerstäubung wahrscheinlich nicht als eine gewöhnliche Vergasung der Kathode infolge der hohen Temperatur und des kleinen Druckes um sie her aufgefasst werden könnte, welche Meinung früher von HITTORF[2]), WÄCHTER[3]) und E. WIEDEMANN[4]) aufgestellt worden ist. Auch jene von BERLINER[5]) ausgesprochene Vermutung, dass das Zerstäuben durch das von der Kathode entweichende occludierte Gas verursacht würde, wird durch meine Versuche nicht gestützt.

Eine nähere Untersuchung der Ursache der Kathodenzerstäubung erheischt jedoch eine quantitative Bestimmung des Gewichtsverlustes, den die Kathode unter verschiedenen äusseren Verhältnissen erleidet. Solche quantitativen Bestimmungen konnten bei meinen früheren Versuchen nicht gemacht werden, weil ich damals ein Induktorium als Stromquelle verwendete. Nachdem

---

[1]) GRANQVIST, Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1897, N:o 10, pag. 575.
[2]) HITTORF, Wied. Ann. 21, pag. 126, 1884.
[3]) WÄCHTER, Wied. Ann. 17, pag. 903, 1882.
[4]) E. WIEDEMANN, Wied. Ann. 20, pag. 795, 1883.
[5]) BERLINER, Wied. Ann. 33, pag. 289, 1888.

aber inzwischen in dem hiesigen physikalischen Institute eine grössere Hochspannungsbatterie von 1200 Zellen mir gütigst zur Verfügung gestellt wurde, habe ich den Gewichtsverlust bestimmt, den die Kathode bei verschiedenen äusseren Verhältnissen erlitt. Nachstehend verzeichne ich die Ergebnisse dieser Versuche.

I. Experimentale Anordnung.

Bei meinen früheren Untersuchungen über die durch die Zerstäubung der Kathode gewonnenen Metallschichten habe ich ermittelt, dass sowohl die Stromstärke, als der Druck die Schnelligkeit, mit welcher die Kathode zerstäubt, beeinflusst. Je intensiver die Stromstärke, je rascher die Unterbrechungen in der primären Strombahn von statten gingen, desto schneller wurden Metallschichten erzielt. Bei einem Druck von etwa 10 mm wurden nur dann Metallschichten gewonnen, wenn die Kathode der Wand des Entladungsrohres sehr nahe stand, oder wenn eine Glasplatte sehr nahe an die Kathode gestellt wurde. Bei geringerem Drucke zerstäubte die Kathode bedeutend schneller, und bei etwa 1 mm Druck erhielt man die regelmässigsten Metallschichten.

Es erhellt hieraus, dass der Gewichtsverlust, welchen die Kathode erleidet, teils von dem Druck, teils von der Stromstärke und vielleicht auch von der Stärke des elektrostatischen Feldes um die Kathode her abhängig sein muss. Um diese Verhältnisse näher zu studieren, habe ich mich folgender Anordnung bedient.

In Fig. 1, einer schematischen Darstellung der Anordnung, bezeichnet A die Hochspannungsbatterie, G ein Galvanometer, R zwei Flüssigkeitswiderstände und s einen Stromunterbrecher; U ist das verwendete Entladungsrohr; E und i sind ein Elektrometer und eine Quecksilberwippe.

Die Akkumulatorenbatterie bestand aus 1200 Elementen und stammt von KLINGELFUSS (Basel). Ihre Kapacität ist zwischen 30 und 40 Milliampèrestunden und der grösste statthafte

Entladungsstrom 5 Milliampère. Während des Versuches hat sie die ganze Zeit einwandsfrei fungiert.

Um die Stromstärke zu variieren, bediente ich mich zweier Flüssigkeitsrheostate R, welche aus Glasröhren bestanden, die eine Lösung von Jodkadmium in Amylalkohol und bewegliche Kadmiumelektroden enthielten. Die Stromintensität wurde vermittelst eines d'Arsonval'schen Galvanometers bestimmt, und dessen Ausschlag in gewöhnlicher Weise, mit Hülfe von Spiegel, Fernrohr und Skala abgelesen. Vor dem Galvanometer war ein geeigneter Nebenschluss eingeschaltet. Die Konstante des Galvanometers wurde bei eingeschaltetem Nebenschluss bestimmt, und

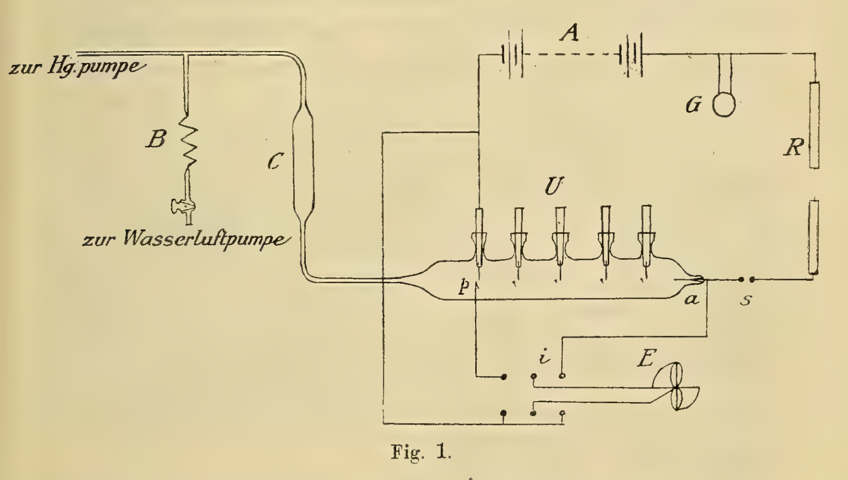


Fig. 1.

zwar war ein Skalenteil = 0,123 Milliampère. Die grössten Ausschläge, welche während der Versuche vorkamen, betrugen 35 Skalenteile. Man darf wohl, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen, annehmen, dass innerhalb dieser Grenzen Proportionalität zwischen Stromstärke und Ausschlag besteht.

Das Entladungsrohr war 20 cm lang und mass im Durchmesser 3,5 cm. Es war, wie aus der Figur ersichtlich, mit 5 Tuben versehen, in welche Glasröhren eingeschliffen waren. An diesen Glasröhren waren die Kathoden befestigt. Da diese vor und nach der Behandlung gewogen werden mussten, und es demnach nötig war, dass sie leicht befestigt und entfernt werden

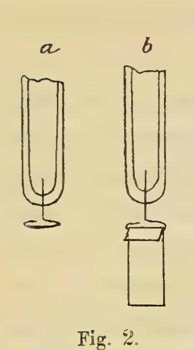


Fig. 2.

konnten, war die folgende Vorrichtung getroffen. In das untere Ende der Glasröhren wurde ein auf die aus Fig. 2 ersichtliche Weise gebogener Platinadraht eingeschmolzen. Die Kathoden, welche aus dünnen Metallplatten von verschiedenen Dimensionen bestanden, waren am oberen Rande gebogen und konnten so in die Öse eingehakt und dort vermittels einer Pincette festgeklemmt werden. Fig. 2 b veranschaulicht eine solche gebührlich befestigte Kathode.

Nachstehend werden die einzelnen Kathoden mit 1, 2, 3, 4 und 5 bezeichnet. Die der in Fig. 1 mit *a* bezeichneten Anode zunächst gelegene Kathode trägt also die Ziffer 1, und die entfernteste die Ziffer 5.

In die Kathodenröhren wurde Quecksilber gegossen, um den Übergang des elektrischen Stromes in die Kathode zu vermitteln. Natürlich wurde bei den Versuchen jedesmal nur eine Metallplatte als Kathode verwendet. Die Fig. 1 stellt demgemäss die Schaltung dar, wenn die Kathode 5 verwendet wurde. Mit dem Entladungsrohr liessen sich demnach 5 Beobachtungen über den Gewichtsverlust der Kathoden bewerkstelligen, ohne dass in jeder Versuchsserie die Luft aus dem Entladungsrohre herausgepumpt zu werden brauchte.

Die Kathoden bestanden, wie vorhin erwähnt worden, aus dünnen Metallblechen. Bei den ersten orientierenden Versuchen waren ihre Flächen in rechtem Winkel gegen die Achse des Rohres gestellt. Dabei erwies es sich aber, dass bei sehr geringem Drucke die der Kathode zunächst gelegenen Metallbleche mit Metallpartikelchen überzogen wurden, obschon in recht geringem Masse, wodurch aber immerhin ihr Gewicht etwas vermehrt wurde. Wenn dagegen die Flächen der Kathoden zur Rohrachse parallel standen, konnte dergleichen nicht beobachtet werden. In den späteren Observationen wurden deshalb die Kathodenflächen stets parallel zur Rohrachse gestellt.

Bei den nachstehenden Versuchen wurde der Gewichtsverlust der Kathode in der Luft bestimmt. Die grösste Schwierigkeit war dabei, während der Versuche den Druck des Gases konstant zu erhalten. Um wägbare Mengen der Kathode zu zerstäuben war es nämlich notwendig, den Strom bei jedem Versuche während einer längeren Dauer, gewöhnlich 50 Min., durch das Entladungsrohr gehen zu lassen. Im allgemeinen wuchs der Druck am Anfang des Versuches etwas, nahm aber dann recht beträchtlich ab. Die Steigerung des Druckes beruhte teils auf der Steigerung der Temperatur im Entladungsrohre, teils darauf, dass occludiertes Gas sich von der Kathode frei machte. BERLINER hat nachgewiesen, dass die Menge occludierten Gases, welche ein Metall aufzunehmen im stande ist, unter günstigen Bedingungen bis das 20-fache des Metallvolumens betragen kann. Da aber bei der Mehrzahl dieser Versuche diese Druckänderung, welche sich auf 0,05 mm belaufen haben dürfte, recht gering war und überdies nur wenige Minuten dauerte, wurde eine besondere Vorrichtung behufs deren Kompensation nicht als nötig erachtet.

Bezüglich der während des Verlaufes der Versuche stattfindenden Druckverminderung lag jedoch die Sache ganz anders. Bei geringem Druck und grosser Stromstärke nahm der Druck sehr schnell ab. Er konnte beispielsweise bei einem Versuche in 5 Minuten von 0,6 mm auf 0,1 mm heruntergehen. Demnach war irgend eine Anordnung von nöten, um den Druck während jedes Versuches konstant zu erhalten. Zu diesem Zwecke verfuhr ich folgendermassen.

In Fig. 1 bezeichnet B eine Spirale, aus einer etwa 0,5 m langen, feinen Kapillarröhre bestehend. Ihr Ende war an die Glasröhre angeschmolzen, welches das Entladungsrohr mit der Quecksilberpumpe vereinigte; das andere, mit einem Hahn versehene Ende stand mit einem Behälter in Verbindung, der seinerseits mit einer Wasserluftpumpe verbunden war.

Um die Druckverminderung im Entladungsrohre auszugleichen, wurde der Hahn geöffnet und folglich durch die Ka-

pillarröhre Luft vom Behälter in das Entladungsrohr eingelassen. Die auf solche Weise für jede Zeiteinheit in das Entladungsrohr eindringende Luftmenge hängt ausser von dem Durchmesser der Kapillarröhre von der Differenz des Druckes im Behälter und im Entladungsrohr ab. Indem ich den Druck im Behälter änderte, erreichte ich nach einiger Übung, dass der Druck im Entladungsrohr während eines Versuches keine grössere Schwankung zeigte, als 0,03 mm. Da die eindringende Luft natürlich feucht war, wurde ein Trockenrohr C, das Phosphorsäureanhydrid enthielt, vor dem Entladungsrohr eingeschaltet.

Diese Versuche bezweckten u. a. auch zu ermitteln, ob die Zerstäubung der Kathode irgendwie von der Stärke des elektrostatischen Feldes zwischen der Kathode und den dem Entladungsrohre zunächst gelegenen Wänden abhängig war. Zu dem Zwecke war in die Rohrwand vor jeder Kathode ein Platindraht eingeschmolzen worden. In Fig. 1 sind diese Drähte mit p bezeichnet. Mit Hülfe des Elektrometers E und des Umschalters i konnte dann in der aus der Figur erkennbaren Weise die Potentialdifferenz teils zwischen der Kathode und dem nächstgelegenen Teile der Wand des Entladungsrohres, teils zwischen der Kathode und der Anode bestimmt werden. Die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der Anode wurde bei jedem Versuche ab und zu beobachtet, hauptsächlich um zu kontrollieren, ob Druckänderung eingetreten. Wenn der Druck abnahm, wurde bei den nachstehenden Versuchen die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der Anode grösser; umgekehrt nahm die Potentialdifferenz mit der Steigerung des Druckes ab.

Das Elektrometer war von der Konstruktion des Lord Kelvin mit vertikaler Nadel. Es ist mit einer empirisch gradierten Skala versehen, deren einzelnen Teilen je 50 Volt entsprechen. Ich hatte diese Skala mit Hülfe der Akkumulatorenbatterie untersucht und eine Tabelle für die Korrektionen aufgestellt.

Um den Druck im Entladungsrohr zu bestimmen, wurde ein Mac Leod'sches Manometer verwendet. Einem Druck im

Entladungsrohr von 1 mm entsprach im Manometer eine Druckdifferenz von 12,836 mm.

II. Einwirkung der Stromstärke und des Druckes auf den Gewichtsverlust der Kathode.

1. Da im voraus anzunehmen war, dass Kathoden mit verschiedenen Dimensionen unter sonst gleichen äusseren Verhältnissen in Bezug auf den Gewichtsverlust abweichende Ergebnisse liefern würden, führte ich zunächst eine Reihe von Bestimmungen des Gewichtsverlustes bei Platinkathoden mit verschiedenen Dimensionen, aber bei gleicher Stromstärke und gleichem Druck aus.

In der Tabelle I, welche diese Beobachtungen enthält, bezeichnet i die Stromstärke in Skalenteilchen, p den Druck in mm, T die Zeitdauer des das Entladungsrohr durchfliessenden Stromes in Minuten und V die in Volt ausgedrückte Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der Rohrwand.

Die für diese Versuche gewählten Kathoden waren aus einem 0,06 mm dicken Platinbleche ausgeschnitten. Die letzte Kolumne liefert deren Längen- und Breitenangaben.

Tabelle I.

$i = 20$ Skalenteile; $p = 0{,}38$ mm; $T = 30$ Min.

Kathode N:o	V	Gewicht der Kathode vor der Behandlung in gr.	Gewichtsverlust in mgr.	Länge und Breite der Kathode in mm.
1	600	0,1122	1,5	7 × 12
2	825	0,0775	3,0	4,8 × 12
3	1,075	0,0495	4,3	4,8 × 7,0
4	1,300	0,0223	5,5	4,8 × 3,5

Die obigen Beobachtungen ergeben demnach, dass der Gewichtsverlust bei Kathoden mit kleineren Dimensionen erheblich

grösser ist, als bei Kathoden mit grösseren Dimensionen. Es erwies sich daher als notwendig, bei den späteren Untersuchungen, wo der Gewichtsverlust bei verschiedenem Druck und verschiedener Stromstärke bestimmt werden sollte, Kathoden mit möglichst gleichen Dimensionen zu verwenden.

Es sollte vielleicht nicht unerwähnt bleiben, dass der Gewichtsverlust ohne Rücksicht darauf, an welcher Kathodenröhre die Kathode befestigt wurde, stets der gleiche blieb. Der Gewichtsverlust ist demnach von der Entfernung zwischen der Kathode und der Anode unabhängig.

Aus den Untersuchungen HITTORFS[1]) erhellt, dass das Kathodengefälle mit der Vergrösserung der Kathodendimensionen vermindert wird; aus den Beobachtungen in Tab. I ersehen wir, dass auch die Stärke des elektrostatischen Feldes zwischen der Kathode und den Wänden des Entladungsrohres mit der Zunahme der Kathodendimensionen abnimmt.

2. Um den Einfluss der Stromstärke auf die Zerstäubung der Kathode zu untersuchen, wurde der Gewichtsverlust bei Platin- und Goldkathoden unter konstantem Druck, aber verschiedener Stromstärke bestimmt.

Die Tabellen II a und II b enthalten die an Platinkathoden, die Tabelle III die an Goldkathoden angestellten Versuche. In diesen Tabellen ist das Gewicht der Kathode in gr vor der Behandlung mit P, und der Gewichtsverlust in mgr mit ΔP bezeichnet. Im übrigen haben die Bezeichnungen dieselbe Bedeutung wie in Tab. I. Sowohl bei diesen wie bei den folgenden Versuchen waren die Kathoden, gleichviel aus welchem Material, 12 mm lang, 4,8 mm breit und 0,06 mm dick.

Aus den Tabellen erhellt, dass der Gewichtsverlust nahezu dem Quadrat der Stromstärke proportional ist. Das Verhältniss $\frac{\Delta P}{i^2}$, welches in der letzten Kolumne vorgeführt ist, wächst allerdings ein wenig mit der Stromstärke.

[1]) HITTORF, Pogg. Ann. 136, pag. 1 u. 197, 1869.

Tabelle II a.

Platinkathode; $T = 30$ Min.; $p = 0{,}54$ mm.

Kathode N:o	i	V	P	ΔP	$\frac{\Delta P}{i^2}$
4	10	485	0,0876	0,4	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$
1	15	645	735	1,25	5,6
5	20	835	760	2,0	5,0
2	25	920	835	4,0	6,4
3	30	945	782	5,6	6,2

Tabelle II b.

Platinkathode; $T = 50$ Min.; $p = 0{,}95$ mm.

Kathode N:o	i	V	P	ΔP	$\frac{\Delta P}{i^2}$
3	13	325	0,0920	0,6	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
2	23	515	900	2,3	4,3
4	23	580	996	2,5	4,7
1	35	625	880	5,4	4,4
5	35	630	835	5,9	4,8

Tabelle III.

Goldkathode; $T = 60$ Min.

p mm.	Kathode N:o	i	V	P	ΔP	$\frac{\Delta P}{i^2}$
0,55	2	11	500	0,0775	1,0	$8{,}3 \cdot 10^{-3}$
»	3	20	650	910	3,9	9,8
0,39	4	30	825	0,0815	15,2	$17{,}0 \cdot 10^{-3}$
»	5	30	725	820	13,6	15,0
»	5	20	625	875	6,5	16,0

3. Tab. IV—VII enthalten die über den Gewichtsverlust bei verschiedenem Drucke angestellten Beobachtungen. Für diese Versuche wurden Kathoden aus Platin, Gold, Silber und Kupfer verwendet. Ich machte auch Versuche, den Gewichtsverlust bei Eisenkathoden zu bestimmen, erzielte jedoch kein verwertbares Ergebniss. Der Grund hiervon war teils der höchst unbedeutende Gewichtsverlust der Eisenkathoden, teils aber die leicht eintretende Oxydation der Kathoden, welche mitunter nach der Behandlung gar mehr wogen, als vorher.

Im allgemeinen wurden bei diesen Versuchen die Quantitäten i, V und p jede 5:te Minute beobachtet, und dann die Mittelwerte berechnet. Bei den Versuchen mit Platin-, Gold- und Silberkathoden variierte die Stromstärke zwischen 19 und 23 Skalenteilchen. In der Kolumne unter $\Delta P_{\text{red.}}$ ist der Gewichtsverlust für den Fall, wo die Kathode 60 Minuten mit einer Stromstärke von 20 Skalenteilchen, 2,46 Milliampère entsprechend, behandelt wurde, verzeichnet. Dabei wurde vorausgesetzt, dass der Gewichtsverlust dem Quadrat der Stromstärke proportional berechnet werden konnte. Demgemäss war die benutzte Formel

$$\Delta P_{\text{red.}} = \frac{\Delta P}{T i^2} \cdot 60 \cdot 20^2 \text{ mgr.}$$

Tabelle IV.

Platinkathode.

Kathode N:o	i	V	P	ΔP	T	p	$\Delta P_{\text{red.}}$
3	20,5	1,330	0,0868	8,6	40	0,17	12,0
1	19	1,265	826	2,6	17	0.20	10,2
1	21	985	800	6,5	40	0,23	8,8
2	21	835	876	4,15	40	0,38	5,6
5	20	835	760	2,0	30	0,54	4,0
2	23	515	900	2,3	50	0,95	2,1
4	23	580	996	2,5	50	0,95	2,3
5	21	555	771	1,1	40	1,01	1,5
2	22	150	877	0,05	50	1,79	0,05

Tabelle V.

Goldkathode.

Kathode N:o	i	V	P	ΔP	T	p	$\Delta P_{red.}$
3	19	950	0,0860	7,0	30	0,20	15,5
5	20	1,050	860	8,0	30	0,23	16,0
4	20	865	940	5,2	32	0,27	9,8
2	20	787	810	5,6	60	0,35	5,6
5	20	625	875	3,4	30	0,39	6,8
5	20	620	875	6,5	60	0,39	6,5
3	20	605	910	3,9	60	0,55	3,9
3	20	400	835	2,7	52	0,62	3,1
4	20	325	940	0,3	61	1,17	0,3
1	20	—	760	0,0	60	1,32	0,0

Tabelle VI.

Silberkathode.

Kathode N:o	i	V	P	ΔP	T	p	$\Delta P_{red.}$
1	20	1,050	0,0345	4,4	30	0,13	8,8
3	20	755	355	4,1	60	0,21	4,1
2	20	700	395	1,9	30	0,23	3,8
2	20,5	625	390	2,8	60	0,31	2,7
5	20	500	390	1,2	58	0,43	1,2
4	20	612	395	0,5	34	0,48	0,9
1	19	487	395	0,7	60	0,51	0,8
2	19	500	400	0,8	60	0,55	0,9
3	19,5	625	400	0,9	56	0,55	1,0
1	21	175	400	0,2	60	1,32	0,2
5	20	250	390	0,1	60	1,56	0,1

Tabelle VII.

Kupferkathode.

Kathode N:o	i	V	P	ΔP	T	p	$\Delta P_{red.}$
1	15	1,410	0,0295	2,4	50	0,20	5,1
3	28	1,130	305	4,4	60	0,31	2,2
4	28	1,150	300	3,6	60	0,47	1,8
5	10	590	342	1,8	145	0,47	1,5
2	28	525	305	0,7	60	1,01	0,4

In Tab. VII finden sich die mit kupfernen Kathoden angestellten Beobachtungen. Um den Gewichtsverlust bei diesen Kathoden mit dem der anderen Kathoden vergleichen zu können, wurde auch hier unter der Rubrik $\Delta P_{red.}$ der Gewichtsverlust mit Hülfe der obigen Formel für den Fall berechnet, wo die Kathode 60 Minuten lang mit einer 20 Skalenteilchen entsprechenden Stromstärke behandelt wurde. Da aber hier sehr verschiedene Stromintensitäten vorliegen, möchte ich es doch dahingestellt sein lassen, ob man auch hier berechtigt ist, zwischen dem Gewichtsverlust und dem Quadrat der Stromstärke völlige Proportionalität anzunehmen.

In Fig. 3 sind die auf solche Weise berechneten Gewichtsverlustzahlen längs der Ordinatenachse und der Druck längs der Abscissenachse abgetragen worden.

Aus diesen Kurven erhellt, dass der Gewichtsverlust mit abnehmendem Drucke rasch zunimmt. Bei einem geringeren Drucke als 0,6 mm scheint Gold leichter als die anderen Metalle zu zerstäuben, dann Platin und schliesslich Kupfer und Silber. Die beiden letzteren Metalle scheinen übrigens innerhalb des mit kupfernen Kathoden untersuchten Gebietes ungefähr mit derselben Leichtigkeit zu zerstäuben. Bei höherem Druck als 0,6 mm zerstäubt Platin am leichtesten.

CROOKES[1]) hat bei weitgehender Verdünnung (eine Angabe des Druckes ist nicht vorhanden) den Gewichtsverlust für verschiedene mit einem starken Induktionsstrome behandelte Metallkathoden bestimmt. Die Kathoden bestanden bei diesen Versuchen, wenn es schwer schmelzende Metalle galt, aus 0,8 mm dicken und 20 mm langen Drähten. Bei der Untersuchung betreffs der Metalle Blei, Zinn und Kadmium, welche während der

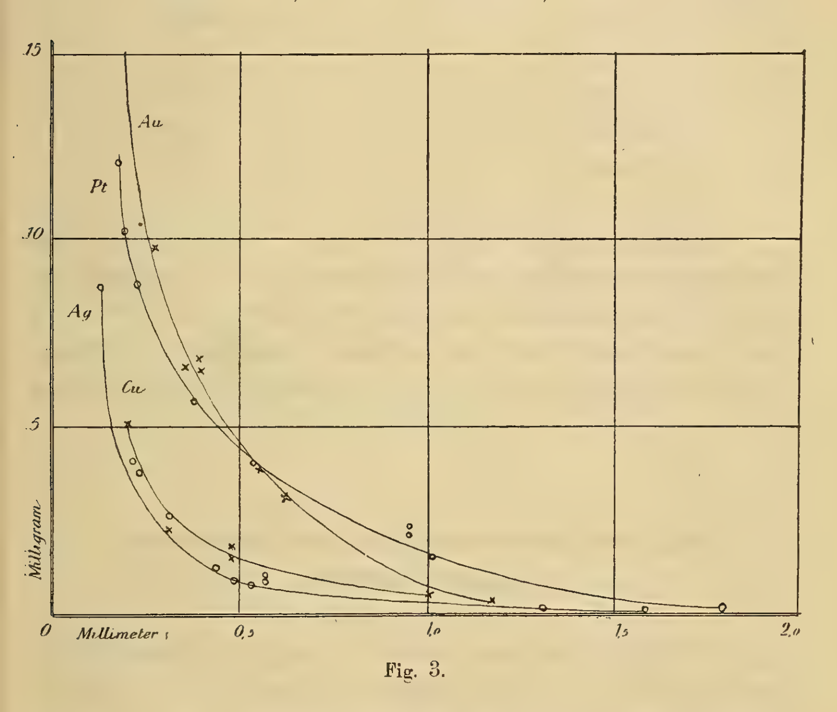


Fig. 3.

Behandlung schmelzen, bestand die Kathode aus einem kleinen porzellanenen Tiegel mit einem Durchmesser von 7 mm, in dem CROOKES die Metalle schmelzen liess. Der Gewichtsverlust der einzelnen Metalle wurde mit dem von Goldkathoden gleicher Form verglichen. CROOKES erhielt folgende Werte, wobei der Gewichtsverlust des Goldes = 100 angesetzt ist.

---

[1]) CROOKES, Proc. Roy. Soc. 50, pag. 88, 1892.

Palladium	108,00
Gold	100,00
Silber	82,68
Blei	75,04
Zinn	56,96
Messing	51,58
Platin	44,00
Kupfer	40,24
Kadmium	31,99
Nickel	10,99
Iridium	10,49
Eisen	5,50

Angenommen, dass diese Werte auch für einen konstanten Entladungsstrom gelten, wird die Kurve der Silberkathoden bei einem Drucke unter 0,2 mm die Platinkurve schneiden. Ich habe dieses Verhältniss nicht untersuchen können, da der Widerstand im Entladungsrohr bei so weitgehender Verdünnung zu gross wurde, um eine geeignete Stromstärke zu gestatten.

III. Gewichtsverlust und Energieverbrauch bei der Kathode.

1. Wie bereits vorhin erwähnt worden, hat Berliner die Ansicht geäussert, dass die Zerstäubung durch das von der Kathode entweichende occludierte Gas verursacht werde. Um zu untersuchen, inwiefern dieses auf die Zerstäubung der Kathode einwirken könne, habe ich bei mehreren der oben angeführten Versuche die Kathode vor dem Versuche zum Glühen gebracht. Einen Unterschied im Gewichtsverlust zwischen den so präparierten Kathoden und den anderen habe ich nicht nachweisen können. Falls deshalb das entweichende occludierte Gas die Kathode zerstäubt, muss dabei die Gewichtsabnahme der Kathode äusserst gering sein.

CROOKES[1]) ist der Meinung, dass die Zerstäubung der Kathode dadurch veranlasst wird, dass die an der Kathoden-Oberfläche befindlichen Partikelchen zufolge der elektrostatischen Ladung der Kathode von ihr abgesondert werden. Wenn dem so ist, müsste die Zerstäubung entweder auf der Stärke des elektrostatischen Feldes zwischen der Kathode und den Wänden des Entladungsrohres oder auf der Grösse der elektrischen Kraft der Kathode beruhen.

Betrachten wir die in Tab. II b verzeichneten Beobachtungen, so finden wir, dass der Gewichtsverlust der Kathode bei einer 325 Volt betragenden Potentialdifferenz zwischen der Kathode und den Wänden des Entladungsrohres 0,6 mgr betrug. War dagegen die Potentialdifferenz 630 Volt, also etwa doppelt so gross als vorher, so ergab sich als Gewichtsabnahme 5,9 mgr oder nahezu der zehnfache Betrag. Ferner ersehen wir aus der Tab. II a, dass, wenn der Druck im Entladungsrohr 0,54 mm beträgt, die Potentialdifferenz für eine 15 Skalenteilchen entsprechende Stromstärke 645 Volt ist. Bei einem Druck von 0,95 mm erhält man eine Potentialdifferenz von 630 Volt für eine Stromstärke von 35 Skalenteilchen. In beiden Fällen ist demnach die Potentialdifferenz, also auch die Stärke des elektrostatischen Feldes zwischen der Kathode und den Rohrwänden fast genau dieselbe, der Gewichtsverlust beträgt aber für 60 Min. in diesen Fällen 2,5 bezw. 7,1 mgr.

WARBURG[2]) hat dargelegt, dass die elektrische Kraft, welche auf die Kathode wirkt, der Quadratwurzel aus der Stromdichte proportional ist. Die elektrostatische Spannung ist demnach der Stromstärke proportional, und so sollte auch die Gewichtsabnahme, falls die Kathode aus diesem Grunde zerstäubt würde, der Stromstärke proportional sein.

2. Die in der vorigen Abteilung angeführten Beobachtungen haben ergeben, dass der Gewichtsverlust ΔP in der Zeiteinheit annähernd unter die Formel

---

[1]) CROOKES, Proc. Roy. Soc. 50, pag. 88, 1892.

[2]) WARBURG, Wied. Ann. 45, pag. 1, 1892.

$$\Delta P = ki^2$$

gebracht werden kann, wo k eine Funktion der Kathodendimensionen und des Druckes im Entladungsrohre ist. Die über das Potentialgefälle der Kathode von HITTORF[1]), HOMÉN[2]), GRAHAM[3]) und MEBIUS[4]) angestellten Untersuchungen haben gezeigt, dass das Kathodengefälle vermindert wird, wenn die Dimensionen der Kathode zunehmen, hingegen vergrössert wird, wenn der Druck im Entladungsrohr abnimmt, und dass es, wenigstens anfangs, proportional der Stromstärke steigt. Vergleicht man diese Ergebnisse mit den obigen Beobachtungen über den Gewichtsverlust der Kathode, so will mir daraus als wahrscheinlich hervorgehen, dass der Gewichtsverlust proportional dem Energieverbrauch zwischen der Kathode und der sie umgebenden Gasschicht ist.

Um zu untersuchen, ob dem thatsächlich so sei, habe ich die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der unmittelbar vor ihr gelegenen Gasschicht, also das eigentliche Kathodengefälle bei den von mir für die früheren Beobachtungen verwendeten Platinkathoden bestimmt.

Fig. 4 zeigt schematisch die hierbei getroffene Vorrichtung. U ist das vorher benutzte Entladungsrohr, an dem ein weites Rohr a angeschmolzen ist, wie die Figur zeigt. In diesem Rohr befindet sich ein Glasrohr b. In dem einen Ende dieses Glasrohres ist die Sonde e eingeschmolzen, die aus einem Platindraht besteht und mit der Spirale d verbunden ist. In das Glasrohr b waren zwei Eisencylinder eingesetzt. Das Glasrohr b konnte deshalb vermittelst eines Magnets ein wenig vor- und rückwärts bewegt werden.

Wie bei den vorigen Versuchen stand die Fläche der Kathode parallel zur Rohrachse. Die Kathode selbst bestand aus einem

---

[1]) HITTORF, Pogg. Ann. 136, pag. 1, 1869.

[2]) HOMÉN, Wied. Ann. 26, pag. 55, 1885 und 38, pag. 172, 1889.

[3]) GRAHAM, Wied. Ann. Bd. 64, pag. 49, 1898.

[4]) MEBIUS, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl. Bd. 24, Afd. 1, N:o 3, 1898.

der vorhin verwendeten Platinbleche. Die Entfernung zwischen der Kathode und der Sonde, wenn diese vor die Kathode geschoben war, wurde auf etwa 0,2 mm geschätzt.

Die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der Sonde ist vermittelst des früher benutzten Elektrometers bestimmt worden. Im übrigen waren die Anordnungen bei diesem Versuche, wie aus der Figur ersichtlich ist, dieselben wie bei den vorhergehenden.

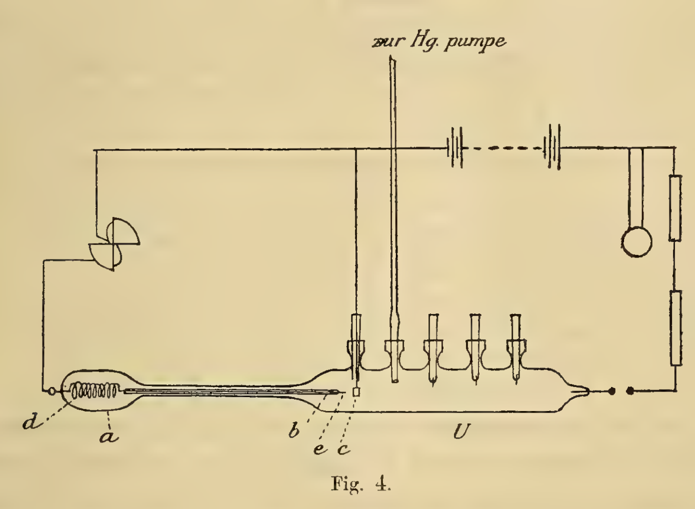


Fig. 4.

Der Verbrauch der elektrischen Energie bei der Kathode ist Vi, wo V das Kathodengefälle, und i die Stromstärke bezeichnet. Wenn der Gewichtsverlust der Kathode in der Zeiteinheit diesem Ausdruck proportional ist, muss er demnach bei konstanter Stromstärke dem Kathodengefälle V proportional sein. Bei der diesbezüglichen Untersuchung wurde mit Hülfe der vorhin beschriebenen Vorrichtung das Kathodengefälle bei verschiedenem Drucke für eine 20 Skalenteilen entsprechende Stromstärke bestimmt.

Diese Beobachtungen finden sich in Tab. VIII, wo der Druck und das Kathodengefälle mit p und V bezeichnet sind. Mit π ist der dem Drucke p und der Stromstärke von 20 Skalenteilen entsprechende Gewichtsverlust der Kathode bezeichnet. Er

wurde jedesmal für die verschiedenen Druckstärken graphisch, und zwar mit Hülfe der Kurve der Platinkathode in Fig. 3 bestimmt. In der letzten Kolumne haben wir schliesslich das Verhältniss $\frac{\pi}{V}$. Aus der Tab. VIII geht nun hervor, dass zwischen V und π völlige Proportionalität herrscht.

Tabelle VIII.

$i = 20$ Skalenteile.

p	V	π	$\frac{\pi}{V}$
0,176	1,000	12,0	$1{,}20 \cdot 10^{-2}$
0,23	850	8,8	1,04
0,27	625	7,7	1,23
0,43	450	5,1	1,13
0,60	300	3,6	1,20
0,90	175	2,1	1,20

Da die vorhergehenden Versuche darlegten, dass der Gewichtsverlust der Kathode nahezu dem Quadrate der Stromstärke proportional ist, so muss das Kathodengefälle innerhalb der verwendeten Stromgrenzen der Stromstärke proportional sein, falls der Gewichtsverlust dem Energieverbrauch proportional sein soll. Die von Homén und Mebius über das Kathodengefälle angestellten Versuche haben auch gezeigt, dass es wenigstens anfänglich der Stromstärke proportional steigt. Bei stärkeren Strömen nimmt es allerdings langsamer zu, als die Stromstärke.

IV. Einfluss der Temperatur auf die Zerstäubung der Kathode.

1. Es hat sich oben herausgestellt, dass die Zerstäubung proportional dem Energieverbrauch zwischen der Kathode und der unmittelbar vor ihr gelegenen Gasschicht ist. Wenn die

Entstehung des Kathodengefälles einem grösseren Leitungswiderstand vor der Kathode zugeschrieben werden darf, würde demnach die Zerstäubung proportional der an der Kathode entwickelten Wärme werden. Dieses scheint die Meinung HITTORF's zu stützen, dass nämlich die an den Wänden des Entladungsrohres sich absetzende Metallschicht aus kondensiertem, von der Kathode abgedampftem Metalle besteht.

Es erschien mir deshalb interessant zu untersuchen, ob eine künstlich bewirkte Temperaturveränderung der Kathode oder eine ihr von aussen beigebrachte Wärmemenge die Schnelligkeit, mit welcber die Kathode zerstäubt wird, beeinflusst. Zunächst unter-

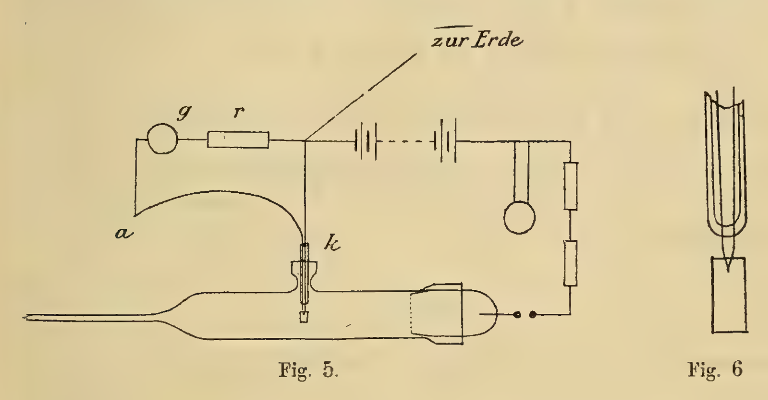


Fig. 5. Fig. 6

suchte ich, ob die Temperatur der Kathode bei gleichem Gewichtsverlust stets gleich bleibt, unabhängig vom Druck und von der Stromstärke.

Zu dem Zwecke wurde die eine Lötstelle eines Platinrhodium-Thermoelements mit einer der früher verwendeten Platinkathoden zusammengeschweisst und in die Kathodenröhre *k* (siehe Fig. 5) eingeschmolzen; die Art und Weise der Anordnung ist in Fig. 6 ersichtlich. Die zweite Lötstelle *a* (siehe Fig. 5) wurde mit Baumwollwatte umwickelt und besass die Zimmertemperatur. Das Thermoelement war in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise mit einem Spiegelgalvanometer *g* und einem Widerstand *r* von 2800 Ohm verbunden. Die übrigen Anordnungen, in der Hauptsache dieselben wie früher, sind aus der Figur zu erkennen. Das Ent-

ladungsrohr war bei diesen Versuchen nicht dasselbe, wie bei den früheren Bestimmungen, weil seine Kathodenröhren zu schmal waren, um das Einschmelzen des Thermoelements zu gestatten. Die Länge des Entladungsrohres betrug 27 cm, und der Durchmesser 4 cm.

Das eben erwähnte Thermoelement war früher von SVEDELIUS bei einer Untersuchung[1]) benutzt worden, und damals wurde die Beziehung der elektromotorischen Kraft zu der Temperaturdifferenz zwischen seinen Lötstellen bestimmt.

In der Folge sind die Galvanometerausschläge mit u bezeichnet. u_s sind die auf den Empfindlichkeitsgrad der SVEDELIUS'schen Vorrichtung reduzierten Ausschläge. Endlich drückt t die Temperaturdifferenz der Lötstellen aus.

Die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Lötstellen wurde nun teils bei konstantem Druck und verschiedener Stromstärke, teils bei konstanter Stromstärke und verschiedenem Druck bestimmt. Die Tabellen IX, X und XI verzeichnen diese Beobachtungen.

Tabelle IX.

$p = 1{,}948$ mm.

i	u	u_s	t°	$\frac{t}{i}$
11,0	67,1	20,9	124	11,3
12,3	73,5	23,0	138	11,2
12,4	76,5	23,9	140	11,3
13,9	85,5	26,7	157	11,3
17,0	109,0	34,1	197	11,6
18,0	115,5	36,1	211	11,7
21,2	138,1	43,1	248	11,7
21,3	139,5	43,6	254	11,9
28,3	184,0	57,5	324	11,5

[1]) SVEDELIUS, Om järnets kritiska längd- och temperaturförändringar. Inaugur. diss. Upsala 1896.

Tabelle X.

$p = 0{,}106$ mm.

i	u	u_s	$t°$	$\frac{t}{i}$
5,0	98	30,6	180	36
5,3	122	38,1	221	42
7,0	138	43,1	248	35
7,5	181	56,6	320	43
9,0	206	64,4	358	40
11,0	299	93,4	492	45
11,6	312	97,5	508	44

Aus den Tabellen IX und X ersieht man, dass die Temperaturdifferenz zwischen der Kathode und der Umgebung des Entladungsrohres der Stromstärke proportional ist. Die Übereinstimmung in den Werten für $\frac{t}{i}$ ist in der Tabelle IX auffallend genau, dagegen variieren die betreffenden Werte in der Tabelle X recht sehr, was auf der Schwierigkeit beruht, einen so geringen Druck wie 0,106 mm, während der Beobachtungsserie konstant zu erhalten.

Tabelle XI.

$i = 20$ Skalenteile.

p	u	u_s	t	π	$\frac{\pi}{t^2}$
0,058	347,4	111,1	566	—	—
0,076	341,8	106,8	548	—	—
0,312	207,3	64,8	358	6,90	54
0,506	164,8	51,5	295	4,35	50
0,623	129,7	40,5	235	3,50	63
0,755	123,6	38,6	224	2,75	55
0,850	118,8	37,1	216	2,30	49
0,910	109,0	34,1	198	2,00	51

In der Tabelle XI wurde die Temperaturdifferenz zwischen der Kathode und der Umgebung für eine 20 Skalenteilchen entsprechende Stromstärke bei verschiedenen Drucken bestimmt. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Temperatur mit der Verdünnung rasch steigt.

Für die Folge sei angenommen, dass die Beziehung des Druckes zu der Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen bei konstanter Stromstärke i_1 durch die Gleichung

$$t_0 = f(p)$$

ausgedrückt werden kann. Nach den in den Tabellen IX und X gegebenen Beobachtungen ist die Temperaturdifferenz proportional der Stromstärke, und es ergiebt sich also für die Stromstärke i:

$$t = \frac{i}{i_1} f(p)$$

Ferner sei angenommen, die Beziehung des Gewichtsverlustes unserer Platinkathoden zum Drucke bei konstanter Stromstärke i_1 sei

$$\pi_0 = \varphi(p).$$

Für den Fall, dass i_1 20 Skalenteilchen entspricht, gilt die Kurve in Fig. 3. Bei einer anderen Stromstärke i ist der Gewichtsverlust

$$\pi = \frac{i^2}{i_1^2} \varphi(p).$$

Gesetzt, der Gewichtsverlust der Kathode sei derselbe bei den Stromstärken i' und i'' und den entsprechenden Druckstärken p' und p'', so erhalten wir

$$i'^2 \varphi(p') = i''^2 \varphi(p'').$$

Die Temperaturdifferenz der Lötstellen beträgt für beide Fälle:

$$t' = \frac{i'}{i_1} f(p'); \quad t'' = \frac{i''}{i_1} f(p'').$$

Nehmen wir nun an, die Temperaturdifferenz sei für beide Fälle dieselbe, so erhalten wir

$$i' f(p') = i'' f(p'')$$
$$i'^2 \varphi(p') = i''^2 \varphi(p'')$$

Werden die Grössen i' und i'' in beiden Gleichungen eliminiert, so erhalten wir

$$\frac{\varphi(p')}{[f(p')]^2} = \frac{\varphi(p'')}{[f(p'')]^2} = \frac{\pi}{t^2} \text{ d. i. eine Konstante.}$$

Mit Hülfe der Platinkathodenkurve in Fig. 3 wurde der Gewichtsverlust für die in der Tab. XI verzeichneten Druckstärken bestimmt. Diese Gewichtsverluste sind dort mit π bezeichnet. Aus der letzten Kolumne dieser Tabelle, wo das Verhältnis $\frac{\pi}{t^2}$ berechnet ist, kann man folgern, dass es konstant ist, und folglich dass die Temperaturdifferenz zwischen der Kathode und der Umgebung des Entladungsrohres bei Zerstäubung gleicher Gewichtsmengen in gleichen Zeiträumen gleich bleibt. Zwar weichen die einzelnen Ziffern recht erheblich von einander ab, dieses dürfte jedoch auf der Schwierigkeit beruhen, aus den wenigen über den Gewichtsverlust der Platinkathoden gemachten Beobachtungen die Beziehung des Druckes zum Gewichtsverlust graphisch exakt darzustellen, teils aber auch auf den Fehlern. welche bei der Bestimmung der Temperaturdifferenz vermittelst der in sehr kleinem Massstabe gezeichneten SVEDELIUS'schen Kurve unvermeidlich sind.

Wenn in bestimmten Zeiteinheiten gleiche Gewichtsmengen der Kathode zerstäubt werden, ist, wie wir vorhin sahen, der elektrische Energieverbrauch stets gleich gross. Die Wärmeentwicklung ist also für diese Fälle dieselbe, und deshalb war im voraus zu erwarten, dass auch die Temperatur dieselbe sein würde.

2. Es möchte nun von Interesse sein zu untersuchen, ob der Gewichtsverlust der Kathode geändert wird, wenn ihre Tem-

peratur auf einen anderen Wert gebracht wird, als den, welchen sie durch den Entladungsstrom erhält. Zu dem Zweck wurden zwei Platindrähte *a* und *b* (Fig. 7) in das Kathodenröhre *k* (Fig. 8) eingeschmolzen. Diese Drähte waren so beschafften, dass ein Platinblech leicht an ihnen befestigt und wieder entfernt werden konnte. Das Blech war, um grösseren Leitungswiderstand zu liefern, in der aus der Figur ersichtlichen Weise ausgeschnitten. Die Platindrähte waren mit einer Leitung verbunden, in der 4 grössere Akkumulatoren, ein Ampèremeter *A* und ein geeigneter Ballast-

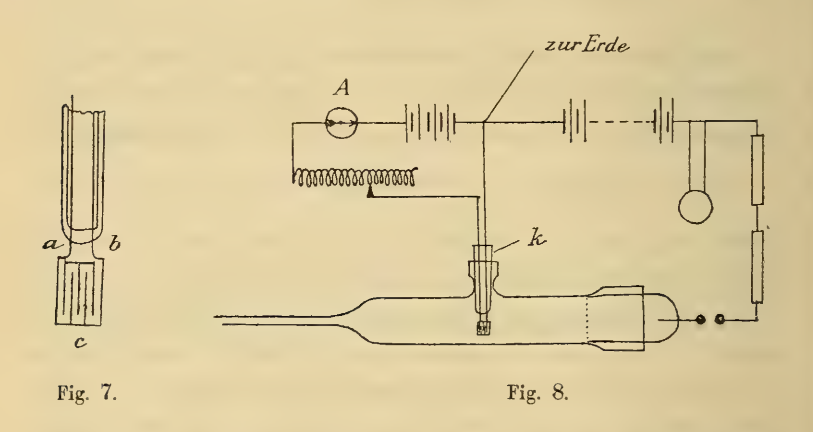


Fig. 7. Fig. 8.

widerstand vorhanden war. Diese Leitung war mit dem negativen Pol der Hochspannungsbatterie in der aus der Figur erkennbaren Weise verbunden. Nachstehend benenne ich der Einfachheit halber den Strom der 4 Akkumulatoren, welcher die Kathode zum Erglühen brachte, den Erwärmungsstrom, und den Strom der Hochspannungsbatterie den Entladungsstrom.

Anfangs wurde eine Reihe von Versuchen gemacht, während derer das Platinblech vermittelst des Erwärmungsstromes zum Erglühen gebracht wurde. Die Hochspannungsbatterie war währenddem ausgeschaltet. Ein Zerstäuben des Platinbleches, welches vor und nach der Behandlung gewogen wurde, konnte nicht nachgewiesen werden, obgleich es mehrere Stunden lang glühte und der Druck im Entladungsrohre bei mehreren Versuchen geringer war als 0,1 mm.

Bei den folgenden Versuchen wurde der Gewichtsverlust des Platinbleches bestimmt, teils, wenn es nur mit dem Entladungsstrome, und teils, wenn es gleichzeitig mit dem Erwärmungsstrom behandelt wurde. Einige dieser Beobachtungen seien hier vorgeführt.

Tabelle XII.

Gewicht des Platinbleches 0,1 gr. Dauer der Behandlung 40 Minuten.

Druck im Entladungsrohr in mm.	Entladungsstrom in Skalenteilchen.	Erwärmungsstrom in Ampère.	Gewichtsverlust in mgr.
0,10	35,0	0,0	2,5
0,10	33,8	3,5	2,0
0,15	23,1	0,0	1,8
0,15	23,3	4,1	1,7
0,40	20,0	0,0	0,4
0,40	20,0	4,1	0,4

Wenn der Erwärmungsstrom nicht verwendet wurde, dürfte die Temperatur der Kathode sehr niedrig gewesen sein. Wenn der Erwärmungsstrom 3,5 Ampère betrug, geriet das Platinblech in dunkelrotes Glühen, bei 4,1 wurde es nahezu weissglühend. Die der Kathode von dem Erwärmungsstrom zugeführte Wärmemenge dürfte deshalb vielfach grösser gewesen sein, als die normalerweise in der Kathode entwickelte.

Bei diesen Versuchen stellte es sich also heraus, dass wenigstens in Bezug auf Platinkathoden der Gewichtsverlust keine Änderung erleidet, wenn die Temperatur der Kathode anderswertig wird, als unter normalen Verhältnissen, und auch nicht, wenn von aussen der Kathode Wärme zugeführt wird.

Angesichts dieser Befunde meine ich, kann die HITTORF'sche Ansicht, dass die Kathode infolge der hohen Temperatur und des kleinen Druckes um sie her verdampft werde, nicht mehr aufrechterhalten werden.

Es möchte vielleicht noch zu erwähnen sein, dass die durch obige Versuche erzielten Ergebnisse natürlich nicht für den Fall Geltung haben können, dass die Temperatur der Kathode, sei es infolge der Wärmeentwicklung des elektrischen Stromes oder infolge der von aussen kommenden Wärmezufuhr, dermassen gesteigert wird, dass das Metall, aus dem die Kathode besteht. geradezu durch diese hohe Temperatur an sich verdampft oder sublimiert wird. Solche Versuche hat CROOKES[1]) mit Kadmium angestellt. Hier besteht die an den Wänden des Entladungsrohres sich ansammelnde Metallschicht teils aus Partikeln, welche durch den elektrischen Strom von der Kathode losgelöst wurden, teils aber auch aus kondensiertem Metall, das infolge der hohen Temperatur der Kathode auf gewöhnlichem Wege verdampfte. In diesem Falle ist der Gewichtsverlust der Kathode natürlich nicht von ihrer Temperatur unabhängig.

Da der Gewichtsverlust der Kathode dem elektrischen Energieverluste bei der Kathode proportional und von der von aussen kommenden Wärmezufuhr unabhängig ist, kann die Zerstäubung hier nicht als eine durch die Wärmeentwicklung oder die Temperatursteigerung in der Kathode verursachte sekundäre Erscheinung aufgefasst werden. Dagegen sollte nach meinem Dafürhalten die Zerstäubung der Kathode vielleicht durch die Annahme zu erklären sein, dass der elektrische Strom eine Zerstäubungsarbeit von ungefähr der Art verrichte, wie EDLUND sie sich in dem elektrischen Lichtbogen denkt. Die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und der ihr anliegenden Gasschicht, d. h. das eigentliche Kathodengefälle, würde dann aus einer elektromotorischen Gegenkraft bestehen.

[1]) CROOKES, Proc. Roy. Soc. 50, pag. 88, 1892.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 10.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Beiträge zur Kenntniss der Volumen- und Dichtigkeitsänderungen der Flüssigkeiten bei der Absorption von Gasen.

Von EMIL ALMÉN.

(Mitgeteilt den 14 December 1898 durch K. ÅNGSTRÖM.)

1. Über die Volumen- und Dichtigkeitsänderungen einer Flüssigkeit, welche ein Gas absorbiert, finden sich recht wenige ältere Bestimmungen; in den meisten Fällen sind es nebenbei gemachte Beobachtungen anlässlich anderer Untersuchungen in Bezug auf die Absorption von Gasen durch Flüssigkeiten. Bestimmungen wurden ausgeführt von BERGMAN,[1]) THOMSON,[2]) DEICKE,[3]) WROBLEWSKI,[4]) MACKENZIE & NICHOLS[5]) und von NICHOLS & WHEELER.[6])

Die ersten umfassenderen und allseitigeren Untersuchungen dieser Fragen stellte K. ÅNGSTRÖM[7]) an. Er führte den Begriff Absorptions-Dilatationskoeffizient ein und definierte ihn als die durch eine Volumeneinheit Gases bei 0° C. und 760 mm Druck verursachte Volumenzunahme.

Nach dieser Untersuchung bestimmten BELLATI und LUSSANA[8]) die Grösse des Absorptions-Dilatationskoeffizienten und seine Än-

[1]) Opuscula Chemica et Physica, I, p. 9.
[2]) A treatise on Chemistry.
[3]) Pogg. Ann. 119, p. 156, 1863.
[4]) Ann. der Phys. und Chem. **2**, p. 481, 1877. (Neue Folge.)
[5]) Ann. der Phys. und Chem. **3**, p. 134, 1878. (Neue Folge.)
[6]) Phil. Magaz. Febr. 1881.
[7]) Öfvers. af Kongl. Vet. Ak. Förh. 1881. N:o 6.
[8]) Atti Ist. Ven. (6), **7**, 1889. Beiblätter der Ann. der Phys. u. Chem. Bd. 14.

derung mit der Temperatur für Kohlensäure und Stickstoffoxydul, die von Wasser und Alkohol absorbiert wurden.

Ferner hat BLÜMCKE[1]) Untersuchungen über die Grösse des Absorptions-Dilatationskoeffizienten angestellt, sowohl in Bezug auf verdünnte wie auf durch starken Druck konzentrierte Gaslösungen.

In einer späteren Arbeit über hierhergehörige Fragen hat ÅNGSTRÖM[2]) eine neue Methode, die fraglichen Volumenänderungen zu bestimmen, angegeben und für mehrere Gase und Flüssigkeiten Bestimmungen ausgeführt. Ich werde späterhin darauf zurückkommen.

Der Absorptions-Dilatationskoeffizient kann schliesslich aus einigen Bestimmungen des spezifischen Gewichts wässriger Gaslösungen bei verschiedenem Prozentgehalt an Gas, welche von CARIUS,[3]) TOPSOË,[4]), GILES & SCHEARER,[5]) LUNGE & WIERNIEK,[6]) LUNGE & MARSCHLEWSKI[7]) ausgeführt worden sind, berechnet werden.

2. Die Resultate jener Untersuchungen liegen vor in recht zahlreichen Bestimmungen des Absorptions-Dilatationskoeffizienten für verschiedene Gase und verschiedene Flüssigkeiten. Über die Ergebnisse der bedeutendsten dieser Untersuchungen will ich hier eine kurze Übersicht geben.

MACKENZIE & NICHOLS und NICHOLS & WHEELER fanden in Bezug auf vom Wasser absorbierte Kohlensäure, dass die Volumenzunahme der Flüssigkeit proportional dem absorbierten Gasvolumen war, was später von BLÜMCKE für den Fall bestätigt wurde, dass keine besonders grosse Gasquantität (50- oder mehrprozentige Lösungen) unter Anwendung hohen Druckes absorbiert worden war. Die Gültigkeit des Gesetzes wurde von ÅNGSTRÖM

---

[1]) Ann. der Phys. und Chem. B. 23, p. 404, 1884, und B. 30, p. 243, 1887.
[2]) Öfvers. af Kongl. Vet. Ak. Förh. 1887, N:o 6. — Ann. der Phys. und Chem. B. 33, p. 233, 1888.
[3]) Ann. der Chem. und Pharm. B. 99, p. 164. 1856.
[4]) Ber. d. D. Chem. Gesellsch. B. 3, p. 404, 1870.
[5]) Journ. Soc. Chem. Industry. B. 4, p. 303.
[6]) Zeitschr. für angew. Chem. 1889.
[7]) Zeitschr. für angew. Chem. 1891.

für andere Gase und Flüssigkeiten nachgewiesen, wobei er Folgendes darthat.

Der Absorptions-Dilatationskoeffizient sämtlicher untersuchter Gase variirt bei der Absorption in der nämlichen Flüssigkeit innerhalb sehr enger Grenzen. Die Absorptions-Dilatationskoeffizienten verschiedener Gase ordnen sich nach der Kompressibilität der Gase, so dass Gase, welche bei einem gewissen hohen Druck grösseres Volumen haben, auch einen grösseren Absorptions-Dilatationskoeffizienten besitzen. Der Druck, welcher nötig sein würde, um das Gas auf dasselbe Volumen zu komprimieren, um das es bei der Absorption durch Wasser das Volumen des letzteren erhöht, ist, nach den Bestimmungen NATTERER's berechnet, ein sehr hoher, und beträgt etwa 2500 Atmosphären. Das Verhältnis zwischen zwei Absorptions-Dilatationskoeffizienten ist von der Natur der absorbierenden Flüssigkeit unabhängig, welchem Gesetz freilich nur eine approximative Gültigkeit zuzuerkennen ist. Der Absorptions-Dilatationskoeffizient eines Gases bleibt unverändert, wenn die Absorption in einer Flüssigkeit stattfindet, welche bereits absorbiertes Gas enthält. Hieraus kann mit grosser Wahrscheinlichkeit gefolgert werden, dass der Absorptions-Dilatationskoeffizient einer Gasmischung durch diejenigen der Bestandteile linear berechnet werden kann. Ferner ist der Absorptions-Dilatationskoeffizient des nämlichen Gases in Bezug auf verschiedene Flüssigkeiten im allgemeinen um so grösser, je kompressibler die Flüssigkeit ist.

BELLATI und LUSSANA haben nachgewiesen, dass der Absorptions-Dilatationskoeffizient mit der Temperatur steigt. Dasselbe Resultat gewann BLÜMCKE.

Schliesslich hat OSTWALD[1]) die ÅNGSTRÖM'schen Werte der Absorptions-Dilatationskoeffizienten bei der Absorption durch Wasser mit den nach der CLAUSIUS'schen Formel berechneten Molekularvolumina verglichen und gefunden, dass diese beiden Grössen einander sehr nahe liegen, wie überhaupt, dass die respektiven Werte der verschiedenen Gase eine analoge Reihe

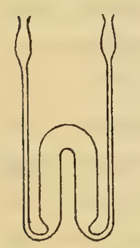
[1]) W. OSTWALD, Stöchiometrie, p. 634. Leipzig 1885.

bilden, und folgert hieraus, dass durch die Absorption das Volumen des absorbierten Gases fast völlig auf sein Molekularvolumen reduziert werde.

3. Der Anregung des Herrn Prof. K. ÅNGSTRÖM zufolge habe ich einige hierhergehörende Fragen untersucht. Es wäre nämlich von Interesse zu ermitteln, ob das Gesetz von der Proportionalität zwischen der Volumenzunahme der absorbierenden Flüssigkeit und dem Volumen des zu absorbierenden Gases auch bezüglich der in hohem Grade absorbierbaren Gase gelte; ferner, den Absorptions-Dilatationskoeffizienten für Gase mit grossem Molekularvolumen zu bestimmen, um zu ermitteln, ob er einen entsprechend hohen Wert erreicht; sodann zu untersuchen, ob das Gesetz vom Absorptions-Dilatationskoeffizienten unabhängig von vorher von der Flüssigkeit absorbiertem Gase auch auf Gase Bezug habe, welche grössere Abweichungen von DALTON's Gesetz aufweisen.

Schliesslich habe ich auch den Absorptions-Dilatationskoeffizienten eines Gases bestimmt, das von Flüssigkeitsmischungen absorbiert wurde, nebst seiner Variation mit Rücksicht auf die variierenden Quantitäten der in der Mischung vorhandenen Flüssigkeiten.

4. Die bei diesen Untersuchungen von mir befolgte Methode ist die von ÅNGSTRÖM angegebene und bei seiner letzten Untersuchung benutzte, wie er sie in seiner vorhin zitierten Mitteilung über die Versuche beschrieben hat.[1] Betreffs der Methode genügt deshalb ein Hinweis auf jene. Hier will ich nur an das Prinzip derselben erinnern. Die Versuchsflüssigkeit ist oberhalb des Quecksilbers in ein Dilatometer eingeschlossen, welches aus einem auf den Kopf gestellten U-Rohre (siehe die nebenanstehende schematische Zeichnung) besteht. Das Quecksilber ragt in die zwei gradierten und kalibrierten Kapillarrohre hinauf, an denen seine Lage abgelesen werden kann. Ein in einem gradierten Rohre direkt gemessenes



[1]) Siehe S. 736.

Gasvolumen wird in das Dilatometer eingeführt und durch die Flüssigkeit absorbiert, wobei die entstandene Volumenzunahme an der Verschiebung des Quecksilbers in den Kapillarrohren gemessen werden kann. Hierbei muss natürlich die Temperatur des Dilatometers konstant gehalten werden, weshalb es mit Ausnahme derjenigen Kapillarrohrteile, an denen die Ablesungen ausgeführt wurden, ganz und gar von schmelzenden Eis oder Schnee umgeben war.

Wenn G das Volumen des Gases bei 0° C. und 760 mm Druck bezeichnet, welches bei einem Versuche in das Dilatometer eingeführt wurde, und Δv die dabei entstehende Volumenzunahme ausdrückt, und wenn man ferner mit δ den Absorptions-Dilatationskoeffizienten bezeichnet, so wird dieser aus der Gleichung

$$\delta = \frac{\Delta v}{G}$$

berechnet. Um für δ einen genauen Wert zu gewinnen, wurde zu wiederholten Malen in das Dilatometer Gas eingeführt. Um dann δ zu berechnen, kann man entweder wie ÅNGSTRÖM das Verhältnis zwischen der von jeder einzelnen eingeführten Gasmenge verursachten jeweiligen Volumenzunahme und dem Volumen dieser Gasmenge berechnen, oder aber man kann das Verhältnis zwischen der Summe sämtlicher Volumenvergrösserungen zur Summe der eingeführten Gasmengen ins Auge fassen. Aus den demgemäss gewonnenen Ergebnissen der einzelnen Bestimmungen ist sodann der Mittelwert zu berechnen.

Wird die erstere Methode angewandt, so kann der Mittelwert als arithmetische Mittelzahl der verschiedenen Bestimmungen unter der Voraussetzung berechnet werden, dass sämtliche Einzelbestimmungen das gleiche Gewicht hatten, was man annehmen darf, wenn ungefähr gleich grosse Gasmengen eingeführt wurden und infolgedessen auch gleich grosse Volumenänderungen bei jeder einzelnen Bestimmung vorkamen. Bei dem zweiten Berechnungsverfahren muss natürlich den verschiedenen Werten verschiedenes Gewicht beigemessen werden. Ich habe dieses letztere Verfahren beim Ausfüh-

ren der Berechnungen gewählt, und zwar aus folgenden Gründen. Erstlich waren die eingeführten Gasmengen bei meinen Bestimmungen öfters recht verschieden gross. Sodann dürfte meines Erachtens diese Behandlung des direkten Beobachtungsmaterials wohl eine grössere Genauigkeit erzielen, was aus folgender Betrachtung erhellt. Die Quantität $\varDelta v_1$ ist die Differenz zwischen zwei gemessenen Volumina, v_2 und v_1, bei deren Bestimmung man die Fehler dv_2 bezw. dv_1 begeht. Wird nun eine neue Bestimmung gemacht, ohne dass das Gesamtvolumen der im Dilatometer eingeschlossenen Flüssigkeiten, der Versuchsflüssigkeit und des Quecksilbers, geändert wird, oder m. a. W., ohne dass ein wenig Quecksilber aus dem Dilatometerrohre entfernt wird, so erhält man eine neue Volumenzunahme $\varDelta v_2$, d. h. die Differenz zwischen den Volumina v_3 und v_2, bei deren Messen man die Fehler dv_3 bezw. dv_2 begeht. Berücksichtigt man nun die Summe von $\varDelta v_1$ und $\varDelta v_2$, so leuchtet es ein, dass diese Summe von dem Fehler dv_2 gänzlich unabhängig sein muss, da $\varDelta v_1 + \varDelta v_2$ als der Unterschied zwischen den Volumina v_3 und v_1 betrachtet werden kann. Hieraus erhellt, dass, wenn man bei einer Versuchsserie das Quecksilber nicht aus dem Dilatometerrohre entfernt, der Fehler betreffs der gesamten Volumenzunahme nicht grösser werden kann, als der Fehler bei der Schätzung der Volumenzunahme bei einer einzelnen Bestimmung, während dieser Fehler mit der Entfernung des Quecksilbers grösser wird. Da man bei der von mir angewandten Berechnungsmethode diesen Umstand genügend berücksichtigen und demnach jede einzelne Bestimmung eben den ihr gebührenden Einfluss auf die Mittelzahl ausüben kann, erwächst nach meinem Dafürhalten hierdurch ein wenn auch nur geringfügiges Mehr der Genauigkeit.

Wenn man mit δ_n den aus der n:ten Bestimmung berechneten Wert des Absorptions-Dilatationskoeffizienten bezeichnet, mit $d\delta_n$ den dabei entstehenden Fehler, mit $\Sigma \varDelta v_n$ die gesamte Volumenzunahme, mit dv den Fehler in der Bestimmung der Verschiebung der Quecksilbersäule in dem Kapillarrohr des Dilatometers, mit G_n die gesamte eingeführte Gasmenge, auf 0° C. und 760 mm. Druck

reduziert, und mit dg den Fehler bei jeder einzelnen Messung der Gasvolumina, so erhält man durch eine einfache Berechnung (auf deren Einzelheiten ich mich hier nicht einlasse)

$$d\delta_n = \pm\ \delta_n \frac{dv\sqrt{2} + \delta_n\sqrt{n}\,dg}{\Sigma \varDelta v_n}.$$

Wenn man mit p_n das Gewicht der Bestimmung bezeichnet, erhält man:

$$p_n = \text{Konst.}\ \frac{1}{d\delta_n^2}\ \text{und}\ \delta = \frac{p_1\delta_1 + p_2\delta_2 + \ldots + p_n\delta_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n};$$

ferner $$d\delta = \pm\ \frac{[(p_1 d\delta_1)^2 + (p_2 d\delta_2)^2 + \ldots + (p_n d\delta_n)^2]^{\frac{1}{2}}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Die obige Formel für $d\delta_n$ hat Gültigkeit, wenn das Quecksilber nicht während der Versuchsreihe aus dem Dilatometerrohre entfernt wurde. Für den Fall, dass dieses doch geschah, muss jedesmal das erste Glied des Zählers mit der Quadratwurzel von 2 multipliziert werden.

Bei meinen Untersuchungen habe ich mich zweier Apparate von der vorhin angedeuteten Beschaffenheit bedient; ich teile hier ihre Dimensionen mit und den bei ihrer Verwendung erreichbaren Genauigkeitsgrad bei der Bestimmung der einzelnen Quantitäten.

Bei dem Apparat I betrug das Volumen des Dilatometers etwa 95 ccm. Die Volumenzunahme liess sich mit einer Genauigkeit von etwa 0,07 cmm entscheiden. Was das Gasaufbewahrungsrohr betrifft, so variierte sein Volumen auf Strecken von 1 mm Länge, an verschiedenen Stellen des Rohres gemessen, zwischen 143,07 cmm und 144,34 cmm. Der Fehler bei der Bestimmung des Gasvolumens dürfte nicht mehr als 30 cmm betragen haben.

Bei dem Apparat II betrug das Volumen des Dilatometers etwa 95 ccm und die Volumenzunahme liess sich mit einer Genauigkeit von etwa 0,04 cmm bestimmen. Das in 1 mm des Gasaufbewahrungsrohres enthaltene Volumen variierte an verschiedenen Rohrstellen zwischen 88,5 cmm und 92,9 cmm.

Der Fehler bei der Bestimmung des Gasvolumens betrug etwa 20 cmm.

5. Nach der oben angegebenen Methode habe ich anfangs den Absorptions-Dilatationskoeffizienten für Ammoniak bei dessen Absorption durch Wasser, für schweflige Säure bei der Absorption durch Wasser, für Methan bei der Absorption durch Wasser, Aethylalkohol und Aethyläther, schliesslich für Stickstoff bei der Absorption durch Äthylalkohol bestimmt. Ich teile nachstehend die gewonnenen Ergebnisse mit.

Ammoniak, durch Wasser absorbiert (Apparat I).

Das Gas wurde durch Erhitzen einer Mischung von 2 Teilen Chlorammonium und 1 Teil Kalciumoxyd dargestellt und mittels festen Kaliumhydrats getrocknet. Die nachstehende Tabelle giebt die Resultate.

Die erste Kolumne teilt das Gesamtvolumen des eingeführten Gases bei 0° C. und 760 mm Druck (G) in cmm mit; die zweite Kolumne die gesamte Volumenzunahme ($\Sigma \Delta v$) in cmm; die dritte den Absorptions-Dilatationskoeffizienten $\left(\delta = \frac{\Sigma \Delta v}{G}\right)$; die vierte den Durchschnittsfehler ($d\delta$) der einzelnen Bestimmung von δ; die fünfte Kolumne giebt das Gewicht der einzelnen Bestimmung (p).

Tab. 1.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
13730	14,72	0,001 072	0,0 000 099	2
25400	26,96	0,001 061	0,0 000 060	6
35450	37,95	0,001 071	0,0 000 059	7 [1])
40960	43,67	0,001 066	0,0 000 051	9
52510	56,16	0,001 070	0,0 000 049	9 [1])
63190	67,50	0,001 068	0,0 000 040	14
77160	82,39	0,001 068	0,0 000 036	17
86090	92,46	0,001 074	0,0 000 031	23
104240	111,63	0,001 071	0,0 000 028	28 [1])
120280	129,66	0,001 077	0,0 000 025	35
132120	142,31	0,001 077	0,0 000 024	39

Aus diesen Werten ergiebt sich als mittlerer Wert:

$$\delta = 0{,}001\,073 \pm 0{,}000\,001.$$

[1]) Quecksilber aus dem Dilatometerrohre entfernt.

Bei diesen Bestimmungen wurden etwa 90 ccm Wasser in dem Dilatometer angewandt, weshalb δ nur für niedere Sättigungsgrade gilt. Um eine Bestimmung bei hoher Sättigung zu gewinnen, was durch weiteres Einführen von Gas nur mit beträchtlichem Zeitaufwand hätte geschehen können, wurde das spezifische Gewicht einer sehr konzentrierten Lösung bestimmt. Behufs dieser Bestimmung bediente ich mich »reinen konzentrierten Ammoniaks», das von der hiesigen »Akademischen Apotheke» geliefert wurde. Sein spezifisches Gewicht bei 0° C. wurde bestimmt. Sein Ammoniakgehalt wurde vermittels Titrierung ermittelt. Wenn δ der Absorptions-Dilatationskoeffizient ist, s das spezifische Gewicht der Ammoniaklösung und s_0 das des Wassers bei 0° C., p das Gewicht des Ammoniakgases in 1 gr. Ammoniaklösung und ϱ das spezifische Gewicht des Ammoniakgases bei 0° und 760 mm Druck, so erhält man unschwer:

$$\delta = \left(\frac{1}{s} - \frac{1-p}{s_0}\right)\frac{\varrho}{p}.$$

Bei dem Versuche ergab sich:

$$s = 0{,}92\,754 \quad \pm 0{,}00\,007$$
$$p = 0{,}2\,122 \quad \pm 0{,}000\,2$$
$$\delta = 0{,}0\,010\,413 \pm 0{,}0\,000\,004.$$

Schweflige Säure, durch Wasser absorbiert (Apparat I).

Das Gas wurde aus Natriumsulfit durch Einwirken von Schwefelsäure dargestellt und mittels Chlorkalcium getrocknet. Die atmosphärische Verunreinigung des Gases wird etwa 1 % betragen haben, was darauf beruhte, dass das Gas nicht im Laboratorium hergestellt werden durfte, weil es metallne Teile der Apparate hätte angreifen können. Jedoch dürfte die atmosphärische Verunreinigung auf die Werte des Absorptions-Dilatationskoeffizienten keinen merklichen Einfluss ausüben.

Um das Gasvolumen bei Zimmertemperatur auf das bei 0° C. zu bringen, habe ich mich des Dilatationskoeffizienten 0,00 390 bedient.[1]) Um das Volumen beim wirklichen atmosphärischen

[1]) Der Ausdehnungskoeffizient der schwefligen Säure beträgt nach REGNAULT bei konstantem Volumen 0,0 038 453, bei konstantem Druck 0,003 902 8.

Drucke auf das bei 760 mm zu reduzieren, wurde das MARIOTTE'-sche Gesetz herangezogen; da es sich bei der Reduktion nur um kleine Druckdifferenzen handelte, dürfte kein grösserer Fehler begangen worden sein. Zwei getrennte Versuchsserien wurden ausgeführt. In der Tabelle enthält die erste Horizontalreihe die erste Serie, die beiden folgenden die zweite Serie. Die Bezeichnungen sind die vorhin verwendeten.

Tab. 2.

G	Δv	δ	$d\delta$	p
8010	7,02	0,000 876	0,000 017	1
10940	9,25	0,000 846	0,000 012	2
23600	20,21	0,000 856	0,000 006	8

Hieraus ergeben sich folgende mittlere Werte:

$$\delta = 0{,}000\,856 \pm 0{,}000\,003.$$

Methan, durch Wasser, Äthylalkohol und Äthyläther absorbiert (Apparat I).

Das Gas wurde durch Erhitzen einer Mischung von wasserfreiem Natriumacetat, Kaliumhydrat und Kalciumoxyd hergestellt und mit konzentriertem Natriumhydrat und Phosphorsäureanhydrid gereinigt. Bei den Versuchen mit diesem Gase bediente ich mich einer Vorrichtung, wodurch das Gasvolumen mit einer Genauigkeit von etwa 15 cmm gemessen werden konnte, welche gesteigerte Genauigkeit wegen der geringen Löslichkeit des Gases vonnöten war.

Der Äthylalkohol war von der hiesigen Akademischen Apotheke geliefert und als rein bezeichnet. Der Äthyläther war über Natrium destillierter Äther »pro narcosi» aus der Fabrik Annelöf. Derartiger Äther ist hier analysiert und völlig rein befunden worden.

In den nachstehenden Tabellen, welche die Ergebnisse der Messungen mitteilen, sind die Bezeichnungen die bisher verwendeten.

Methan, durch Wasser absorbiert (Apparat I).

Tabelle 3.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
890	1,90	0,002 135	0,000 145	2
1470	3,22	0,002 190	0,000 109	3
2190	4,58	0,002 092	0,000 069	8

$\delta = 0{,}002\ 121 \pm 0{,}000\ 045.$

Methan, durch Äthylalkohol absorbiert (Apparat I).

Tabelle 4.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
2050	4,88	0,002 381	0,000 064	1
5200	12,67	0,002 437	0,000 044	2
6530	15,52	0,002 377	0,000 024	8

$\delta = 0{,}002\ 388 \pm 0{,}000\ 020.$

Methan, durch Äthyläther absorbiert (Apparat I).

Tabelle 5.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
4500	10,08	0,002 240	0,000 030	1
10510	23,61	0,002 246	0,000 014	5
13970	31,17	0,002 231	0,000 015	4 [1])
19030	42,85	0,002 252	0,000 010	8
22460	50,65	0,002 255	0,000 010	8

$\delta = 0{,}002\ 248 \pm 0{,}000\ 006.$

Stickstoff, durch Äthylalkohol absorbiert (Apparat II).

Das Gas wurde durch Erhitzen von in Wasser gelöstem Kaliumnitrit und Chlorammonium hergestellt und vermittels Chlorkalcium und Phosphorsäureanhydrid getrocknet. Die Ergebnisse verzeichnet Tabelle 6.

[1]) Quecksilber aus dem Dilatometer entfernt.

Tabelle 6.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
5160	9,59	0,001 858	0,000 020	1
11490	21,36	0,001 859	0,000 014	2 [1]
16030	29,71	0,001 853	0,000 010	4

$$\delta = 0{,}001\,855 \pm 0{,}000\,007.$$

6. Wie oben erwähnt worden, hat ÅNGSTRÖM dargethan, dass der Absorptions-Dilatationskoeffizient keinerlei Veränderung erleidet, das Gas möge durch eine gasfreie Flüssigkeit absorbiert werden oder durch eine Flüssigkeit, welche vorhin eine beliebige Quantität eines anderen absorbiert hat. Er wies dieses bezüglich der Kohlensäure und des Wasserstoffs bei deren Absorption durch Alkohol und Äther nach.

Wenn Kohlensäure und Stickstoff unter hohem Druck gemischt werden, tritt nach den von MARGULES berechneten ANDREWS'schen Bestimmungen eine beträchtliche Volumenzunahme ein [2], welche unter gewissen Bedingungen bis auf 30—40 % sich stellen kann.

Meines Erachtens ist man hier nicht a priori berechtigt die Gültigkeit des obigen Gesetzes vorauszusetzen; ich habe deshalb den Versuch gemacht, das Verhältnis näher zu untersuchen. Zu dem Zwecke führte ich zuerst Kohlensäure in Äthylalkohol ein und bestimmte den Absorptions-Dilatationskoeffizienten. Darauf wurde dieser Lösung Stickstoff zugeführt, und der Koeffizient wurde auch in Bezug auf ihn bestimmt. Sodann folgte noch eine ähnliche Bestimmung für Kohlensäurezufuhr in diese bereits Stickstoff und Kohlensäure enthaltende Lösung. Auf diese Weise geschahen die Bestimmungen des Koeffizienten für Kohlensäure vor und nach der Absorption des Stickstoffs durch die Flüssigkeit unter möglichst genau gleichen Verhältnissen, so dass es möglich war, eine etwaige Schwankung des Koeffizienten überaus genau festzustellen.

---

[1] Quecksilber aus dem Dilatometerrohre entfernt.

[2] Siehe OSTWALD, Stöchiometrie. Leipzig 1891. p. 608.

Die Kohlensäure wurde durch die Einwirkung von verdünnter Chlorwasserstoffsäure auf Marmor hergestellt und vermittels konzentrierter Schwefelsäure, Chlorkalcium und Phosphorsäureanhydrid gereinigt. Die atmosphärische Verunreinigung des Gases war höchst unbedeutend; die Prüfung auf Chlorwasserstoff ergab keine Verunreinigung.

Bei den Bestimmungen gelangte der Apparat I zur Verwendung. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 7, 8 und 9 verzeichnet.

Kohlensäure, durch Alkohol absorbiert.

Tabelle 7.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
7540	14,18	0,001 881	0,000 023	1
14130	26,15	0,001 851	0,000 013	3
17910	32,96	0,001 840	0,000 010	5

$$\delta = 0{,}001\ 849 \pm 0{,}000\ 007.$$

Stickstoff, durch Alkohol, welcher 17910 cmm Kohlensäure enthielt, absorbiert.

Tabelle 8.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
4500	8,26	0,001 836	0,000 037	1
8880	16,31	0,001 837	0,000 029	3
14820	27,19	0,001 835	0,000 013	8

$$\delta = 0{,}001\ 836 \pm 0{,}000\ 010.$$

Kohlensäure, durch Alkohol, der 17910 cmm Kohlensäure und 14820 cmm Stickstoff enthielt, absorbiert.

Tabelle 9.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
8770	15,55	0,001 773	0,000 020	1
17750	32,06	0,001 806	0,000 010	3
27300	49,78	0,001 823	0,000 009	5 [1])
41630	76,13	0,001 829	0,000 006	10
50780	92,90	0,001 830	0,000 006	10 [1])

$$\delta = 0{,}001\ 824 \pm 0{,}000\ 002.$$

[1]) Quecksilber aus dem Dilatometerrohre entfernt.

7. Für die Untersuchung der Grösse des Absorptions-Dilatationskoeffizienten in Flüssigkeitsmischungen und seiner Variation je nach dem Prozentgehalte fand ich es zweckmässig, Mischungen von Wasser und Alkohol zu wählen, da für solche mehrere Untersuchungen in anderer Hinsicht vorliegen, ferner diese Mischungen Kohlensäure absorbieren zu lassen, da wegen ihrer grossen Löslichkeit eine besondere Genauigkeit der Bestimmungen möglich ist.

Der Prozentgehalt der Lösungen wurde aus dem Masse ihres spezifischen Gewichts bestimmt, wobei der Prozentgehalt aus Tabellen berechnet wurde, welche den Zusammenhang dieser Quantitäten nachweisen. [1])

Der Fehler in der Bestimmung des Prozentgehaltes kann 0,05 % betragen. Die nachstehenden Tabellen enthalten die Resultate. Der Prozentgehalt giebt die Anzahl der Gewichtsteile Alkohol auf 100 Gewichtsteile der Lösung an.

Lösung 1. Spezifisches Gewicht $\left(\frac{15^\circ,56}{15^\circ,56}\right) = 0,83\,390$. Gewichtsprozente des Alkohols: 85,75. (Apparat II).

Tabelle 10.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
4670	8,32	0,001 782	0,000 027	1
8790	15,49	0,001 762	0,000 015	3
12560	21,91	0,001 744	0,000 012	5
15610	27,29	0,001 748	0,000 009	9
19300	33,79	0,001 751	0,000 009	9 [2])
22690	39,62	0,001 746	0,000 007	13
27020	47,16	0,001 745	0,000 007	13
31350	55,28	0,001 763	0,000 006	21
36820	65,02	0,001 766	0,000 006	21 [2])

$$\delta = 0,001\,756 \pm 0,000\,003.$$

[1]) Die benutzten Tabellen sind die von LANDOLT und BÖRNSTEIN, Phys.-Chem. Tabellen, 1894, veröffentlichten.

[2]) Quecksilber aus dem Dilatometerrohre entfernt.

Lösung 2. Spezifisches Gewicht $\left(\frac{15^\circ}{15^\circ}\right) = 0{,}93\,933$.

Gewichtsprozente des Alkohols: 40,20. (Apparat I.)

Tabelle 11.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
2150	3,26	0,001 516	0,000 076	1
3780	5,94	0,001 571	0,000 044	3
5350	8,43	0,001 576	0,000 033	5

$\delta = 0{,}001\,568 \pm 0{,}000\,025$.

Lösung 3. Spezifisches Gewicht $\left(\frac{15^\circ}{15^\circ}\right) = 0{,}95\,870$.

Gewichtsprozente des Alkohols: 29,35. (Apparat II.)

Tabelle 12.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
1420	2,12	0,001 491	0,000 067	1
2560	3,71	0,001 449	0,000 045	2
3740	5,38	0,001 439	0,000 031	4
4650	6,80	0,001 462	0,000 022	8

$\delta = 0{,}001\,456 \pm 0{,}000\,016$.

Lösung 4. Spezifisches Gewicht $\left(\frac{15^\circ}{15^\circ}\right) = 0{,}98\,380$.

Gewichtsprozente des Alkohols: 10,10. (Apparat I.)

Tabelle 13.

G	$\Sigma\Delta v$	δ	$d\delta$	p
1430	2,10	0,001 469	0,000 109	1
2870	4,24	0,001 477	0,000 057	3
4220	6,24	0,001 479	0,000 060	3 [1]

$\delta = 0{,}001\,477 \pm 0{,}000\,039$.

[1]) Quecksilber aus dem Dilatometerrohre entfernt.

8. Schliesslich habe ich eine Bestimmung des Absorptions-Dilatationskoeffizienten für Kohlensäure bei der Absorption durch Wasser ausgeführt. Die Grösse desselben ist von verschiedenen Experimentatoren bestimmt worden, deren Versuche aber sehr verschiedene Resultate lieferten. Eine Kontrollbestimmung schien demnach notwendig zu sein. Ich habe zwei Versuchsserien ausgeführt, indem ich mich meiner beiden Apparate bediente.

Erste Serie (Apparat I).

Tabelle 14.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
2060	3,14	0,001 524	0,000 060	1
4740	7,27	0,001 534	0,000 034	4
7770	11,89	0,001 530	0,000 024	9

$$\delta = 0{,}001\,531 \pm 0{,}000\,016.$$

Zweite Serie (Apparat II).

Tabelle 15.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
1770	2,66	0,001 503	0,000 051	1
3670	5,52	0,001 504	0,000 029	3
5160	7,76	0,001 504	0,000 022	5

$$\delta = 0{,}001\,504 \pm 0{,}000\,016.$$

Die beiden Serien ergeben als Mittelzahl:

$$\delta = 0{,}001\,518 \pm 0{,}000\,011.$$

Die mir bekannten Bestimmungen der nämlichen Grösse sind:

	Abs.-Dil.-Koeff.	Temp.
Bergman	0,00 175	2°
Wroblewski	0,00 206	9°—12°
Mackenzie und Nichols	0,00 130	2°
	0,00 138	18°
Bellati und Lussana	0,00 152	10°,752
	0,00 153	12°,675
	0,00 156	22°,169

	Abs.-Dil.-Koeff.	Temper.
BLÜMCKE	0,00 154	18°—20°
	0,00 152	2°—5°
ÅNGSTRÖM	0,00 125	0°.

Von neueren Bestimmungen ist meine Wertangabe mit der von BELLATI und LUSSANA und der von BLÜMCKE übereinstimmend, weicht aber von derjenigen ÅNGSTRÖM's ab. Diese Abweichung dürfte dadurch zu erklären sein, dass letzterer die Bestimmung nach seiner ersten älteren Methode ausführte, welche nur das Einführen ganz kleiner Gasmengen in die Flüssigkeit gestattete. Bekanntlich löst nun in Glasgefässen aufbewahrtes Wasser alkalische Bestandteile des Glases.[1]) Deswegen finde ich es wahrscheinlich, dass der niedere Wert des Absorptions-Dilatationskoeffizienten darauf beruht, dass ein Teil der Kohlensäure sich mit den aufgelösten Alkalien chemisch verband, was als noch wahrscheinlicher durch die Thatsache erwiesen wird, dass bei dem Lösen einer geringen Menge von Natrium- oder Kaliumkarbonat in Wasser das Volumen der Lösung kleiner wird, als das ursprüngliche Volumen des Wassers.

Falls nun aber aus Glasgefässen im Wasser gelöste Bestandteile thatsächlich in merkbarem Grade auf seine Absorptionsfähigkeit gegenüber der Kohlensäure und damit zusammenhängende Erscheinungen einwirken, so liegt hier ein für mehrere Untersuchungen vielleicht sehr bedeutsamer Umstand vor; um dieses zu ermitteln, führte ich folgende Versuche aus. Ich liess das Dilatometer ca. 10 Tage lang mit gut ausgekochtem Wasser gefüllt stehen, worauf eine verhältnismässig kleine Kohlensäuremenge eingeführt wurde. War nun die obige Erklärung bezüglich des niedrigen Wertes des ÅNGSTRÖM'schen Absorptions-Dilatationskoeffizienten für Kohlensäure richtig, so musste man auch hier einen zu niedrigen Wert erwarten.

---

[1]) Vgl. W. PALMÆR: Ueber das Verhältnis zwischen Inversionsgeschwindigkeit und Stärke der verdünnten Säuren. Öfvers. af Kongl. Vet. Ak. Förh. 1897, N:o 1.

Nachdem die Alkalien durch diese Gasquantität neutralisiert worden waren, musste wiederum der erstere Wert sich ergeben. Die Tabelle verzeichnet die Resultate:

Tabelle 16.

G	$\Sigma \Delta v$	δ	$d\delta$	p
2090	2,88	0,001 378	—	—
3430	5,16	0,001 504	0,000 041	1
5840	9,03	0,001 546	0,000 031	2
9110	13,88	0,001 524	0,000 020	4

Aus den drei letzten Bestimmungen wird als Mittelzahl gewonnen $\delta = 0{,}001\,527$.

Hierdurch ist meines Erachtens die Richtigkeit der vorhin gegebenen Erklärung dargethan.

9. Sehen wir nun zu, wie die Ergebnisse meiner Versuche sich zu dem für diese Volumenänderungen angegebenen Gesetze verhalten.

Die Proportionalität der Volumenzunahme gegenüber der absorbierten Gasmenge.

Für den Fall einer nicht allzu starken Absorption hat das Gesetz sich als durchaus gültig erwiesen, mit Einräumung von Beobachtungsfehlern; insbesondere bestätigt die Tabelle 1 mit ihrer langen Beobachtungsreihe, wo die δ mit G weder wachsen noch abnehmen und wo die Beobachtungsfehler sehr klein sind, die Gültigkeit des Gesetzes in schöner Weise. Die Tabelle 10 thut dar, dass das Gesetz auch für Flüssigkeitsmischungen Geltung hat.

Für den Fall konzentrierter Lösungen oder besonders starker Absorption zeigen die Untersuchungen, dass das Gesetz, wenigstens für Ammoniak, nicht mehr strenge Gültigkeit beansprucht. Dieses wird auch durch die Werte des Absorptions-Dilatationskoeffizienten bestätigt, welche aus den Seite 736 erwähnten spezifischen Gewichtsbestimmungen für Gaslösungen mit verschiedenem Prozentgehalt (in Wasser) berechnet werden können. Ich führe hier einige dieser Werte vor.

Tabelle 17.

Ammoniak. Temp. 15°.		*Schweflige Säure.* Temp. 15°,5.		*Chlorwasserstoff.* Temp. 15°.		*Bromwasserstoff.* Temp. 14°.		*Jodwasserstoff.* Temp. 18°.	
Gew.-proc.	δ	Gew.-proc.	δ	Gew.-proc.	δ	Gew.-proc.	δ	Gew.-proc.	δ
0,45	0,001 101	1	0,00 140	0,16	0,00 081	1	0,00 112	1	0,00 120
8,33	0,001 084	4	0,00 145	9,16	0,00 085	4	0,00 116	3	0,00 162
20,49	0,001 068	7	0,00 147	20,97	0,00 089	5	0,00 118	15	0,00 170
28,33	0,001 061	10	0,00 149	30,55	0,00 091	10	0,00 116	45	0,00 163
34,95	0,001 054	13	0,00 151	39,11	0,00 093	15—49	0,00 115	58	0,00 162

Bei Ammoniak zeigt sich eine kontinuirliche Abnahme der δ-Werte, bei schwefliger Säure [1]) und Chlorwasserstoff ein kontinuirliches Wachsen. Bei Brom- und Jodwasserstoff steigt anfänglich δ bis auf ein gewisses Maximum, worauf eine schwache Abnahme sich zeigt. Nach den Bestimmungen BLÜMCKE's wird δ mit wachsender Konzentration auch für Kohlensäure bei hohen Sättigungsgraden gesteigert. Allerdings scheinen die Veränderungen von δ recht klein zu sein.

Das Gesetz der Unabhängigkeit des Absorptions-Dilatationskoeffizienten von früher durch die Flüssigkeit absorbierten Gasen.

Bei diesbezüglichen Versuchen wurde erzielt (siehe die Tabellen 6, 7, 8 und 9):

Stickstoff, durch Alkohol absorbiert,

$$\delta = 0{,}001\,855 \pm 0{,}000\,007.$$

Stickstoff, durch Alkohol, der bereits 17910 cmm Kohlensäure enthielt, absorbiert,

$$\delta = 0{,}001\,836 \pm 0{,}000\,007.$$

Kohlensäure, durch Alkohol absorbiert,

$$\delta = 0{,}001\,849 \pm 0{,}000\,007.$$

[1]) Der offenbare Unterschied zwischen den in der Tabelle angegebenen und den von mir gefundenen Werten dürfte so zu erklären sein, dass hier keine reine Absorptionserscheinung vorliegt, sondern zugleich ein chemischer Vorgang mitspielt, der wahrscheinlich von der Temperatur abhängig ist und auf die Volumenänderung einwirkt.

Kohlensäure, durch Alkohol, der 17910 cmm Kohlensäure und 14820 cmm Stickstoff enthielt, absorbiert,

$$\delta = 0{,}001\,824 \pm 0{,}000\,002.$$

Hieraus erhellt, dass der Unterschied der beiden δ-Werte betreffs des Stickstoffs im Verhältnis zu den vorhandenen Unsicherheitsgebieten unbedeutend ist. Dagegen scheint ein Unterschied der Werte für Kohlensäure vor und nach der Absorption des Stickstoffs durch die Flüssigkeit zu bestehen. Demnach scheint die Absorption des Stickstoffes die von der Kohlensäure verursachten Volumenänderungen zu beeinflussen, wenn schon in recht geringem Masse, um annähernd 2 %.

Das approximative Gesetz: das Verhältnis zwischen den Absorptions-Dilatationskoeffizienten zweier Gase ist unabhängig von der Natur der absorbierenden Flüssigkeit.

In der nachstehenden Tabelle habe ich alle mir zugänglichen Werte, vermittels derer dieses Gesetz geprüft werden kann, zusammengestellt, und das Verhältnis zwischen den Absorptions-Dilatationskoeffizienten der betreffenden Gase und der Luft angegeben.

Tabelle 18. [1]

	Luft. δ_1	Wasserstoff. δ_2	Kohlensäure. δ_3	Methan. δ_4	Stickstoff. δ_5	Stickstoffoxidul. δ_6	$\frac{\delta_2}{\delta_1}$	$\frac{\delta_3}{\delta_1}$	$\frac{\delta_4}{\delta_1}$	$\frac{\delta_5}{\delta_1}$	$\frac{\delta_6}{\delta_1}$
Chloroform . .	0,00 205*	0,00 160*	0,00 188 *	—	—	—	0,78	0,92	—	—	—
Wasser . . .	0,00 143*	0,00 106*	0,001 518	0,00 212	0,00 145*	0,00 159**	0,74	1,06	1,48	1,01	1,11
Benzol . . .	0,00 216*	0,00 170*	0,00 200 *	—	—	—	0,79	0,93	—	—	—
Methylalkohol	0,00 201*	0,00 157*	0,00 184 *	—	—	—	0,78	0,92	—	—	—
Aethylalkohol	0,00 203*	0,00 152*	0,001 849	0,00 239	0,001 855	0,00 200**	0,75	0,91	1,18	0,91	0,98
Aethylæther .	0,00 240*	0,00 184*	0,00 200 *	0,002 248	—	—	0,77	0,83	0,94	—	—

Es stellt sich heraus, dass nicht unerhebliche Abweichungen vom Gesetze vorhanden sind. Es dürfte indes allzu voreilig sein, deswegen dem Gesetze die approximative Bedeutung gänzlich absprechen zu wollen; teils sind nämlich die Abweichungen

[1]) Die einfach besternten Werte entstammen den Bestimmungen Ångström's, die zweifach besternten denen Bellati's und Lussana's, die unbesternten meinen eigenen.

am grössten beim Wasser, wo gerade die Unsicherheit der Bestimmungen des Absorptions-Dilatationskoeffizienten am grössten ist; teils dürfte das Beobachtungsmaterial noch immer nicht genügen, um bestimmte Folgerungen zu ziehen.

Der Zusammenhang zwischen dem Absorptions-Dilatationskoeffizienten der Gase und ihrem Molekularvolumen.

Nachstehend stelle ich der Vergleichung halber neben einander die Werte der nach der CLAUSIUS'schen Formel berechneten Molekularvolumina, so weit diesbezügliche Angaben mir zu Gebote stehen, und die Absorptions-Dilatationskoeffizienten für Wasser.

	Molek.-Volumen. μ	Abs.-Dil.-Koeff. δ	$\frac{\mu}{\delta}$
Sauerstoff	0,000 890	0,00 115	0,77.
Stickstoff	0,001 359	0,00 145	0,94.
Wasserstoff	0,000 887	0,00 106	0,84.
Kohlensäure	0,000 866	0,001 518	0,57.
Methan	0,001 091	0,00 212	0,51.

Ein Blick auf das Verhältnis $\frac{\mu}{\delta}$ der verschiedenen Gase zeigt, dass das Molekularvolumen und der Abs.-Dil.-Koeffizient jedenfalls nicht in einer einfachen Relation zu einander stehen.

10. Meine Bestimmungen des Abs.-Dil.-Koeffizienten für Wasser-Alkohollösungen und Kohlensäure liefern für ihn folgende Werte:

Gewichtsprozente des Alkohols.	δ.
0	0,001 518
10,10	0,00 148
29,35	0,001 456
40,20	0,00 157
85,75	0,001 756
100,00	0,001 849.

Hieraus ist ersichtlich, dass der Abs.-Dil.-Koeffizient nicht aus den δ-Werten des Wassers und des Alkohols linear berechnet

werden kann, dass im Gegenteil für mehrere Prozentwerte δ kleiner wird, als die Werte von δ sowohl für Wasser als für Alkohol. Die Bestimmungen ergeben bei etwa 30 % Alkoholgehalt ein Minimum.

Eine entsprechende Eigentümlichkeit zeigen die Wasser-Alkohollösungen noch sonst in mehrfacher Hinsicht. O. MÜLLER[1]) hat den Absorptionskoeffizienten für Kohlensäure in dergleichen Mischungen bestimmt und ein Minimum bei 28 bis 30 % beobachtet. Zu demselben Ergebnis gelangte LUBARSCH.[2])

DUPRÉ und PAGE[3]) haben dergleichen Lösungen einer umfassenden Untersuchung unterzogen. Sie finden u. A. für die Kompressibilität der Lösungen ein Minimum bei 30 %. Bezüglich verschiedener physikalischer Eigenschaften haben sie besonders die Abweichungen zwischen den beobachteten Werten und den aus den entsprechenden Werten der Bestandteile und dem Prozentgehalte linear berechneten Werten erörtert. Diese Abweichung hat in Bezug auf spezifische Wärme, Mischungswärme, Siedepunkt, Dampfspannung und Kapillarität ihr Maximum bei 30 %. Die Dilatation hat bei 40 % eine Maximalabweichung. Das spezifische Gewicht und der Brechungsindex haben eine Maximalabweichung bei 45 %. DUPRÉ und PAGE lassen sich nicht auf eine theoretische Erörterung dieser Eigentümlichkeiten ein, sie führen aber an, dass eine Lösung von 30 % Alkoholgehalt fast gänzlich einer Zusammensetzung

$$C_2H_6O + 6H_2O$$

entspricht, eine Lösung von 45 % Alkoholgehalt aber einer Zusammensetzung

$$C_2H_6O + 3H_2O.$$

11. Eine theoretische Erörterung der Volumen- und Dichtigkeitsänderungen einer Flüssigkeit, welche ein Gas absorbiert, bietet grosse Schwierigkeiten. Ein Blick auf die Absorptions-Dilatationskoeffizienten verschiedener Gase bei der Absorption

---

[1]) Ann. der Phys. und Chem. B. **37**, p. 24. 1889.

[2]) Ann. der Phys. und Chem. B. **37**, p. 524. 1889.

[3]) Pogg. Ann. Ergbd. **5**, p. 221. 1871.

in verschiedenen Flüssigkeiten zeigt, dass diese Grösse von der Natur des Gases wie der der Flüssigkeit abhängt. Es läge deshalb wohl nahe zu versuchen, den Abs.-Dil.-Koeffizienten als die Summe zweier Glieder, deren eine mit den Eigenschaften des Gases, die andere mit denen der Flüssigkeit zusammenhinge, zu berechnen. Von mir daraufhin angestellte Versuche haben indes ergeben, dass dieses unmöglich ist. Die Volumenzunahme ist ferner auch nicht als eine additive Eigenschaft an die Natur der in das Gasmolekül eingehenden Atome gebunden; man kann den Abs.-Dil.-Koeffizienten der Kohlensäure nicht aus dessen Werten für Kohlenoxyd und Sauerstoff berechnen, auch nicht den des Ammoniaks aus dem des Stickstoffs und des Wasserstoffs. Jedoch deuten gewisse Analogieen mit den Lösungen fester Körper in Flüssigkeiten darauf hin, dass ein Zusammenhang zwischen der Natur der in das Molekül eingehenden Atome und der vom Gase verursachten Volumenerweiterung bei dem Lösungsmittel wohl besteht.

Wenn ein fester Körper in einer Flüssigkeit gelöst wird, verhält er sich bekanntlich in mancher Beziehung wie ein Gas. Man könnte deshalb vielleicht vermuten, dass diese Lösungen gewisse Analogieen mit Gaslösungen aufweisen. Ich habe versucht zu ermitteln, ob betreffs der Volumenänderungen solche Analogieen existieren.

Der Übersichtlichkeit halber habe ich nun in Bezug auf Lösungen fester Körper eine Grösse δ, analog dem Absorptions-Dilatationskoeffizienten, berechnet. Nehmen wir an, eine gewisse Gewichtsmenge des festen Stoffes befinde sich vor der Lösung in freiem gasförmigem Zustande, so kann aus seinem Molekulargewicht das Volumen G, das er einnehmen müsste, berechnet werden. Kennt man nun das spezifische Gewicht der entstandenen Lösung, so kann dann die Volumenzunahme Δv und daraus die Grösse $\delta = \frac{\Delta v}{G}$ berechnet werden.

Man findet dann, dass für eine grosse Zahl von in Wasser gelösten Salzen die Werte für δ von derselben Grössenordnung wie

die Absorptions-Dilatationskoeffizienten der Gase sind; dass sie nicht selten bei schwacher Konzentration konstant sind, um später zu- oder abzunehmen, genau wie es bezüglich der Gase geschieht; dass während der Absorptions-Dilatationskoeffizient des Jodwasserstoffs ein Maximum zeigt, die Jodsalze (NH_4J, NaJ, KJ, CaJ_2, LiJ) ein deutliches Minimum in der Reihe der Werte δ aufweisen, was sonst bei Salzen, in denen Jod nicht vorhanden ist, nicht der Fall zu sein pflegt. Dieses alles deutet meines Erachtens darauf hin, dass die Volumenänderungen, welche mit der Lösung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit verknüpft sind, erhebliche Analogieen mit den entsprechenden Änderungen bei dem Lösen eines Gases zeigen, obwohl allerdings in einzelnen Fällen grosse Abweichungen vorkommen (z. B. dass δ negativ wird). Wie für feste Körper kann man auch für Flüssigkeiten ein δ berechnen. Ich teile in der nachstehenden Tabelle die δ-Werte für einige in Wasser gelöste feste Körper und Flüssigkeiten mit; sie gelten für die schwächste Konzentration, für die ich die erforderlichen Angaben besass. Die Aufstellung der Tabelle dürfte leicht verstanden werden.

$\delta \cdot 10^5$.

	H	Na	Li	Ca	K	NH_4
Fl	—	3	—	—	55	—
Cl	81	87	89	107	134	174
Br	112	107	126	141	153	—
J	120	187	182	207	224	252
NO_3	28	137	—	—	185	217
SO_4	49	78	87	—	188	256

Es erhellt hieraus, dass die Salze des Fluors kleineren δ-Wert haben, als die des Chlors u. s. w. Bei den Halogenen zeigt sich dies Verhältnis in besonders klarer Weise. Innerhalb derselben haben die Wasserstoffverbindungen den kleinsten δ-Wert, sodann die Natriumsalze u. s. w. Analoges gilt auch für die Gruppen NO_3 und SO_4, obgleich bei ihnen grössere Ausnahmen vorkommen.

Hier finden sich also unzweifelhaft Volumenänderungen, welche an die Beschaffenheit der Atome gebunden sind, obgleich auch hier nicht als additive Eigenschaft.

Eben auf Grund dieses Verhältnisses und wegen der vorhin angeführten Analogieen betreffs der Volumenänderungen bei Gasen erachte ich es als wahrscheinlich, dass diese Volumenänderungen als nicht nur auf den physikalischen Eigenschaften der Gase, sondern auch auf ihrer chemischen Natur beruhend aufzufassen sind.

Die Untersuchungen, über welche hier Bericht erstattet worden ist, habe ich in dem Physikalischen Institut zu Upsala ausgeführt. Während der ganzen Dauer meiner Arbeit wurde ihr von Herrn Professor K. ÅNGSTRÖM wohlwollendes Interesse zu Teil, wofür ich ihm hier meinen ergebensten und wärmsten Dank ausspreche.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. fr. sid. 708.)

Kharkow. *Université Impériale.*
Annales. 1898: Kn. 4. 8:o.
Akademisk dissertation. 1. 8:o.
Klagenfurt. *Naturhistorisches Landesmuseum von Kärnten.*
Festschrift zum 50-jährigen Bestehen des Museums. 1898. 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Collectanea ex archivo collegii iuridici. T. 5. 1897. 8:o.
Rozprawy. Wydział filologiczny. (2) T. 11—12. 1898. 8:o.
» Wydział hist.-filozoficzny. (2) T. 10. 1898. 8:o.
Bulletin international. Année 1898: 10. 8:o.
Leiden. *Sternwarte.*
Annalen. Bd. 7. 1897. 4:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-Hist. Cl. Bd 18: N:o 3. 1898. 8:o.
Sachregister der Abhandlungen u. Berichte der Philol.-hist. Cl. 1846—95. 1898. 8:o.
Lisboa. *Academia R. das sciencias.*
Jornal de sciencias mathematicas, physicas y naturaes. (2) T. 5(1898): N. 19. 8:o.
Liverpool. *Biological society.*
Proceedings and transactions. Vol. 12 (1897/98). 8:o.
London. *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 59 (1898/99): N:o 1. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 73—74 (1898): 11. 8:o.
Proceedings. Session 1898/99: N:o 198—200. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 24 (1898): N:o 108. 8:o.
Meteorological record. Vol. 18 (1898): N:o 69—70. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 64 (1898): N:o 404. 8:o.
Philosophical transactions. Vol. 189 (1897): A—B; 190 (1897): A—B. 4:o.
Record. 1897. 8:o.
List. 30/11 1897. 4:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1899: Append. 1. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 30 (1898): N:o 11. 8:o.
Madras. *Government observatory.*
Report 1897/98. 8:o.

(Forts. å sid. 790.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

250. Chemischer Nachweis der Konzentrationsänderungen bei Tropfelektroden.

Von Wilh. Palmær.

(Mitgetheilt den 14. December 1898 durch P. T. Cleve.)

1. Einleitung.

Vor einiger Zeit berichtete ich über einige Versuche, wodurch die Nernst'sche Theorie der Tropfelektroden bestätigt wurde und zudem zum ersten Mal das Uebertreten von Jonen bei Berührung eines Metalls mit einer Flüssigkeit ohne Schliessung eines Stromkreises direkt nachgewiesen wurde.[1]) Sowohl die von der Theorie geforderte Abnahme des Gehaltes der Lösung an Quecksilbersalz in der Umgebung der Tropfelektrode wie die Zunahme der Konzentration an der unteren, betropften Quecksilberoberfläche wurden damals durch elektrometrische Beobachtungen konstatiert, indem man die elektromotorische Kraft mass, die zwischen einer unter der ursprünglichen Lösung befindlichen Quecksilberelektrode und einer in der Nähe der Tropfelektrode oder der unteren betropften Quecksilberoberfläche in passender Weise angebrachten Quecksilberelektrode auftrat. Man beobachtete dann Potentialunterschiede von mehreren Hundertstel Volt, die auch der Richtung nach mit der Theorie übereinstimmten. Dadurch war für die betreffenden Konzentrationsänderungen ein bindender Beweis erbracht, wenn man nämlich mit Nernst

[1]) Bihang till K. Sv. Vet. Ak. Handl., Bd. 23, Afd. II, N:o 5 (1898). Die Theorie von Nernst wird auch in dieser Abhandlung Seite 3—5 dargelegt.

annimmt, dass zwischen zwei identischen, metallischen Elektroden, die sich unter zwei Flüssigkeiten befinden, bei gleicher Temperatur nur dann ein Potentialunterschied auftritt, wenn die Konzentration der Jonen des betreffenden Metalls an den beiden Elektroden verschieden ist — natürlich unter der Voraussetzung, dass die durch das Konzentrationsgefälle in der Lösung selbst hervorgerufene elektromotorische Kraft verschwindend klein sei, wie es bei meinen Versuchen der Fall war. Immerhin schien es eine lohnende Aufgabe zu sein, diese Konzentrationsänderungen womöglich durch rein chemischen Mittel nachzuweisen, wodurch nicht nur ein zweiter Beweis für die von NERNST vorhergesehenen Konzentrationsänderungen bei Tropfelektroden erbracht werden würde sondern auch die NERNST'sche Auffassung des Zustandekommens einer Potentialdifferenz zwischen einem Metalle und einer Lösung in anschaulicher Weise demonstriert werden würde, da ja der Vorgang bei der Tropfelektrode eine unmittelbare Consequenz der NERNST'schen Theorie ist.[1]) Diese Aufgabe, auf die ich gegen Ende meiner früheren Abhandlung hinwies,[2]) habe ich im Universitäts-Laboratorium zu Upsala in Angriff genommen und dieselbe jetzt erledigt. Herrn Professor CLEVE, der einige Apparate für diese Versuche beziehen liess, möchte ich auch hier meinen besten Dank abstatten.

Bevor ich zur Beschreibung der neuen Versuche übergehe, möchte ich kurz eine in neuester Zeit erschienene Arbeit von Hrn. G. MEYER besprechen.[3]) Herr MEYER hat meine früheren elektrometrischen Versuche mit meinem Apparate wiederholt und die Richtigkeit meiner Beobachtungen konstatiert, weist aber darauf hin, dass die bisherigen Ergebnisse, also die Abnahme der Konzentration in der Nähe der Tropfelektrode, die Zunahme bei der unteren, betropften Quecksilberoberfläche in einer $^1/_{10}$ gesättigten Lösung von Calomel in Wasser, das mit etwas Salpeter versetzt war, sich auch nach der WARBURG'schen Theorie

[1]) Vergl. NERNST, Theoretische Chemie, 2:te Aufl., Seite 663 (1898).

[2]) l. c. Seite 25.

[3]) Verhandl. d. physikalischen Gesellschaft zu Berlin, Sitzung vom 21 October 1898.

der kapillar-elektrischen Erscheinungen erklären lassen. Zudem hat Herr MEYER mehrere neue Versuche mit demselben Apparate ausgeführt, wobei er statt reinen Quecksilbers in Quecksilberlösungen verschiedene Amalgame in den entsprechenden Metallsalzlösungen tropfen liess und die auftretenden Potentialunterschiede im Sinne der WARBURG'schen Theorie gedeutet hat, und spricht zuletzt aus, dass die bisher bekannten Erscheinungen nicht als eine *zwingende* Bestätigung der von Hrn NERNST gegebenen Theorie der Tropfelektroden angesehen werden können. In diesem Punkte hat Herr MEYER vielleicht recht; ich habe auch bisher nicht im Auge gehabt, zum Entscheid zwischen den beiden Theorien was herbeizuführen, sondern mich darauf beschränkt, die von NERNST vorhergesagten Phänomene zu bestätigen zu suchen. Die von Herrn MEYER neu aufgefundenen Thatsachen, die allerdings etwas komplizierter Art sind, lassen sich, wie es scheint, auch mit der Theorie von NERNST ebensowohl in Uebereinstimmung bringen. Ich sehe indes gegenwärtig davon ab, auf diese Frage näher einzugehen, weil ich hoffe nach einiger Zeit weitere experimentelle Beiträge zur Diskussion bringen zu können. In den jetzt zu beschreibenden Versuche die beim Erscheinen der MEYER'schen Arbeit schon zum Abschluss gebracht waren, wird man also prinzipiell nichts neues finden sondern nur eine Erweiterung und Bestätigung der früheren Ergebnisse.

2. Die verbesserte Tropfelektrode.

Bei den elektrometrischen Versuchen verwendete ich eine $^1/_{10}$ gesättigte Kalomellösung, weil in einer solchen Lösung schon eine gewöhnliche Tropfelektrode eine merkliche Konzentrationsänderung hervorruft und weil die zu messende elektromotorische Kraft nicht vom absoluten Werth der Konzentrationen abhängt, sondern nur vom Verhältniss der Konzentrationen. In einer so verdünnten Lösung kann man aber mit chemischen Reagenzien überhaupt kein Quecksilber mehr entdecken und ich musste daher zuerst eine *kräftigere Tropfelektrode* zu konstruieren suchen,

um auch in konzentrierteren Lösungen merkliche, prozentische Änderungen der Konzentration hervorrufen zu können.

Dieselbe wird durch beistehende Fig. 1 in natürlicher Grösse wiedergegeben. Ein konischer Glaspfropf wird in ein konisches Glasrohr sehr gut eingeschliffen, so dass er völlig quecksilberdicht wird. Dann wird eine grössere Zahl feiner Striche am Pfropf eingeätzt und schliesslich der Pfropf oben etwas abgeschliffen, so dass der dicht anschliessende Theil eine Höhe von nur 3 Millimeter hat. Es geschieht dies um den Reibungswiderstand in den feinen Rinnen möglichst zu verkleinern, wodurch, wie der Versuch lehrte, sonst, die Ausflussgeschwindigkeit wesentlich herabgesetzt werden kann. Bei dem von mir benutzten Strahlrohre, wie wir passend die Tropfelektrode bezeichnen können, hat der Pfropf einen Diameter von 7 Millim. und daher einen Umkreis von 22 Millim.; auf denselben sind 102 Ritzen gemacht worden und es sind somit beinahe 5 Ritzen auf 1 Millim. Unter dem Mikroskope sieht man dass diese Ritzen aus flachen Vertiefungen bestehen, welche 0,05—0,07 Millim. breit sind, während die Tiefe $^1/_4$ bis $^1/_3$ der Breite ausmacht.[1]) Ein solches Strahlrohr ist auch zu anderen Zwecken, z. B. *Reinigung des Quecksilbers*, sehr verwendbar. Bei einem Drucke von 5 Atm. werden in einer Minute etwa 300 gr. Quecksilber hindurchgepresst, wenn die umgebende Lösung in Bezug auf Quecksilber 0,0005-normal ist. Ist die Lösung reicher an Quecksilber, geht noch viel mehr hindurch, weil die Kapillarspannung des Quecksilbers in mehr konzentrierten Lösungen von Quecksilbersalzen kleiner ist.

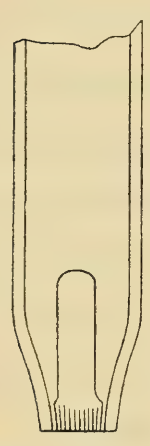


Fig. 1. Nat. Grösse.

Früher wurde gefunden, dass die Konzentrationsänderungen in der Umgebung der Tropfelektrode bedeutend vergrössert werden wenn das Quecksilber unter höherem Druck ausgepresst

[1]) Dieses Strahlrohr ist vom Glasbläser Hrn GRAVE zu Stockholm sehr gut ausgeführt worden.

wurde.[1]) Um hiermit recht weit gehen zu können, wurde ein mit flüssiger Kohlensäure gefüllter Cylinder mit Druckreduzierventil für 1—15 Atmosphären benutzt. Die Anordnung wird im übrigen durch beistehende Fig. 2 erläutert. Die Schraubmutter, *S*, des Druckreduzierventiles wurde mittels starken Kautschukschlauches, *s*, mit einem zweimal gebogenen, starkwandigen, ziemlich weiten Glasrohre, *V*, verbunden und dies wieder auch am Quecksilberreservoir, *R*, angeschlossen. Der Kautschukschlauch war dreifach mit Gewebe eingelegt und fing bei 5 Atmosphären Druck eben an etwas zu schwellen, daher wurde immer dieser Druck aber kein höherer gewählt; der Schlauch wurde mit dicken, weichen Kupferdrähten am Glasrohr befestigt. Das Quecksilberreservoir, *R*, bestand aus einem Glasballon, der 500 cm³ fasste und dessen Wände eine Stärke von 5 mm. hatten.[2]) Dieser dürfte einen Druck von 15 Atm. sicher aushalten; er war mit zwei starken, diametral gelegenen Ansatzröhren versehen und mittels des oberen mit dem Rohre, *V*, mittels des unteren mit dem Strahlrohre, *T*, durch starken Schläuche *s* verbunden. Auch ein der Quecksilberluftpumpe entnommener Ballon von 6 cm. innerem Radius und 2 mm. Wandstärke, der zuerst benutzt wurde, hielt den Druck von 5 Atm. aus. Über den Glasballon wird jedenfalls ein Cylinder aus starkem Eisenbleck zum Schutz gegen ein etwaiges Zerspringen gestülpt. Bei 5 Atmosphären Druck erhält man in z. B. 0,0005 normaler Merkuronitrat-Lösung einenüberaus

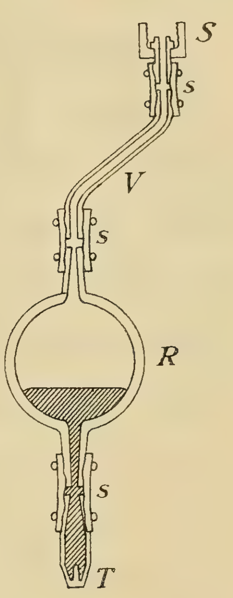


Fig. 2. 1/5 nat. Grösse.

[1]) l. c. Seite 16. Wenn die Druckhöhe des Quecksilbers von 10 bis 70 cm. erhöht wurde, stieg die beobachtete Potentialdifferenz von + 0,017 bis + 0,156 Volt, was nach den Versuchen von OGG (vgl. unten) einer zehntausend Male stärkeren Verdünnung im letzteren Falle entspricht.

[2]) Von der Glashütte Rejmyre, Schweden, bezogen.

kräftigen Regen von Quecksilbertröpfchen, die aus den 102 Ritzen hinausstürzen. Das Quecksilber wird beim Verlassen der Ritzen sofort zerstäubt und man sieht keinen zusammenhängenden Quecksilberfaden in der Flüssigkeit. Das Quecksilber fliesst nur aus den Rinnen aus — zwischen dem Pfropfen und der inneren Wand des Glasrohres kommt nichts durch.

Durch das in der Schraubmutter *S* befestigte Metallrohr wurde das Quecksilber mittels eines Trichters in das Reservoir *R* gegeben; um eine Verunreinigung der aufspritzenden Tröpfchen durch Berührung mit dem Metallrohre zu vermeiden war letzteres innen gefirnisst worden. Der vertikale Abstand zwischen dem Quecksilberniveau im Reservoir und der Mündung des Strahlrohres betrug etwa 25 cm. Bei dieser Druckhöhe sickerte nur sehr wenig Quecksilber durch die feinen Ritzen. Nachdem das Reservoir gefüllt worden war, wurde die Schraubmutter *S* an das Druckreduzierventil fest geschraubt. Dasselbe war früher auf 5 Atm. eingestellt und nunmehr wurde der Haupthahn des Kohlensäurecylinders geöffnet, wobei der Quecksilberregen begann. Um ihn zu unterbrechen, brauchte man nur den Haupthahn des Kohlensäurecylinders wieder zu zudrehen, dann die Schraubmutter des Abflussrohres etwas zu lösen, wobei die im Reservoir und im Druckreduzierventil befindliche Kohlensäure sich plötzlich in die Atmosphär verbreitete und der Quecksilberregen aufhörte.

3. Lösungen und analytische Methoden.

Da die prozentische Änderung der Konzentration, wie NERNST hervorgehoben hat,[1] nur in verdünnten Lösungen einen merklichen Betrag erreichen kann, so muss man die Konzentration der Lösungen der Grenze der analytischen Nachweisbarkeit möglichst nahe kommen lassen und auch ein empfindliches Reagenz wählen. Nach Prüfen mehrerer Reagenzien hat es sich

[1]) »Ueber Berühringselectricität», Seite 11 (Beilage zu den Ann. der Physik und Chemie 1896).

herausgestellt, dass *Schwefelwasserstoffwasser* für den in Rede stehenden Zweck sehr anwendbar sei und ich habe mich daher immer desselben bedient. Das genannte Reagenz giebt bekanntlich mit einigermassen konzentrierten Lösungen von Merkurosalzen einen Niederschlag, der aus einem Gemenge von metallischem Quecksilber und Quecksilbersulfid besteht[1]); in sehr verdünnten Lösungen entsteht nur eine braune Färbung. Man erhält in einer 0,0001 normalen Lösung von Merkuronitrat[2]) eine eben noch erkennbare braune Nuance.

Die Lösung von Merkuronitrat wurde folgendermassen bereitet. Krystallisiertes Merkuronitrat und Quecksilber wurden auf dem Schüttelapparat eine Zeit lang mit Wasser geschüttelt; es entstand so eine *saure* Lösung. Der Gehalt an Quecksilber wurde dadurch ermittelt, dass ein Theil der Lösung auf dem Wasserbade zur Trockne verdampft wurde, der Rückstand bei 120° bis zum konstanten Gewicht getrocknet und dann gewogen wurde. Vom Rückstand wurden zwei aliquote Theile durch vorsichtiges Erhitzen über einer kleinen Flamme im Kugelrohr in Quecksilberoxyd übergeführt[3]) und letzteres gewogen. Die zwei Analysen ergaben Quecksilber in 50 cm^3 der Lösung:

	1,136 g
	1,132 »
Mittel	1,134 g

woraus man berechnet, dass die Merkuronitratlösung in Bezug auf Quecksilber 0,113 normal war.

In dieser Lösung wurde des weiteren der gesammte Nitratgehalt (freie Salpetersäure, Merkuro- und Merkurinitrat) nach der TIEMANN'schen Methode bestimmt.[4]) In zwei Versuchen

---

[1]) BARFOED, Journ. f. prakt. Chemie 93, 230 (1864).

[2]) Mit einer 0,0001 normalen Lösung von Merkuronitrat verstehe ich eine Lösung, die pro Liter 20 mg Hg als Merkuronitrat, sei es neutrales oder basisches, enthält.

[3]) Methode von MARIGNAC, Ann. d. Chemie 72, 61 (1849); siehe auch FRESENIUS' Quant. Analyse, 6:te Aufl. I, 326.

[4]) FRESENIUS, Quantitative Analyse, 6:te Aufl. II, 154.

suchen wurde die Normalität der fraglichen Lösung in Bezug auf Nitrat gefunden:

$$\begin{array}{r} 0{,}134 \\ 0{,}135 \\ \hline \text{im Mittel: } 0{,}1345 \text{ normal.} \end{array}$$

Es ist also ein Ueberschuss von 0,1345—0,113 = 0,0215 Grammäquivalente Nitrat pro Liter vorhanden, was 16 % des Quecksilbergehaltes entspricht. Es rührt dies zum geringen Theil von anwesendem Merkuronitrat her, denn solches muss, trotz des Ueberschusses an Quecksilber, vorhanden sein, da ja die Lösung mit Luft in Berührung war. Wahrscheinlich ist aber die Menge des Merkuronitrates äusserst gering, wie sich aus den Versuchen von OGG schliessen lässt. [1])

Der Ueberschuss an Nitrat rührt also wesentlich von der freien Salpetersäure her, die beim Zersetzen des neutralen Merkuronitrates durch Wasser entsteht; diese Reaktion ist eine sehr komplizierte, indem nicht weniger als 10 verschiedene basische Salze bekannt sind. [2]) Als Endprodukt der Einwirkung des Wassers tritt das einfachste basische Salz, $Hg_2(OH)ONO_2$, [3]) auf. Dasselbe entsteht nach der Formel

$$Hg_2(NO_3) + H_2O = HNO_3 + Hg_2(OH)NO_3.$$

Dies und ähnliche Salze sind im Wasser schwer löslich und bleiben daher im Bodensatz. Jedenfalls wird doch eine kleine Menge der basischen Salze auch gelöst werden, und daher werden wir annehmen müssen, das von den im Liter Lösung vor-

[1]) Zeitschr. für phys. Chemie 27, 285 (1898). OGG bestimmte das Gleichgewicht zwischen Merkuro-, Merkurinitrat und Quecksilber, allerdings in einer Kohlensäure-Atmosphäre. Er fand dass in einer 0,1211 normalen Merkuronitratlösung, die mit Quecksilber in Berührung war, 0,00052 Gramäquivalente Merkurinitrat pro Liter vorhanden waren, was nur 0,43 % der ganzen gelösten Quecksilbermenge entspricht.

[2]) REUSS, Beiträge zur Kentniss der salpetersauren Quecksilberoxydulsalze. Diss. Freiburg i/B. 1886.

[3]) Nach OGG, l. c., tritt in Lösungen von Merkurosalzen als Jon $—\overset{+}{Hg}—\overset{+}{Hg}—$ auf und dem neutralen Merkuronitrat ist also die Formel $Hg_2(NO_3)_2$ zuzuschreiben.

handenen 0,113 Grammäquivalenten Quecksilber nicht ebensoviel Salpetersäure gebunden wird, sondern eine geringere Menge. Von freier Salpetersäure haben wir also im Liter nicht nur die direkt gefundenen ueberschüssigen 0,0215 Grammäquivalente, sondern in der That mehr, weil ein Theil des Quecksilbers als basisches Salz gelöst worden ist. Sehen wir von der kleinen, schwer zu bestimmenden Menge Quecksilberoxydsalz ab, so können wir also behaupten, dass die untersuchte Lösung pro Liter enthält:

0,113 Grammäquivalente Quecksilber, theils als neutrales Merkuronitrat theils als basische Salze;

mehr als 0,0215 Grammäquivalente freie Salpetersäure.

Durch Verdünnen dieser Lösung wurden dann die zum Versuch bestimmten in Bezug auf einwertiges Quecksilber 0,001 bis 0,0001-normalen Lösungen hergestellt. Wenn die ursprüngliche Lösung bis zu 0,01-normal verdünnt wurde, blieb sie klar. Wenn aber 0,01-normale Lösung bis zu 0,001-normaler verdünnt wurde, trat eine sehr geringe Trübung auf und eine noch schwächere Trübung zeigte sich wenn die 0,001-normale Lösung noch zehnmal verdünnt wurde. Diese kleinen Trübungen, die wohl aus basischen Salzen bestanden, wurden nicht berücksichtigt und die obenstehende klare Flüssigkeit als eine 0,001-normale, 0,0001-normale u. s. w. Lösung betrachtet, was also nicht streng richtig war. In diesen durch Verdünnung der ursprünglichen Lösung dargestellten Normallösungen wird jedenfalls auf eine bestimmte Menge Quecksilber noch mehr freie Salpetersäure kommen, als in der ursprünglichen Lösung.

Bevor die hergestellten Normallösungen zum Versuch verwendet wurden, wurden sie noch auf dem Schüttelapparat eine Zeit lang energisch mit Quecksilber geschüttelt. Die Lösungen befanden sich also vor dem Versuch in *Gleichgewicht mit Quecksilber bei Luftzutritt* — und das war in der That nothwendig, weil man sonst nicht sicher sein könnte, dass während des Tropfens eine chemische Reaktion zwischen Quecksilber und Lösung stattfände. Eine solche konnte eintreten, erstens falls

die Merkuronitratlösung beim Aufbewahren sich oxydiert hatte, zweitens wenn im Quecksilber trotz der sorgfältigen Reinigung noch etwa Spuren von fremden Metallen vorhanden waren. Diese zwei Fehlerquellen werden durch das eben erwähnte Vorsichtsmass beseitigt.

Die Reaction mit Schwefelwasserstoffwasser habe ich zu einer *quantitativen kolorimetrischen Schätzung* des Quecksilbergehalts benutzt. Zu 10 cm³ der Lösung wurde 1 cm³ bei Zimmertemperatur gesättigtes Schwefelwasserstoffwasser gegeben, was 4,5 mg H_2S entspricht, während die in 10 cm³ 0,001-normaler Merkurolösung befindliche Quecksilbermenge zur Ueberführung in Schwefelquecksilber + Quecksilber nur 0,3 mg H_2S in Anspruch nehmen würde. Es war somit immer ein beträchtlicher Ueberschuss an H_2S vorhanden. Um den Gehalt zweier Lösungen zu vergleichen, wurden zwei Proben von 10 cm³ mit je 1 cm³ H_2S-Wasser versetzt und die Mischungen in zwei kleine in Cubikcentimetern gradierten Cylindern gegeben, die je 25 cm³ fassten und möglichst gleichen inneren Durchmesser hatten, und dann die stärker gefärbte Lösung B verdünnt bis die Farbe gleich der der schwächeren Lösung A geworden. Wenn hierbei die Lösung B von a bis b cm³ verdünnt geworden ist, so würde man vermuthen dass die Konzentration der Lösung A den Bruchtheil a/b der Konzentration von B beträgt. Durch Wiederholen des Versuches nach Umtausch der Messcylinder wurde ein etwaiger von einer Ungleichheit der Diameter der Messcylinder herrührender Fehler eliminiert.

Ich habe zuerst durch Versuche mit Lösungen bekannter Konzentration geprüft, inwieweit die Methode brauchbar ist. Ich verglich zuerst klare Lösungen, in welchen kein emulsiertes Quecksilber sich befand. Ich ermittelte so die folgenden Ziffern, wobei $n = a/b$, d. h. = dem Verhältnisse der Konzentrationen, das unter obigen Voraussetzung sich berechnen würde. Die Versuche wurden immer paarweise unter Umtausch der Messcylinder ausgeführt; die Abweichungen der einzelnen Versuche unter einander beruhen hauptsächlich auf die Ungenauigkeit der Vergleichung.

	n		
0,001 und 0,0 005-normal:	0,49		
	0,49		
	0,47		
	0,43		
Mittel:	0,47	statt 0,50.	Abweichung 6 %.
0,0 005 und 0,0 002-normal:	0,33		
	0,35		
Mittel:	0,34	statt 0,40.	Abweichung 15 %.
0,0 002 und 0,0 001-normal:	0,39		
	0,43		
Mittel:	0,41	statt 0,50.	Abweichung 18 %.

Es wurden somit immer die verdünnteren Lösungen zu schwach gefunden. Es kann das sowohl auf der Löslichkeit des Schwefelquecksilbers, wie auf der Ausfällung basischer Salze beim Verdünnen beruhen, wodurch die Lösungen an Quecksilber ärmer werden als berechnet wurde. Ausserdem ist es wohl möglich, dass die gelösten basischen Salze von H_2S nicht vollständig zerlegt werden, und daher: je mehr basische Salze, je weniger HgS + Hg.

Dann wurden die klaren Lösungen mit denen verglichen, in denen Quecksilber emulsiert war. Die *klaren* Lösungen wurden, soweit die Farbe überhaupt stark genug war um einen sicheren Vergleich zu gestatten, *stärker* gefärbt, und n giebt wieder das Verhältniss zwischen der Konzentrationen der trüben und der klaren Flüssigkeit an, der sich aus dem Versucheberechnen würde.

	n	
0,0 005-normal:	0,84	
	0,92	
Mittel:	0,88	statt 1,00.
0,0 002-normal:	0,81	
	0,85	
Mittel:	0,83	statt 1,00.

0,0 001-normal: kein merklicher Unterschied, wegen der schwachen Färbung.

Es geht hieraus hervor, dass diese kalorimetrische Methode keineswegs zu den genauen gezählt werden kann. Ich habe jedoch davon abgesehen, die bei den folgenden Versuchen herausgekommenen Ziffern zu korrigieren, weil die zweite der eben genannten Fehlerquellen (Ausfällung basischer Salze beim Verdünnen) bei den eigentlichen Versuchen nicht in Betracht kam; bei ihnen wurden ja die Konzentrationsänderungen nicht durch Zufügen von Wasser, sondern durch tropfendes Quecksilber hervorgerufen. Zieht man dies in Betracht und bedenkt noch dass, wie wir sehen werden, in den zu vergleichenden Versuchsflüssigkeiten immer eine einigermassen gleich starke Emulsion von Quecksilber vorhanden war, so wird man zugeben dass wahrscheinlich immerhin eine Genauigkeit von einigen Prozenten durch die Methode erreicht wird, was für den vorliegenden Zweck völlig ausreichend ist. Es handelt sich nämlich eigentlich nur um einen sicheren *qualitativen* Nachweis der in Rede stehenden Konzentrationsänderungen; die Grösse derselben bietet nur in zweiter Linie Interesse dar, weil dieselbe von der Form des Apparates und vor allem von der Zahl der pro Sekunde gebildeten Tröpfchen sowie von der zu ihrer Aufladung erforderlichen Menge von Quecksilberjonen, also von zwei unbekannten Faktoren abhängen und daher ist eine quantitative Vorausberechnung nicht möglich.

Ich brauche wohl kaum darauf hinzuweisen, dass durch Verwendung eines quantitativen Kolorimeters (das mir überhaupt nicht zu Gebote stand) sowie durch direkten Vergleich der Versuchsflüssigkeit mit mehreren genau untersuchten Lösungen bekannter Konzentration genauere Resultate erreicht werden konnten, was indes aus schon angeführten Grunden vorläufig kein besonderes Interesse darbot. Ich habe auch versucht, die Quecksilberlösungen vor dem Zusatz von H_2S durch Centrifugieren zu klären und benutzte dabei eine kleine Handcentrifuge, die 1500—2000 Touren pro Minute machte; mit diesem Apparate wurde

aber das vollständige Abscheiden der Quecksilbertröpfchen zu zeitraubend und mühsam.

Bei der Bestimmung der Nitrate habe ich mich der *Titration mit Indigolösung* als einer für den fraglichen Zweck genügend empfindlichen und zuverlässigen Methode bedient. Bei der Ausführung derselben bin ich genau den Vorschriften von FRESENIUS gefolgt[1]); man soll zuerst zwei Vorversuche machen und dann durch einen dritten Versuch die Zahl der Cubikcentimeter Indigolösung ermitteln, die der verwendeten Nitratmenge entspricht. Im folgenden werden nur die Resultate des Hauptversuches aufgeführt. Ich verwendete zu jedem Versuche 10 cm^3 der Versuchsflüssigkeit, gebrauchte also zusammen 30 cm^3. War mehr vorhanden wurde der dritte, der Hauptversuch, wiederholt, um zuverlässigere Resultate zu gewinnen.

In meiner früheren Abhandlung[2]) ist schon auseinander gesetzt worden, dass eine den auf die Tröpfchen niedergeschlagenen Quecksilberjonen äquivalente Menge Anionen mitgeschleppt werden, so dass infolgedessen Quecksilbersalz von oben nach unten transportiert wird. Es kann ja, wegen der ungeheuer grossen Ladungen der Jonen, überhaupt kein chemisch nachweisbarer Ueberschuss von z. B. Kationen in einem Theile einer Lösung auftreten. Indes können aber negative Jonen jeder Art, zur Ausbildung der Doppelschicht, herangezogen werden und wir müssen daher zuerst überlegen, ob andere Anionen in unseren Lösungen in nennenswerthem Betrage auftreten können, oder ob es zu erwarten ist dass eben eine äquivalente Menge der *Nitrat*-jonen transportiert werden wird.

Von Anionen haben wir in der Lösung ausser den Nitratjonen noch *Hydroxyl*-jonen, von Wasser stammend, und *Kohlensäure*-jonen, weil ja die Lösung aus der Atmosphäre etwas Kohlensäure aufnimmt. Reines Wasser ist bekanntlich in Bezug auf OH-Jonen etwa $0{,}8 \cdot 10^{-7}$ normal; eine 0,0 005-normale Merkuronitratlösung, in oben beschriebener Weise bereitet, ist aber

---

[1]) FRESENIUS, Quantitative Analyse, 6:te Auflage, II, 157.

[2]) l. c. Seite 4.

in Bezug auf freie Salpetersäure etwa 0,0 001 normal, enthält somit etwa 0,0 001 Grammäquivalente $\overset{+}{H}$-Jonen pro Liter. Hierdurch berechnet sich die Konzentration der $\overset{-}{OH}$-Jonen, x, in einer solchen Lösung nach der Gleichung

$$0{,}0\,001 \cdot x = [0{,}8 \cdot 10^{-7}]^2$$

zu $0{,}64 \cdot 10^{-10}$ Grammäquivalente pro Liter, fällt also gänzlich ausser Betracht. Die Kohlensäure in der Atmosphäre besitzt den Partialdruck von etwa 0,0 004 Atmosphären; aus dem bekannten Absorptionsverhältniss der Kohlensäure berechnet sich hieraus leicht, dass Wasser bei + 18° aus der Atmosphäre etwa 0,000 017 Grammoleküle CO_2 pro Liter aufnimmt. Die Kohlensäure wird zum grossen Theil als Hydrat vorhanden und letzteres hauptsächlich in den Jonen $\overset{+}{H}$ und $\overset{-}{HCO_3}$ gespalten sein.[1] Die Dissociationskonstante der Kohlensäure in wässriger Lösung ist aus den Beobachtungen von KNOX zu 0,00 000 032 berechnet worden.[1] Hieraus berechnet sich der Dissociationsgrad α nach der Formel

$$0{,}00\,000\,032 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \cdot 0{,}000\,017$$

zu 0,13 und also würde das mit Kohlensäure aus der Atmosphäre gesättigte Wasser in Bezug auf $\overset{-}{HCO_3}$-Jonen etwa 0,0 000 022 normal sein. Diese geringfügige Menge wird durch die in der Quecksilberlösung vorhandenen $\overset{+}{H}$-Jonen noch bedeutend verkleinert, so dass auch die Kohlensäurejonen ganz ohne Bedeutung sind. Von den Anionen brauchen wir also nur der Nitratjonen zu gedenken und es wird also *eine den ausgefällten Quecksilberjonen äquivalente Menge Nitratjonen transportiert werden.*

Eine zweite Frage ist die, ob die *prozentische* Änderung der Konzentration des Quecksilbers und der Nitrate dieselbe sein werde. Dies ist nicht der Fall, denn die ursprüngliche Lösung enthält ja einen Ueberschuss von rund 15 % der vorhandenen Quecksilberäquivalente an freier Salpetersäure und die hieraus durch Verdünnen bereiteten »Normallösungen» noch mehr (vgl. Seite

[1]) Siehe Zeitschr. für phys. Chemie **23**, 159 (1897).

769); es muss also *die prozentische Änderung des Nitratgehaltes kleiner ausfallen als die der Quecksilberkonzentration.*

4. Die Konzentrationsabnahme oben.

Da, wie die elektrometrischen Versuche lehrten, schon in einer Salpeterlösung, die zu $^1/_{10}$ mit Kalomel gesättigt worden war und die also in Bezug auf Quecksilber etwa $1{,}3 \cdot 10^{-7}$ normal war, die Konzentration beim Tropfen oben abnahm, unten zunahm und also der osmotische Druck der Hg-Jonen grösser war als die Lösungstension des Metalles, so muss letzteres in Betreff der jetzt benutzten, vielmals stärkeren Lösungen a fortiori gelten und also auch bei diesen Lösungen die Konzentration oben abnehmen, unten zunehmen.

Ich werde zuerst zwei einfachen Apparate beschreiben, womit man die Konzentrationsabnahme oben, die Zunahme unten in zwei getrennten Versuchen nachweisen kann, und dann einen etwas komplizierteren Apparat, wodurch die Konzentrationsänderungen oben und unten in *einem* Versuche dargelegt werden können. Ich nehme die einfachen Apparate hier deshalb auf, weil ich, wie schon Seite 762 hervorgehoben, mir vorstelle, dass der Versuch als eine einfache Konsequenz der NERNST'schen Theorie der elektrolytischen Lösungstension zur anschaulichen Demonstration dieser Theorie zu verwenden sei und deshalb eine Angabe wie man mit den einfachsten Mitteln den Versuch anstellen kann willkommen sein möchte.

Der Apparat wird auf beistehende Fig. 3 etwas schematisch wiedergegeben. *T* ist die oben beschriebene Tropfelektrode, die im Trichtergefäss *O* mündet. Es ist also, um die Vermischung der Flüssigkeit im grossen Reservoir *M* mit der kleinen Flüssigkeitsmenge in *O* in der Nähe die Tropfelektrode möglichst zu verhindern, dasselbe Prinzip benutzt, wie bei den früheren elektrometrischen Versuchen.[1]) Die Quecksilbertröpfchen werden durch das enge Rohr *k*, geschleudert, und zwar in solcher Menge,

[1]) l. c. Seite 6, 7.

dass das Rohr dadurch fast erfüllt erscheint. Hierdurch wird das Hinaufdringen der Lösung von *M* in *O* wesentlich erschwert und die Lösung in *O* kann ungehindert bis zu einer gewissen Grenze an Quecksilbersalz erschöpft werden. Bei *C*

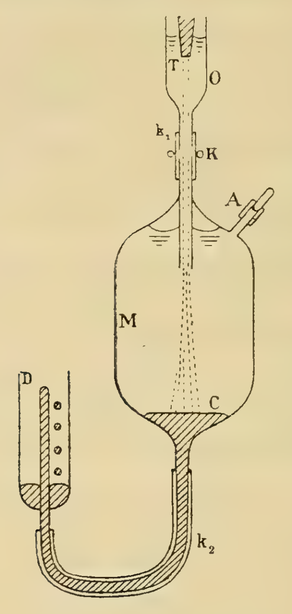


Fig. 3. 1/5 nat. Grösse.

fliessen die Tröpfchen wieder zusammen und das Quecksilber fliesst endlich bei *D* ab, während also das Niveau *C* und somit auch der Flüssigkeitsstand in *O* während des ganzen Versuches konstant gehalten wird — eine Anordnung, die auch früher benutzt wurde.[1])

Die Dimensionen des Apparates können an der Figur, die den Apparat in 1/5 der natürlichen Grösse wiedergiebt, ziemlich genau abgelesen werden und können, mit Ausnahme des Trichters und seines Abflussrohres, in ziemlich weiten Grenzen variiert werden. Der von mir benutzte Trichter *O* besass einen inneren Diameter von 3 cm. und eine Höhe von 5 cm., vom oberen Rande

[1]) l. c. Seite 11.

bis zur Verjüngung gerechnet. Das Abflussrohr k_1 hat einen inneren Diameter von 10 mm. und ist an einer Stelle abgeschnitten. Die beiden Theile werden durch einen gleich weiten Kautschukschlauch verbunden, wobei die Enden der zwei Glasrohre im Abstand von etwa 2 cm. von einander gelassen werden. Mittelst der starken federnden Klemme K kann der Kautschukschlauch zusammengedrückt werden und so die Kommunikation zwischen O und M unterbrochen werden. Der vertikale Abstand von der Verjüngung des Trichters O bis zur unteren Mündung des Abflussrohres k_1 in M, betrug 14 cm. Das Abflussrohr, k_1, soll 1 cm. oder mehr in die Flüssigkeit in M eintauchen.

Das Ansatzrohr A dient dazu eine Probenahme aus der Lösung in M zu gestatten; es kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch und ein Glasstäbchen verschlossen werden. Dies Rohr A ist nicht nothwendig, denn statt aus M Proben zu nehmen, kann man ebensowohl aus einem aufbewahrten Theil der Versuchsflüssigkeit Probe nehmen, da ja die Flüssigkeit in M die anfängliche Konzentration bewahren soll. Als Gefäss M kann deshalb sehr gut ein gewöhnlicher *Scheidetrichter* von etwa $^1/_2$ Liter Inhalt benutzt werden. Der Glaspfropf des Scheidetrichters wird weggenommen und im Loch wird das untere Theil des Abflussrohres k_1 mittelst eines Kautschukpfropfes befestigt.

Der Kautschukschlauch k_2 kann man durch eine in der Figur nicht angedeuteten starke Klemme verschliessen; hat man jedoch zum Gefäss M einen Scheidetrichter genommen, so wird derselbe an seinem Abflussrohr einen Glashahn haben, was noch besser ist. Das Gefäss D versieht man ausserdem passend mit einem unten angebrachten, seitlichen Ansatzrohr mit Glashahn, wodurch das in D sich ansammelnde Quecksilber bequem abgezapft werden kann. Dem Gefäss D wird man passend eine Höhe von etwa 12 cm. und einen Diameter von etwa 4 cm. geben; das innere Rohr muss einen Diameter von etwa 1 cm. haben.

Der Versuch wird folgendermassen ausgeführt. Der ganze Apparat, nebst Tropfelelektrode und Quecksilberreservoir, wird auf einem soliden Stativ aufgebaut. Dann wird zunächst Queck-

silber mit Hülfe eines Trichters in das innere Rohr von *D* gegeben bis es einige cm. in *M* bis *C* aufsteigt. Dann wird die Kommunikation zwischen *D* und *M* unterbrochen und nunmehr die Versuchsflüssigkeit in *M* und *O* hineingegossen, sodass die Flüssigkeit etwa die in der Figur angedeuteten Niveaus in *M* und *O* einnimmt. Hierbei wird natürlich die Klemme *K* offen gelassen. Nachdem wird die Verbindung zwischen *M* und *D* wieder hergestellt und das Rohr *D* so befestigt, dass das Quecksilber sich am Rande des inneren Rohres befindet während die Lösung das Gefäss *O* etwa zu $^3/_4$ füllt. Die Tropfelektrode *T* wird dann etwa 3 cm. in die Flüssigkeit in *O* hineingesenkt.

Der Apparat ist jetzt fertig. Man presst in der früher beschriebenen Weise Quecksilber während einer bestimmten Zeit, z. B. 1 Minute, hindurch, wobei sich das Niveau in *O* in Folge des Saugens der Tröpfchen 15 bis 20 mm. sinkt, schiebt dann schnell die Klemme *K* auf den Schlauch, den man passend mit etwas Vaseline glatt gemacht hat, und schliesst dann die Quecksilberstrahlen in oben (Seite 766) beschriebener Weise ab. Jetzt nimmt man in aller Ruhe Proben aus dem Trichter *O*, der während des Versuches 20—30 cm³ Flüssigkeit fasst, und aus dem Gefäss *M* und vergleicht deren Gehalt an Quecksilber oder Nitrat.

Ehe ich zu den einzelnen Versuche übergehe, werde ich einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken. Das Quecksilber wurde, wie schon Seite 765 gesagt, immer unter 5 Atmosphären Druck herausgepresst. Die Tropfelektrode wurde immer zu einer bestimmten Tiefe in *O* hineingesenkt, um vergleichbare Resultate zu erhalten; übrigens ist die genaue Einstellung und das Festsetzen der Tropfelektrode mit ihrem starken Kautschukschlauch und dem schweren Quecksilberreservoir eine ziemlich umständliche Arbeit die man nicht unnöthiger Weise wiederholt. Die Tropfelektrode *T* ragte bei dem jetzt beschriebenen Apparat immer 3 cm. in den Trichter *O* hinein. Die Flüssigkeit in *O* wurde auch in allen mit demselben Apparate ausgeführten Versuchen auf dasselbe Niveau gebracht, und zwar bis 2 cm. ober-

halb der Mündung der Tropfelektrode vor dem Versuche; während des Tropfens sank dann das Niveau etwa 2 cm. Das Flüssigkeitsvolumen im Trichter O beträgt also während des Tropfens etwa 12 cm³; dazu kommen einige cm³ aus dem Abflussrohre, die beim Aufsetzen der Klemme K im Trichter abgeschlossen bleiben, zusammen also 15—20 cm³. Wir werden nachher die folgenden Bezeichnungen benutzen:

N = Normalität der Lösung in Bezug auf einwerthiges Quecksilber (vergl. oben Seite 767).
O = die Flüssigkeit oben in der Nähe der Tropfelektrode.
M = » » in der Mitte (Gefäss M), die unverändert bleiben soll.
U = die Flüssigkeit unten, bei der betropften Fläche.
k_1 = das Verhältniss der Konzentrationen von Hg in O und M.
k_2 = » » » » » » » U » M.
a_1 = » » » » » NO_3 » O » M.
a_2 = » » » » » » » U » M.
t = die Zeit, während der die Tröpchen fielen, in Minuten gerechnet.

Nehmen wir als Beispiel

Versuch 1. $N = 0{,}0\,005$; $t = 1'$. Es wurden nur die Quecksilberkonzentrationen in oben (Seite 770) beschriebener Weise verglichen. Man nahm also nach dem Aufhören des Tropfens 10 cm³ aus O und 10 cm³ aus M, goss die Proben in je einen Messcylinder und versetzte mit je 1 cm³ Schwefelwasserstoffwasser. Die Lösung M war stärker gefärbt, sie wurde also verdünnt von 11 bis auf 26 cm³, wobei die Farbe der von O gleichkam. Es wurde also gefunden

$$k_1 = \frac{11}{26} = 0{,}42.$$

Ein Wiederholen des Versuches, unter Umtausch der Messcylinder, ergab

$$k_1 = \frac{11}{29{,}5} = 0{,}37.$$

Im Mittel also $k_1 = 0,395$.

Mit diesem Apparate wurden nun mehrere Versuche unter verschiedenen Bedingungen ausgeführt, deren Resultate jetzt mitgetheilt werden.

Verschiedene Dauer des Tropfens. Die Zeit, t, des Tropfens wurde variiert. Das Resultat war folgendes.

N:o des Versuches.	t.	k_1. I.	k_1. II.	k_1. Mittel.
3.	$^1/_2{}'$	0,66	0,62	0,64
1.	1′	0,42	0,37	0,395
2.	5′	0,38	0,30	0,34.

1′ scheint also eine passende Zeit zu sein, denn auch durch 5′ andauerndes Tropfen wird die Konzentration der Lösung in O nur wenig mehr herabgesetzt.

Verschiedener Diameter des Abflussrohres. Bei derselben Länge (14 cm.) wurde der Diameter (d mm.) des Abflussrohres k_1 in folgender Weise variiert, wobei t immer $= 1'$.

N:o des Versuches.	d.	k_1. I.	k_1. II.	k_1. Mittel.
1.	10	0,42	0,37	0,395
5.	13	0,39	0,44	0,415
6.	14	0,40	0,46	0,43.

Durch Erweiterung des Rohres k_1 wird also der Effekt schwächer. Es enger zu machen schien nicht räthlich, weil dann die Tröpfchen zum grossen Theil sich schon im Abflussrohre wieder vereinigen, — ich habe daher immer dem Abflussrohr einen inneren Diameter von 10 mm. gegeben.

Verschiedene Länge des Abflussrohres. Die ganze Länge ($= h$ cm.) des Abflussrohres k_1 betrug in der Regel 14 cm., wie schon Seite 777 erwähnt. Ich habe einen vergleichenden Versuch angestellt mit einer grösseren Länge von k_1 aber unter sonst gleichen Umständen (Zeit des Tropfens 1′); es wurde nur der in M hineinragende Theil des Abflussrohres mit 9 cm. verlängert, der obere Theil blieb unverändert.

N:o des Versuches.	h.	k_1. I.	II.	Mittel.
1.	14	0,42	0,37	0,395
4.	23	0,46	0,455	0,46.

Bei Verlängerung des Abflussrohres wird also der Effekt schwächer, wahrscheinlich weil ein grösserer Theil der Tröpfchen schon im Rohre k_1 zusammenfliesst. Vielleicht wäre es vortheilhaft gewesen, das Abflussrohr kürzer als 14 cm. zu machen; dass war bei meinem Apparate aber nicht möglich und ich habe deshalb immer ein Abflussrohr von 14 cm. gesammter Länge angewandt.

Mit dem jetzt beschriebenen Apparate sind keine Bestimmungen der Änderungen des Nitratgehaltes gemacht worden.

5. Die Konzentrationszunahme unten.

Bei dem zum Nachweis der Konzentrationszunahme in der Nähe der betropften Oberfläche benutzten Apparat wird um die Vermischung des die untere Quecksilberoberfläche bespülenden Theiles mit der übrigen Flüssigkeit zu verhindern, dasselbe Prinzip wie oben benutzt. Der Apparat wird durch die beistehende Fig. 4. erläutert. Die Tropfelektroden T wird in den ziemlich weiten Cylinder M eingesenkt, das zum Theil mit der Lösung gefüllt ist. Das Abflussrohr von M, das einen inneren Diameter von 1 cm. besitzt, wird durch einen Kautschukschlauch mit ein ähnliches Rohr verbunden, dass in der Kugel U festgeschmolzen ist und etwa bis in die Mitte von U ragt. Die gesammte Länge dieser Röhre nebst Schlauch betrug etwa 12 cm. Der Schlauch kann durch eine Klemme K zugeschnürt und so die Kommunikation zwischen M und U unterbrochen werden. Die Tröpfchen fliessen im unteren Theile von U wieder zusammen und das Quecksilber fliesst in derselben Weise wie in Fig. 3 ab. Man erkennt dass durch die in riesiger

T M K U

Fig. 4.
1/5 nat. Grösse.

Menge durch das Rohr, das *M* mit *U* verbindet, hinabstürzenden Tröpfchen ein Aufsteigen der Lösung von *U* in *M* wesentlich verhindert wird. Die Kugel wird passend mit einem in der Figur nicht gezeichneten seitlichen Ansatzrohr versehen, das während des Tropfens durch Schlauch und Glasstäbchen geschlossen wird, durch das aber nachher mittelst einer Pipette Proben herausgenommen werden können. Diese Kugel *U* hatte einen Diameter von 4,5 cm. Die Tropfelektrode *T* wird ziemlich tief in *M* hineingesenkt, damit der Weg von *T* zur unteren Quecksilberoberfläche nicht zu lang wird, wodurch die Tröpfchen zum grossen Theil zusammenfliessen ehe sie die Quecksilbermasse unten in *U* erreicht haben.

Ich citiere hier einige mit diesem Apparate ausgeführte Versuche.

N:o des Versuches.	*N*.	*t*.	k_2. I.	II.	Mittel.
7.	0,0 001	1′	1,93	—	1,93
8.	0,0 001	$1^1/_2$′	1,90	2,40	2,15.

Die Konzentration unten wird also beinahe verdoppelt.

N:o des Versuches.	*N*.	*t*.	k_2.
9.	0,00 025	$1^1/_2$′	1,83.

Bei einer konzentrierteren Lösung wird also die prozentische Änderung etwas kleiner. Bestimmungen der Änderungen der Nitratkonzentration sind mit diesem Apparate nicht gemacht worden.

6. Der kombinierte Apparat.

Um in einem Versuche die Konzentrationsänderungen oben und unten nachweisen zu können, habe ich den beistehend abgebildeten Apparat zusammengestellt (Fig. 5). *T* ist die »Tropfelektrode», oder das Strahlrohr, wie es lieber heissen sollte, k_1 ist das Abflussrohr (1 cm. Diam.) des Trichtergefässes *O*, dessen Dimensionen schon bekannt sind (vergl. Seite 776), K_1 K_2 K_3 K_4 sind starke, federnde Klemmen, *M* ist das mittlere Gefäss das

beinahe 1 Liter fasst, A_1 und A_2 sind Ansatzrohre für das Probenehmen; dieselben können durch Schlauch und Glasstäbchen geschlossen werden. k_2 ist das Abflussrohr von M (innerer Diameter 1 cm.). U ist das untere, kugelförmige Gefäss (Diameter 4,5 cm.). D ist der Quecksilberabfluss. G ist ein Glasgefäss, das mittelst eines Schlauches mit M verbunden wird. Die Lösung wird in G gegossen und dann nach Öffnen der

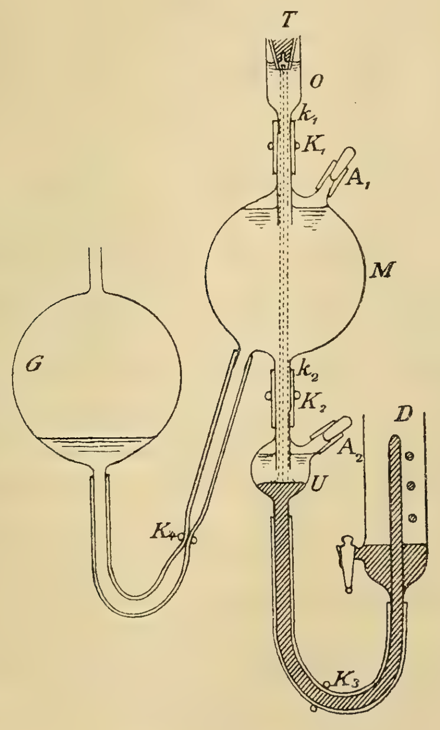


Fig. 5. $^1/_5$ nat. Grösse.

Klemme K_4 in den Apparat eingelassen. Durch Heben und Senken von G kann man die Lösung im Apparat sehr bequem durchmischen. Um die Lösung in U zu erneuern, wird das Glasstäbchen bei A_2 weggenommen und anstatt dessen ein umgebogenes Glasrohr eingesetzt, wodurch die Lösung ausfliessen kann.

Trotz des bedeutenden Druckes gehen die Quecksilberstrahlen nicht in gerader Linie durch M hindurch, sondern vielmehr im Zickzack, wegen des Widerstandes der Flüssigkeit. Die Tröpfchen stossen gegen die Wand und fliessen zum Theil zusammen, ehe sie die Quecksilberoberfläche in U erreicht haben. Etwas besser als bei einem cylindrischen Gefäss geht es wenn M Kugelform hat, weshalb letztere gewählt worden ist.

Ein Versuch mit diesem Apparate wird folgendermassen ausgeführt. Nachdem die Lösung sorgfältig durchgemischt worden ist, wird der Flüssigkeitsstand so reguliert, dass die Quecksilberoberfläche in U etwa in der Mitte von U sich befindet, also das untere Ende des Rohres k_2 berührt, während der Trichter O etwa zu $^2/_3$ gefüllt ist. Die untere Mündung des Strahlrohres T soll sich dabei etwa 2 cm. unter der Flüssigkeitsoberfläche in O befinden. M und U werden von der Lösung fast gefüllt. Die Klemmen K_1, K_2, K_3 werden offen gelassen, K_4 dagegen wird verschlossen. Man lässt nunmehr das Tropfen beginnen. Die Tröpfchen stürzen durch k_1, M, k_2 und sammeln sich in U. In D fliesst ein kräftiger Quecksilberstrahl ab. Der Flüssigkeitsstand in O und die Quecksilberoberfläche in U sinken 15 bis 20 mm. Nachdem die bestimmte Zeit verflossen, schliesst man möglichst schnell nach einander zuerst K_2, dann K_1, schliesst den Haupthahn des Kohlensäurecylinders und dreht sehr rasch die Schraubmutter zurück durch die das Quecksilberreservoir mit dem Druckreduzierventil des Kohlensäurecylinders verbunden ist, wobei der Druck im Quecksilberreservoir nachlässt und das Tropfen aufhört. Jetzt schliesst man auch K_3 und kann dann in aller Ruhe Proben aus O und, nach dem Öffnen von A_1 und A_2, aus M und U entnehmen. Aus O bekommt man etwa 20, aus U etwa 30 cm³. Da man zur Bestimmung der Hg-Menge 10 cm³, zur Bestimmung der Nitratmenge dagegen mindestens 30 cm³ brauchte, konnte man also nicht in einem Versuche Hg und Nitratmenge vergleichen. Ich werde daher die Versuche getrennt besprechen, bei denen der Hg und der Nitrat-Gehalt bestimmt wurde.

A. Änderungen im Hg-Gehalt.

Einige der Versuche werden hier citiert.

N:o des Versuches	N	t	k_1	k_2
11	0,0 005	1′	0,36	1,24
12	»	1′	0,50	1,20
13	»	1′	0,605	1,05
14	»	1′	0,55	1,13
17	»	4′	0,58	1,36
15	»	5′	0,52	1,17
18	»	5′	0,58	1,55
19	»	5′	0,42	1,76

Die Werthe schwanken stark, was nicht befremden dürfte; ausser der wenig scharfen analytischen Methode möchte ich hier als besondere Ursachen der Variationen hervorheben dass die Volumina in O und U bei verschiedenen Versuchen nur annähernd dieselben waren und dass beim Verschliessen der Klemmen K_1 und K_2 auch von der Flüssigkeit in den Rohren k_1 und k_2 etwas mit abgeschlossen wurde — in einem Falle mehr, in einem anderen weniger. Die Mittel für 1′ und 5′ (4′) betragen

t	k_1	k_2
1′	0,50	1,15
5′ (4′)	0,52	1,46

Man erkennt, dass bei diesem Apparat k_1 schon nach einer Minute sein Minimum erreicht hat, wie beim ersten, einfachen Apparat der Fall (vgl. Seite 780). Dagegen steigt k_2 beim Ausdehnen des Versuches auf 5′ beträchtlich, was wohl damit zusammenhängt, dass die Tröpfchen beim kombinierten Apparat einen längeren Weg durchmachen müssen und dabei zum grossen Theil zusammenfliessen, schon ehe die untere Quecksilberoberfläche erreicht worden ist. Auch nach 5′ ist k_2 bedeutend kleiner als bei den Versuchen 7—9 (Seite 782) wobei verdünntere Lösungen verwendet wurden.

B. Änderungen im Nitrat-Gehalte.

Bei der Bestimmung der Salpetersäure durch Titrieren mit Indigolösung nach FRESENIUS (vgl. oben Seite 773) wird die Flüssigkeit mit gleichem Volumen konzentrierter Schwefelsäure in einem Akt vermischt; hierbei wird emulsiertes Quecksilber dank der Erhitzung momentan gelöst und es war zu befürchten, dass hierdurch ein Theil der Salpetersäure reduziert werden würde und so das Resultat ungenau ausfiele. Um diesem vorzubeugen, wurden die Proben zuerst einige Tage stehen gelassen und dann vom abgeschiedenen Quecksilber filtriert und die so klar gewordenen Flüssigkeiten analysiert. Ich führe hier das Resultat einiger Titrationen an, wozu die Versuchsflüssigkeiten von zwei ganz ähnlichen Versuchen gesammelt worden waren; die verwendete Lösung war 0,0 005 normal und die Zeit des Tropfens bei jedem Versuch betrug 5′. Der Hauptversuch (vgl. oben Seite 773) wurde so viel mal wiederholt wie es (bei O und U) der Vorrath an Probeflüssigkeit gestattete. Für je 10 cm³ Probeflüssigkeit wurde von der Indigokarminlösung verbraucht:

N:o des Versuches.	O	M	U
21 und 22	18,0 cm³	21,6 cm³	24,6 cm³
	19,2 »	21,7 »	22,6 »
	—	21,2 »	23,8 »
	—	20,9 »	—
Mittel	18,6 cm³	21,3 cm³	23,7 cm³

Hieraus berechnet sich

$$a_1 = 0,87$$
$$a_2 = 1,11.$$

Man konnte wünschen, dass die einzelnen Bestimmungen unter einander besser übereinstimmten, aber das Hauptresultat, dass auch eine Änderung des Nitratgehaltes auftritt, steht fest. Die prozentische Änderung des Nitratgehaltes ist aber kleiner als die der Hg-Konzentrationen, wie schon Seite 775 vorher gesagt wurde. Sehen wir zu, ob die absoluten Mengen der trans-

portierten $\overset{+}{Hg} - \overset{+}{Hg}$ und $\overset{-}{NO_3}$-Jonen nach unseren Analysen übereinstimmen. Betrachten wir zuerst die vom Trichter O weggeführten Quantitäten. Wir hatten im Mittel $k_1 = 0,52$, $a_1 = 0,87$ — also werden 48 % der Hg-Menge, aber nur 13 % des Nitratgehaltes weggeführt. Nach Seite 771 fällt doch, beim Vergleich einer 0,0 005-normalen Hg-Lösung mit einer etwa halb so starken, der Gehalt der schwächeren Lösung um etwa 15 % zu niedrig aus; wir müssen also annehmen dass k_1 richtiger $= 0,61$ zu setzen wäre und also 39 % des Hg-Gehaltes weggeführt worden wären. Ursprünglich befanden sich pro Liter Lösung 0,113 Grammäquivalente Quecksilber nnd 0,1 345 Grammäquivalente Nitrat. Die transportierten Mengen werden also proportionel $0,113 \cdot 0,39 = 0,044$ und $0,1\,345 \cdot 0,13 = 0,017$ Grammäquivalente. Die transportierten Äquivalenten $\overset{+}{Hg} - \overset{+}{Hg}$ und $\overset{-}{NO_3}$ verhielten sich somit wie 0,044 : 0,017 statt wie 1 : 1. Eine ähnliche Rechnung für die in U eingeführten Mengen ergiebt 0,046 : 0,015 statt 1 : 1. Worauf diese Discrepanz beruht, kann ich zur Zeit nicht sagen — vielleicht beruht es zum grossen Theil auf die mangelhaften Beobachtungsmethoden, sicher auch auf der Zusammensetzung der Lösung, die wenig sicher ermittelt worden ist. Es wurde ja schon hervorgehoben, dass die verdünnteren Lösungen wegen der Ausscheidung von basischen Salzen verhältnissmässig mehr Salpetersäure enthalten müssen als die ursprünglichen, und dadurch wird das Resultat obiger Rechnung zum Theil erklärt. Niemand wird jedoch bezweifeln, dass Kationen und Anionen in äusserst nahe äquivalenten Mengen transportiert werden. Indem der Transport sowohl des Kations wie des Anions *qualitativ* mit völliger Sicherheit nachgewiesen wurde war in der That das Ziel dieser Arbeit auf zwei Wegen erreicht worden. Als eine nicht uninteressante Nebenfrage ergiebt sich die möglichst genaue quantitative Bestimmung der transportierten Menge von Kationen und Anionen und man dürfte ziemlich leicht durch Verfeinern der calorimetrischen Methode zur Bestimmung des Quecksilbers, ebenso durch sorgfältigere und zahlreichere Nitratbestimmungen die Frage in befriedigender Weise beantworten können. Vielleicht wird hierdurch ein Bei-

trag zur Kentniss der sicher komplizierten Zusammensetzung verdünnter Merkuronitratlösungen erbracht werden können und ich werde gelegentlich darauf zurückkommen.

7. Schlussworte.

Die Resultate obiger Arbeit können folgendermassen zusammengefasst werden.

1. Durch rein chemische Mittel sind die von NERNST vorhergesagten Konzentrationsänderungen bei Tropfelektroden nachgewiesen worden. Es ist dies erreicht worden durch Anwendung eines Stahlrohres, das 102 Quecksilberstrahlen statt eines giebt und durch Auspressen des Quecksilbers unter einem Drucke von 5 Atm. Hierbei treten in 0,0 005 normaler Merkuronitratlösung bedeutende Konzentrationsänderungen auf, die mittelst H_2S und Indigo bestimmt werden können.

2. Hierdurch ist auch zum ersten Mal durch rein chemische Mittel das Uebertreten von Jonen bei Berührung eines Metalles mit einem Elektrolyten ohne Schliessung eines äusseren Stromkreises nachgewiesen worden.

3. Die Versuche eignen sich dazu bei der Vorlesung nicht nur die Wirkungsart der Tropfelektroden zu demonstrieren sondern auch die NERNST'schen Theorie des elektrolytischen Lösungsdruckes im allgemeinen, deren einfache und direkte Consequenz diese Konzentrationsänderungen darstellen.

4. Während einer Vorlesung können, mit Hülfe der hier beschriebenen Methode, jedoch nur die Änderungen der Hg-Konzentrationen nachgewiesen werden, während für die Bestimmung des Nitratgehaltes eine ziemlich umständliche Analyse erforderlich ist.

5. Die benutzten analytischen Methoden dürften, nachdem die Zusammensetzung der verwendeten Quecksilberlösungen möglichst genau ermittelt worden ist, dazu dienen können die Frage zu lösen, wie sich die prozentische Änderungen der Hg- und NO_3-Konzentrationen genau verhalten und dadurch zur Kentniss der Konstitution verdünnter Quecksilberlösungen beitragen.

6. Die bisher beschriebenen Versuche liefern keinen entscheidenden Beweis gegen die WARBURG'sche Theorie der elektrokapillaren Phänomene.

Die Aufgabe, die einzelne elektromotorische Kraft Quecksilber-Elektrolyt nach einer früher angekündigten, von NERNST angewiesenen Methode[1]) zu bestimmen, die auf die neue Auffassung der Tropfelektroden begründet wurde, ist in Angriff genommen.

[1]) Bihang till K. Sv. Vet. Ak. Handl. Bd 23, Afd. II, N:o 5, sid. 24.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens bibliotek.

(Forts. från sid. 760.)

Madrid. *Comisión del mapa geológico de España.*
Boletín. (2) T. 4 (1897). 8:o.
Magdeburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Jahresbericht u. Abhandlungen. 1896—98. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1898: 7. 4:o.
Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Memorie. Cl. di scienze mat. e nat. Vol. 18: Fasc. 5. 1898. 4:o.
— *Società Italiana di scienze naturali.*
Memorie. Vol. 6: Fasc. 2. 1898. 4:o.
Moscou. *Société imp. des naturalistes.*
Bulletin. Année 1898: N:o 1. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Philos.-philol. und histor. Cl. 1898: H. 2—3. 8:o.
» Math.-physikal. Cl. 1898: H. 3. 8:o.
— *K. Meteorologische Central-Station.*
Niederschlags-Beobachtungen im Königreich Bayern während des Jahres 1897. 4:o.
— *K. Sternwarte.*
Neue Annalen. Bd 3. 1898. 4:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 4 (1898): Fasc. 8—11. 8:o.
Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. 1898: 11. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
La feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 29 (1898/99): N:o 338. 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 25(1898). 8:o.
— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 45 (1897): 10—12. 8:o.
Perpignan. *Commission météorologique départementale des Pyrénées-Orientales.*
Bulletin. 25 (1896)—26(1897. 4:o.
Plymouth. *Marine biological association.*
Journal. N. S. Vol. 5: N:o 3. 1898. 8:o.
Pola. *Hydrographisches Amt der K. und K. Kriegsmarine.*
Meteorologische Termin-Beobachtungen in Pola und Sebenico. 1898: 10. 4:o.
Rio de Janeiro. *Directoria de Meteorologia.*
Boletim semestral. N:o 1. 1898. 8:o.

(Forts å sid. 807.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1898. N:o 10.
Stockholm.

On the Cephalopods collected during the Swedish Arctic Expedition 1898 under the Direction of Professor A. G. Nathorst.

By Einar Lönnberg.

(Communicated 1898 December 14 by G. Hj. Théel).

This part of the zoological collections is not large, but is however of a certain interest from zoogeographical and biological points of view although it contains but two species, namely

Rossia glaucopis Lovén.

1 specimen 23/6 N. of Hopen Eiland, 77° 25′ N, 27° 30′ E;[1]) depth 160 m. yellowish brown clay; temperature —1,71° C.

2 specimen 25/8 in the entrance to Liefde Bay, 79° 47′ N, 14° 28′ E;[1]) depth 140 m.: stones and red algæ. (Dr. A. Ohlin.)

The first of these is quite typical showing the prominent white warts in great number. The two latter represent the variety which by Verrill has been named: *sublevis*, but which may be nothing else than less strongly contracted specimens of *R. glaucopis.*[2])

This species seems to be rather widely distributed in arctic regions. Kükenthal and Walter found it on the eastcoast of Spitzbergen[3] and the Norwegian North Atlantic Expedition

---

[1]) From Greenwich.

[2]) Conf.: Lönnberg, Öfvers. öfver Sveriges Cephalopoder. Bih. K. Vet. Akad. Handl. Bd. 17. 1891.

[3]) Conf.: Krause, Mollusken von Ostspitzbergen. Zool. Jahrb. Syst. VI, p. 372.

dredged 3 specimens between Norway and Beeren Eiland, and between the latter and Spitzbergen,[1]) but the most northern locality where that expedition found *Rossia glaucopis* was 75° 53′ N, 21° 51′ E. With the addition to the knowledge of the geographical distribution of this species which has been made by this summer's Swedish Expedition to Spitzbergen it can be taken for certain that *Rossia glaucopis* is to be found everywhere round Spitzbergen at suitable localities.[2])

The arctic specimens do not seem to differ from those collected at the westcoast of Norway as I have had the opportunity to see by making comparison with a specimen dredged in the Trondhjem-Fiord this summer by ARWIDSSON and ÖSTERGREN at a depth of 250 m. muddy bottom.

Gonatus fabricii (LICHTENSTEIN) STEENSTRUP.

When the Swedish Expedition was engaged in investigations of the »Swedish Depth» between Spitzbergen and Greenland Mr. KOLTHOFF shot a *Cystophora cristata* out of which, when it had been hoisted on board, several half digested cephalopods were taken. These were preserved and I have had the opportunity to examine them and have found that such pieces that could be identified belonged to the above mentioned species. This find is of a certain biological importance because it gives us an idea on what the seals are feeding during their pelagic wanderings. It was well known that Cephalopods to a great extent supply the food to pelagic *Odontoceti* of various species from the spermwhale to the dolphin and also that pelagic birds like albatrosses prey upon the same kind of animals and now we find the same thing stated about the seals. This tends to show that the cephalopods form an important link in the chain of marine organisms from the microscopical plankton to the mammals.

---

[1]) Conf.: APPELLÖF, Teuthol. Beitr. III. Bergens Museums Aarbog 1892.

[2]) Its distribution to other parts of the Atlantic are mentioned in my paper quoted above.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1898. N:o 10.
Stockholm.

Meteoren den 25 November 1897.

Af Tryggve Rubin.

[Meddeladt den 14 December 1898 genom N. C. Dunér.]

Den 25 November 1897 passerade en större meteor öfver mellersta Sverige i riktning från väster åt öster. Då den observerats från Upsala observatorium, gjordes en preliminär banbestämning med ledning af denna observation och andra på privat väg insamlade iakttagelser. Sedan Professor Nordenskiöld, som genom upprop i tidningarna erhållit öfver 200 meddelanden om denna meteor, ställt dessa iakttagelser till observatoriets disposition, erhöllos tillräckliga data för en noggrannare banbestämning.

A. Observationer.

1) *Upsala.* Författaren iakttog meteoren från Upsala observatorium. Den höjde sig upp från väster med en något svigtande rörelse. Skenet liknade till färgen närmast magnesiumljus, och ljusstyrkan var måhända starkare än halfmånens, men mindre än fullmånens. Strax innan meteoren passerade meridianen, inträffade en explosion; färgen förändrades hastigt till röd, och ljusstyrkan aftog. En eller två af de smådelar, hvari meteoren splittrades, föllo nedåt de östra stjärnorna i St. Björnen, men de återstående fortsatte med aftagande hastighet tills de slocknade i en punkt nära Capella. Fenomenet hade iakttagits under

6—8 sekunder. Jag kvarstod på stället för att inprägla i minnet meteorens bana m. m. och får då efter 2—3 minuter höra ett svagt mullrande ljud kommande norrifrån och liknande dof åska eller dylikt. 5—7 sekunder dessförinnan hade domkyrkoklockan slagit 1/2 7.

Meteorbanan inritades därefter på en stjärnkarta. Några punkter på banan äro enligt denna karta:

α	δ	h	a	Anmärkningar.
259°.2	+ 46°.2	40°.8	114°.4	Den första observerade punkt af banan.
251.4	+ 64.3	50.2	137.4	
229.8	+ 84.0	57.0	169.9	Explosionen.
164.1	+ 87.7	57.6	180.0	Meridianen.
85.2	+ 75.5	54.4	205.0	
82.9	+ 47.2	35.6	235.8	Slutpunkten för den öfversta af smådelarne.

Från Upsala observatorium iakttogs fenomenet äfven af vaktmästaren. Han såg meteoren till en början såsom en stillastående stjärna strax norr om en större ensam fixstjärna (sannolikt α Ophiuchi). Flera andra iakttagelser föreligga äfven från Upsala. Meteorens skenbara storlek har skattats olika från 1/16 till 1/2 af måndiametern.

2) *Vattholma.* Efter muntliga anvisningar uttogs på en kompass riktningarna för meteorens framträdande och slocknande. Såsom medeltal af 4 observatörers anvisningar erhölls, att meteoren först visade sig i azimuten 99° och slocknade i 256°. En af iakttagarne såg meteoren skenbart stillastående under 20 sek. Tiden mellan meteorens slocknande och ljudet af explosionen beräknades till 1 min. 20 sek.

3) *Rasbo socken.* Ljudet har i allmänhet varit anmärkningsvärdt starkt, liknande två skarpa kanonskott. I Frötuna lära fönsterrutorna ha skallrat af knallen, och i Gåfvesta och Berga trodde man sig förnimma ett jordskalf i riktning åt SO.

4) *Alunda.* Meteoren visade sig först stillastående i V på 30° höjd, växte till halfmånens storlek, rörde sig därpå rätt

uppåt, exploderade, hvarvid mindre delar föllo nedåt, men hufvudmassan fortsatte uppåt, passerade genom zenith och slocknade strax därefter. Efter 3 min. en ganska skarp knall.

5) *Vendel.* Meteoren var af halfmånens storlek och gick troligen något på södra sidan om zenith, samt slocknade i O.

6) *Österby bruk.* Meteoren tycktes passera genom zenith.

7) *Harg.* Uppgifter föreligga från fyra personer, som alla öfverensstämma däri, att meteoren passerat meridianen helt nära zenith. Den slocknade enligt en uppgift i SO, enligt en annan i OSO. Ett medelmåttigt starkt dån hördes cirka 5 min. efter meteorens slocknande. Färgen ljusröd.

8) *Östhammar.* En person, som från landsvägen väster om Östhammar sett meteoren nedfalla skenbart i ett närbeläget kärr, har på en karta utmärkt observationsorten samt den punkt, där meteoren tycktes falla ned. Uppmätning på denna karta ger en östlig azimuth af 43.°3.

9) *Öregrunds skärgård.* Meteoren uppgifves först synlig i V på 10° höjd. Den försvann i tjocka moln på 60° höjd.

10) *Grisslehamn.* Meteoren steg upp från V och försvann i ett moln i zenith.

11) *Stockholm* (27 meddelare). Meteorens skenbara storlek uppskattas från 1/6 till 1/2 af månens. Färgen blåhvit eller blågrön, liknande Auerljus eller elektriskt ljus. En del iakttagare ha ej sett någon svans, andra observerade däremot en tydlig men kort svans, hvars färg angifves olika: gulaktig, violett, blåviolett, blekröd, rödgul. De noggrannare uppgifterna på den observerade tiden för fenomenet äro:

$6^h.29^m$	$6^h.28^m$	$6^h.28^m$	$6^h.27^m$
6.25	6.26		

Något ljud har icke förnummits.

Från Repslagaregatan observerades meteoren passera genom St. Björnens stjärnor, och meddelaren har sedan på ort och ställe efter minnet utritat meteorbanan på en stjärnkarta. Några punkter på banan äro:

α	δ	Anmärkningar.
191°	55°	Först observerade punkt af banan.
186	56	
180	56.8	Meridianen.
168	57	Explosionen.
159	57	Slutpunkten (osäker).

12) *Djursholm.* Meteoren syntes under 90 sek. röra sig från NV till NNO.

13) *Vesterås.* Meteoren gick på cirka 7 sek. från NV till OSO. Storlek 1/4 af månens yta, färg blåhvit, svansen afsmalnande, rödgrön, 5 ggr kärnans diameter.

14) *Köping.* Meteoren synlig $6^h.27^m$, färg blågrön, svans eldröd, kärnan trattformig.

15) *Smedjebacken.* Meteoren, hvars diameter var skenbart 1/3 af månens, synes ha passerat genom eller nära zenith; färg: »ej så blått som elektriskt ljus»; gul svans.

16) *Silfvergrufvan.* Meteoren gick norr om zenith på (enligt teckning) 74° höjd.

17) *Ställdalen.* Synlig kl. 6.26; svans.

18) *Uttersberg.* Synlig under 30 sek. Slocknade kl. 6.29. En person tror sig ha hört ett skott.

19) *Skogaholm* (Svennevads skn). Meteoren syntes »precis kl. 6.29 passerande midt för stjärnbilden St. Björnen».

20) *Elfvestorp* (Grythytte skn). Meteoren gick N om zenith på 20° höjd. Explosionen skedde i ONO på 40° höjd.

21) *Elfsjöhyttan* (Gåsborns skn). Meteoren gick genom zenith och slocknade i O 2° S på 45° höjd; storlek 3/4 af månens; färg blåaktig.

22) *Karlstad.* Först synlig i VNV; färg såsom elektriskt ljus, bakre delen ljusgrön.

23) *Millmark, Thorsby.* Meteoren, hvars storlek var »1/4 af månens yta», blef synlig strax O om zenith.

24) *Illberg.* Först synlig i VNV; storlek 1/3—1/4 af månens diameter; färg rödaktig.

25) *Nordmarksgrufvan.* Meteoren gick strax N om zenith; färg »gulare än månens»; lyste som fullmånen.

26) *Nås.* Meteoren gick S om zenith på 45° höjd; syntes i 30 sek.; diameter 1/5 af månens; lång svans.

27) *Avesta.* Först synlig i VSV; varade i 30 sek.; gick genom zenith; kort, röd svans.

28) *Svärdsjö.* Skenbar diameter 1/3 af månens.

29) *Malung.* Meteoren först synlig i SSO; gick S om zenith på 20—15° höjd; slocknade i OSO.

30) *Sandviken.* Meteoren visade sig först såsom ett vanligt större stjärnfall i VSV på 10° höjd. Växte till en större ljusstyrka än månens, ehuru skenbara diametern var mindre än månens; passerade S om zenith på 15° höjd och slocknade i OSO på 8—10° höjd.

31) *Storvik.* Skenbar diameter 1/3 af månens; meteoren efterföljdes af en lysande strimma högst 15 gånger kärnans storlek; färg skiftande från mörkröd till gulblå, blåhvit och hvit.

32) *Gefle.* Meteoren rörde sig på 5 à 6 sek. i en bana, hvars synvinkel var 90°, och slocknade precis i SO; den var blåhvit till färgen, men efter explosionen rödaktig.

33) *Söderhamn.* Skenbar diameter 1/20 af månens; färg grönaktig.

34) *Rogsta* (Hudiksvall). Meteoren, först synlig i VSV; slocknade »i riktning åt Agön», d. v. s. i en azimut af —25°.

35) *Fjäl* (30 km. N Sundsvall). Meteoren synlig i S på 4° höjd.

36) Meteoren har äfven varit synlig i *Östersund.*

37) *Ertemark* (Dal). Meteoren syntes under 30 sek. med en skenbar diameter = 1/2 månens; varseblefs närmast under St. Björnen och rörde sig mot α och β Geminorum. Färg grön. Kvastformig, »stjärngul» svans, hopdragen intill kulan.

38) *Amål.* Meteoren först synlig i VNV. Svans med skiftande färg.

39) *Hunneberg* (Bergagården). Meteoren, hvars storlek var 2/3 af månens, syntes på 15^s röra sig tätt under St. Björnen i en bana, som enligt en kartskiss utgjorde:

α	δ	Anmärkningar.
200°.4	+ 48°.3	Först observerade punkt.
166.0	+ 42.0	Svansen försvinner.

Därefter försvann meteoren bakom trädtopparne.

40) *Skara.* Meteoren iakttogs från landsvägen till Skara (longitud 4° 45′.2 V om Stockholm, latitud 58° 18′.4). Den passerade enligt en kartskiss under St. Björnen och syntes utgå från $\alpha = 218°.2$, $\delta = + 42°.5$.

41) *Fritsla.* Meteoren syntes kl. 6.28 e. m.

42) *Masthugget.* Meteoren visade sig först i NV, och dess diameter var mindre än halfva månens.

43) *Rölanda.* Meteoren först synlig i NNV; syntes under 8 sek.

44) *Norrköping.* Meteoren gick på 10 sek. från N till NO; diameter mindre än 1/4 af månens.

45) *Linköping.* Meteoren gick på 4—5 sek. från NNV; diameter 1/5 af månens.

46) *Motala.* Meteorens diameter 1/5 af månens; ljusstyrkan jämförlig med halfmånens.

47) *Vestervik.* Meteorens skenbara diameter 8—10′; svansen 1 1/2—2°.

48) *Sunnanvik* (Skatelöf). Meteoren gick på 4—6 sek. från NNV till NO t. N, skenbar diameter mindre än 1/3 af månens.

49) *Tjust* (V. Ed). Meteorens diameter 1/4 af månens.

50) *Tenhult.* Meteorens diameter 1/4 af månens.

51) *Skåne.* Följande uppskattningar af meteorens skenbara diameter, jämförd med månens finnas:

1/2, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 och 1/10 af månens diameter.

Den sydligaste punkt, från hvilken meteoren iakttagits, synes vara på sjön 4′ från skånska kusten SV t. V från Smyge Huk; meteoren syntes här på 20°—12° höjd, storleken 1/5 af månens och svansen 1/2—1° lång.

52) Meteoren har äfven iakttagits på Jylland och troligen äfven i Norge. Uppgifterna från Norge äro dock med afseende

på tid och riktning så osäkra, att det ej med visshet låter sig afgöras, om de hänföra sig till denna meteor.

B. Banberäkning.

1) *Banans slutpunkt.*

Syftlinien från Upsala till den punkt, där meteoren syntes slockna, (N 55°.8 O) skäres af syftlinierna från

	φ	λ
Gefle (»precis SO» + 8°.7)[1] i punkten	$\varphi = 60° 10'.0$	$\lambda = 28'.5$ O från Stockholm.
Östhammar (enligt en kartskiss) . . .	60 10.0	28.4
Harg (OSO + 7°.5)	60 10.0	28.6
Vattholma (N 72°.2 O)	60 7.8	22.0
Gotska Sandön (N + 7°.$\frac{1}{4}$ W)	60 13.7	40.0
Hargs station	60 9.1	25.8
Djursholm (NNO + 7°.5 W)	60 9.2	25.9

Den goda öfverensstämmelsen mellan de fyra säkraste af dessa syftlinier (Upsala, Gefle, Östhammar och Harg) visar, att den antagna slutpunkten

$$\varphi = 60° 10'.0 \qquad \lambda = 28'.5 \text{ O från Stockholm}$$

icke kan vara mycket felaktig.

2) *Meteorens höjd, då den slocknade.*

Om h är den observerade vinkelhöjden öfver observationsortens horisont, ϱ jordradien och s vinkeln mellan jordradierna till observationsorten och den observerade punkten, så uttryckes denna punkts höjd (H) öfver jordytan genom den lätt härledda formeln

$$H = \varrho \operatorname{Sin} s[\operatorname{tg}(h + s) - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s].$$

Denna formel kan naturligtvis i många fall förenklas:

Observationsort.	h	s	H
Upsala	35°.6	32'.8	43.9 km.
Stockholm.	26.0	53.3	49.9 »

Af dessa värden på H antages det förra såsom definitivt.

[1]) Här liksom öfverallt där väderstreck äro uppgifna bifogas korrektion för kompassens missvisning.

3) *Tiden för fenomenet.*

Följande uppgifter på tiden föreligga:

Stockholm (Obs. 11) . . .	6^h	29^m	borgerlig tid.
» . . .	6	28	»
» . . .	6	28	»
» . . .	6	27	»
» . . .	6	25	»
» . . .	6	26	»
Ställdalen (Obs. 17) . . .	6	26	»
Skogaholm (Obs. 19) . . .	6	29	»
Fritsla (Obs. 41)	6	28	»
Köping (Obs. 14)	6	27	»
Uttersberg (Obs. 18) . . .	6	29	»
	6^h	27.5^m.	

Af Obs. 1 erhålles följande tidsbestämning. Ljudet af meteoren hördes 6 sek. efter kyrkklockans $^1/_2$7-slag

	$6^h\ 30^m\ 6^s$
Korrektion för kyrkklockans afstånd . . .	$+\ 2^s$
» » meteorens afstånd (45.5 km.)	$-\ 2^m\ 16^s$

Meteoren passerade alltså $6^h\ 27^m\ 52^s$ borg. tid.
$\doteq\ 6^h\ 38^m\ 8^s$ Upsala medeltid
$=22\ \ 57\ \ 47$ » stjärntid.

Denna senare tidsbestämning är använd vid reduktionerna.

4) *Beräkning af verkliga orten för den från Upsala först observerade punkten af banan.*

TISSERAND har i Bull. Astron. Tome XIII angifvit en metod att beräkna afstånden (r_1 och r_2) från observationsorten till tvänne punkter ($\alpha_1\delta_1$ och $\alpha_2\delta_2$) af en meteorbana, under förutsättning, att meteoren rör sig i en rät linie och att den iakttagits äfven från två andra orter, där man på hvardera orten bestämt *en* skenbar punkt af banan ($\alpha'\delta'$ och $\alpha''\delta''$).

Från Upsala har iakttagits, att meteoren bland annat passerat genom punkterna

Upsala I . . . . $\alpha = 259°.2$ $\delta = +46°.2$
» VI . . . 82.9 +47.2
$= \Theta\, 344°\, 11'\, 30''$ $(\varphi) = +59°\, 41'\, 29''$
(Θ = stjärntiden, (φ) = geoc. polhöjd).

Från följande orter hafva dessutom följande skenbara punkter af banan observerats:

	α	δ	Θ	(φ)
Stockholm . .	α=180°.0	δ= +56°.8	344° 38′ 27″	59° 8′ 22″
Hunneberg I .	200.4	+48.3	339 0 20	58 10 38
» II .	166.0	+42.0		
Skara	218.2	+42.5	339 52 12	58 8 10

Då nu observation Upsala VI är meteorbanans slutpunkt, som i mom. 1 och 2 blifvit bestämd, så att afståndet från Upsala till denna punkt är

$$r_2 = 75.8 \text{ km.},$$

så ger hvar och en af observationerna från Stockholm, Hunneberg och Skara en bestämning på r_1.

Räkningen sker enligt TISSERANDS metod medelst formlerna

$$a_1 = \operatorname{Cos}\delta_1 \operatorname{Cos}\alpha_1\,; \qquad a_2 = \operatorname{Cos}\delta_2 \operatorname{Cos}\alpha_2\,;$$
$$b_1 = \operatorname{Cos}\delta_1 \operatorname{Sin}\alpha_1\,; \qquad b_2 = \operatorname{Cos}\delta_2 \operatorname{Sin}\alpha_2\,;$$
$$c_1 = \operatorname{Sin}\delta_1\,; \qquad c_2 = \operatorname{Sin}\delta_2\,;$$

$$A_1 = \varrho \operatorname{Cos}(\varphi) \operatorname{Cos}\theta - \varrho' \operatorname{Cos}(\varphi') \operatorname{Cos}\theta'\,;$$
$$B_1 = \varrho \operatorname{Cos}(\varphi) \operatorname{Sin}\theta - \varrho' \operatorname{Cos}(\varphi') \operatorname{Sin}\theta'\,;$$
$$C_1 = \varrho \operatorname{Sin}\theta - \varrho' \operatorname{Sin}\theta'\,;$$

$$A = b_1c_2 - c_1b_2\,; \quad A'_1 = c_2B_1 - b_2C_1\,; \quad A'_2 = b_1C_1 - c_1B_1\,;$$
$$B = c_1a_2 - a_1c_2\,; \quad B'_1 = a_2C_1 - c_2A_1\,; \quad B'_2 = c_1A_1 - a_1C_1\,;$$
$$C = a_1b_2 - b_1a_2\,; \quad C'_1 = b_2A_1 - a_2B_1\,; \quad C'_2 = a_1B_1 - b_1A_1\,;$$

$$A \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\alpha' + B \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\alpha' + C \operatorname{Sin}\delta' +$$
$$+ [A'_1 \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\alpha' + B'_1 \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\alpha' + C'_1 \operatorname{Sin}\delta'] \frac{1}{r_1} +$$
$$+ [A'_2 \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\alpha' + B'_2 \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\alpha' + C'_2 \operatorname{Sin}\delta'] \frac{1}{r_2} = 0\,.$$

På så sätt erhållas följande bestämning på r_1

Upsala—Stockholm . . . . $r_1 = 85.2$ km.
Upsala—Hunneberg I . . . 69.9 »
» » II . . 66.4 »
Upsala—Skara . . . . . . 77.9 »

Om ett föremål iakttagits från orten φ_0, λ_0 med koordinaterna h, a och dess afstånd är befunnet vara r, så erhålles det observerade föremålets geografiska koordinater (φ, λ) och höjd öfver marken (H) medelst de lätt härledda formlerna

$$\text{Sin}\, s = \frac{r\,\text{Cos}\,(h + s)}{\varrho}$$

$$H = r\,\text{Sin}\,(h + s)\left[1 - \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,(h + s)\right]$$

$$\varphi - \varphi_0 = - s\,\text{Cos}\,a$$

$$\lambda - \lambda_0 = s\,\text{Sin}\,a\,\text{Sec}\,\varphi\,.$$

Formlerna kunna ofta förenklas.

På detta sätt erhållas de geografiska koordinaterna för ifrågavarande punkt af meteorbanan.

Observationsorter.	φ	λ V om Sthlm.	H
Upsala—Stockholm . . .	60° 5′.7	1° 28′.9	56.2 km.
» —Hunneberg I . .	3.2	1 17.7	46.0 »
» » II . .	2.6	1 15.1	43.7 »
» —Skara	4.5	1 23.6	51.2 »

5) *Beräkning af banans radiationspunkt.*

Metod I.

Sedan de geografiska koordinaterna för banans slutpunkt (φ_0, λ_0, H_0) erhållits i mom. 1 och 2, samt motsvarande koordinater (φ, λ, H) för en annan punkt af banan beräknats i mom. 4, så finner man radiationspunktens koordinater (h, a) öfver slutpunktens horizont medelst de lätt härledda formlerna

$$\text{tg}\,(90^\circ - a) = \frac{\varphi_0 - \varphi}{(\lambda_0 - \lambda)\,\text{Cos}\,\varphi_0};$$

$$\text{tg}\,(h + \sigma) = \frac{H + \varrho - (H_0 + \varrho)\,\text{Cos}\,\sigma}{(H_0 + \varrho)\,\text{Sin}\,\sigma};$$

där ϱ är jordradien och σ vinkeln mellan jordradierna till de båda bestämda punkterna. Den senare formeln kan lämpligen förenklas till

$$\operatorname{tg}(h + \sigma) = \frac{H - H_0}{(H_0 + \varrho)\operatorname{Sin}\sigma}.$$

Man finner:

Observationsorter.	a	h	
Upsala—Stockholm . . .	85°.6	+ 5°.44	Half vikt!
» —Hunneberg I . .	82.7	+ 0.22	82°.3 — 0°.38
» » II . .	81.8	— 0.98	
» —Skara	84.4	+ 4.00	

Medeltal $a = 83°.8$

$h = + 2°.54.$

Metod II.

Meteoren uppgifves hafva passerat genom zenith på följande orter, hvarigenom då slutpunkten är bestämd följande värden på radiationspunktens azimut (a) erhållas:

Observationsort.	φ	λ V om Sthlm.	a	Vikt.
Österby. Obs. 6	60° 11′.6	9′.2	96°.4	0
Elfsjöhyttan. Obs. 21 . . .	60° 0.0	3° 45	85.4	4
Avesta. Obs. 27	60° 8.5	1° 55.0	89.2	2
Millmark. Obs. 23	59° 52	6°	84.7	6½

Medeltal 85.6

Den tilldelade vikten är proportionell mot afståndet från slutpunkten.

Meteoren uppges vidare ha gått

Norr om Silfvergrufvan . [$\varphi = 59° 52'$; $\lambda = 3° 40'$] på 74° höjd,
Söder om Nås . . . . . [$\varphi = 60° 27'$; $\lambda = 3° 33'$] på 45° höjd,

häraf erhålles radiationspunktens azimut öfver slutpunktens horisont till

$$a = + 85°.5.$$

Metod III.

Meteoren sågs från Upsala observatorium till en början skenbart stillastående cirka $^1/_2{}^\circ$ norr om α Ophiuchi, således i läget

$$a = 91^\circ.1$$
$$h = + 14^\circ.4.$$

Antager man, att meteoren då befann sig ungefär på meridianen 6° V om Stockholm, så får man en parallax i asimut af 5°.3 och i höjd på 8°.3, hvaraf följer att meteorens radiationspunkt skulle vara

$$a = + 85^\circ.8$$
$$h = + 6^\circ.1.$$

På meteorens radiationspunkt erhållas alltså följande bestämningar

Medelst metod	I	$a = 83^\circ.8$	$h = + 2^\circ.5$
»	» II	85.6	
»	» III	85.8	+ 6.1
	medeltal	85.1	+ 4.3

häraf följer, då stjärntiden för orten ifråga var $23^h\ 1^m\ 25^s$, att radiationspunktens koordinater äro

$$\alpha = 261^\circ.7 \quad \text{eller} \quad \lambda = 279^\circ.1$$
$$\delta = + 1^\circ.3 \qquad \beta = + 24^\circ.6.$$

6) *Meteorens hastighet.*

För bestämmandet af meteorens hastighet har jag användt de meddelanden, som ge tillförlitlig uppgift på det väderstreck, i hvilket meteoren först blef synlig samt dessutom en uppskattning af den tid, under hvilken fenomenet varade. På en karta har jag därpå uttagit längden (i km.) af den del af meteorbanan, som iakttagits från ifrågavarande ort, hvarpå hastigheten erhålles genom division med tiden.

På så sätt har erhållits:

Observationsort.	Obs. del af meteorbanan.	Tid.	Hastighet.	Vikt.
	km.	sek.		
Upsala Obs. 1	110	7	16	2
Djursholm Obs. 12	120	90	1.3	0
Vesterås Obs. 13	177	7	25	2
Avesta Obs. 27	350	30	12	1
Malung Obs. 29	300	60	5	1
Norrköping Obs. 44	160	10	16	1
Linköping Obs. 45	245	4 à 5	59	2
Motala	350	6 à 7	54	1
Vestervik	360	30	12	2
Sunnanvik Obs. 48	400	5	80	1
Hunneberg Obs. 39	130	15	9	1
Dösjöbro (Skåne)	380	20	19	1
Svalöf	375	12.5	30	1
Gefle Obs. 32	125	5 à 6	23	2

Medeltal 29 km. pr sek.

Den stora osäkerheten i denna bestämning beror hufvudsakligen på svårigheten att exakt skatta kortare tidsintervall.

C. Meteorens storlek.

Af de uppgifter på meteorens skenbara storlek jämförd med månens, som föreligga finner man följande verkliga storlek.

Observation 1.	Upsala	meteorens	diameter	260	m.
»	»	»	»	30	»
» 4.	Alunda	»	»	200	»
» 5.	Vendel	»	»	190	»
» 11.	Stockholm	»		160—450	»
» 13.	Vesterås	»	diameter	340	»
» 15.	Smedjebacken . . .	»	»	170	»
» 21.	Elfsjöhyttan	»	»	380	»
» 23.	Millmark	»	»	300	»
» 26.	Näs	»	»	110	»

Observation	28.	Svärdsjö	meteorens	diameter	260 m.
»	31.	Storvik	»	»	220 »
»	33.	Söderhamn	»	»	60 »
»	44.	Norrköping	»	»	300 »
»	45.	Linköping	»	»	330 »
»	46.	Motala	»	»	300 »
»	47.	Vestervik	»	»	690 »
»	48.	Sunnanvik	»	»	800 »
»	51.	Skåne	»	»	2,010 »
»		»	»	»	2,010 »
»		»	»	»	1,370 »
»		»	»	»	1,000 »
»		»	»	»	800 »
»		»	»	»	400 »

Häraf synes framgå, att någon tillförlitlig bestämning af storleken icke på detta sätt kan ernås, då de flesta iakttagare förblanda den skenbara storleken med den ljusstyrka, meteoren utvecklar.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 790.)

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Rendiconti. Cl. di scienze fisiche . . . (5) Vol. 7 (1898): Sem. 2: Fasc. 7—10. 8:o.
Atti. Cl. di scienze morali . . . (5) P. 2: (Not. degli Scavi): Vol. 6 (1898): 6—7. 8:o.
— *Ministero della Istruzione Pubblica.*
GALILEI, G., Le Opere. Vol. 8. Firenze 1898. 8:o.
— *Società Italiana delle scienze.*
Memorie di matematica e di fisica. (3) T. 10. 1896. 4:o.
St. Pétersbourg. *Comité géologique.*
Mémoires. Vol. 16: N:o 1. 1898. 4:o.
Bulletins. 17 (1898): 4—5. 8:o.
— *Societas entomologica Rossica.*
Horæ. T. 31 (1897): N:o 4; 32 (1898): 1—2. 8:o.
— *Société Imp. Russe de géographie.*
Izvjestija. T. 34 (1898): 4. 8:o.
— *Bibliothèque de l'université impériale.*
Zapiski istoriko-filologičeskago fakulteta. Č. 44—47. 1897—98. 8:o.
Scripta botanica Horti universitatis Imp. Fasc. 14. 1897. 8:o.
Biografičeskij slovar professorov i prepodavatelej Imp. univ. 1869—94. T. 2. 1898. 8:o.
Sydney. *Australian museum.*
Annual report of the trustees. Year 1897. Fol.
— *Linnean society of New South Wales.*
Proceedings. Vol. 23 (1898): P. 2. 8:o.
— *Geological survey of New South Wales.*
Memoirs. Palæontology, N:o 6. 1898. 4:o.
Mineral resources. N:o 4. 1898. 8:o.
Tiflis. *Physikalisches Observatorium.*
Beobachtungen. Jahr 1896. 4:o.
Tokyo. *Central meteorological observatory.*
Weather chart. 1898: 9. Fol.
— *Societatis zoologicæ Tokyonensis.*
Annotationes zoologicæ. Vol. 2: P. 3. 1898. 8:o.
— *Mathematico-physical society.*
Tōkyō sūgaku-butsurigaku kwai kiji. 8: 3. 1897. 8:o.
Utrecht. *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
Meteorologisch jaarboek voor 1896. tv. Fol.
Washington. *U. S. Weather bureau.*
Monthly weather review. Year 1898: 8. 4:o.
— *U. S. Naval Observatory.*
Astronomical papers prepared for the use of the American ephemeris and nautical almanac. Vol. 6: P. 4. 1898. 4:o.
Wien. *K. K. Hydrographisches Central-Bureau.*
Jahrbuch. Jahrg. 4 (1896). 4:o.

Wien. *K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 48 (1898): H. 8. 8:o.
Wiesbaden. *Nassauischer Verein für Naturkunde.*
Jahrbücher. Jahrg. 51. 1898. 8:o.
Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*
Meteorologische Beobachtungen an 12 Stationen der Schweiz. 1897: Sem. 2. 4:o.

Af utgifvarne:

Acta mathematica, hrsg. von G. MITTAG-LEFFLER. 22: 3. 1898 4:o.
Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. ENESTRÖM. 1898: N:o 4. 8:o.
Botaniska notiser, utg. af O. NORDSTEDT. Separater ur årg. 1898. 8:o.
Svenska jägareförbundets nya tidskrift, utg. af A. WAHLGREN. Årg. 36 (1898): H. 4. Sthlm. 8:o.
Svensk kemisk tidskrift, utg. af Å. G. EKSTRAND. Årg. 10 (1898): N:o 7. 8:o.
The Journal of physical chemistry, ed. by W. D. BANCROFT, and J. E. TREVOR. Vol. 1 (1896/97): N:o 1–12; 2 (1898/99): 7. 8:o.
Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen, hrsg. von A. SEIDEL. Jahrg. 4: H. 2. 1898. 8:o.

Af författarne:

CLEVE, P. T., EKMAN, G., HJORT, J. & PETTERSSON, O., Skageracks tillstånd under den nuvarande sillfiskeperioden. Göteborg 1897. 4:o.
EKSTAM, O., Einige blütenbiologische Beobachtungen auf Spitzbergen. Tromsö 1898. 8:o.
HILDEBRANDSSON, H. H. & TEISSERENC DE BORT, L., Les bases de la météorologie dynamique historique, état de nos connaissances. Livr. 1. 1898. 8:o.
RETZIUS, G., Separatabdruck aus Biologische Untersuchungen. N. F. Bd 8. Sthm 1898. 4:o.
WAHLSTEDT, L. J., Det intensiva jordbruket på smålotter (»husmansbruket») i Danmark . . . Kristianstad 1898. 8:o.
BASHFORTH, F., Replica di Krupp alla protesta del Signor Bashforth. Cambridge 1898. 8:o.
HOLLAND, W. J., Ascent of the volcanoes Nantai-San, Asama-Yama, and Nasu-Take. 1890. 8:o.
— Arboreal tadpoles. Philad. 1889. 8:o.
HOLUB, E., Über den Ausbau und die Eröffnung der Betschuanaland- und über die Beira-Bahn. Wien 1898. 4:o.
KRIECHBAUMER, Småskr. 3 st. 8:o.
MANSON, M., The laws of climatic evolution. Bristol 1898. 8:o.
ROSENBUSCH, H., Zur Deutung der Glaukophangesteine. Berlin 1898. 8:o.
ROWLAND, H. A., A preliminery table of solar spectrum wave-lengths. Chicago 1898. 8:o.
STRAND, E., Småskr. 4 st. 8:o.

Stockholm 1899. Kungl. Boktryckeriet.

